数学名著译丛

# 数学物理方法 II

〔德〕R.柯朗　D.希尔伯特　著
熊振翔　杨应辰　译

科学出版社

数学名著译丛

# 数学物理方法 II

〔德〕R. 柯朗　D. 希尔伯特　著

熊振翔　杨应辰　译

科　学　出　版　社

北　京

## 内 容 简 介

本书系一经典性名著.

本书系统地提供了为解决各种重要物理问题所需的基本数学方法. 全书分三卷出版, 卷 II 的内容基本上与卷 I 无关, 是从数学物理的观点来处理偏微分方程理论的, 其中包括: 一阶偏微分方程的一般理论、高阶偏微分方程、势论及椭圆型微分方程、两个自变量的双曲型微分方程和多于两个自变量的双曲型微分方程.

本书内容十分丰富, 可供数学、物理、力学等方面的研究工作者、教师和学生参考.


**图书在版编目(CIP)数据**

数学物理方法 II/(德)柯朗, (德)希尔伯特著; 熊振翔, 杨应辰译. —北京: 科学出版社, 2012

(数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-033749-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①柯… ②希… ③熊… ④杨… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 037279 号

责任编辑: 陈玉琢 汪 操 / 责任校对: 朱光兰
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2012 年 3 月第一次印刷 印张: 43
字数: 840 000

**定价: 98.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 英文版原序摘译

本卷讲述偏微分方程理论, 特别是讲述这一广阔领域中有关物理学概念与力学概念的那部分内容. 但即使只限于此, 求全似乎也是难以办到的. 书中所选内容, 在一定程度上偏于我个人的经验与兴趣. 本书的意图在于, 通过着重讲解概念与方法而不是罗列定理与事实, 并且通过由初等水平的内容引导读者接触本门科学中正在探讨的各种问题, 使得数学分析的这一重要分支比较易于掌握.

将近四十年以前, 我曾和 David Hilbert 讨论过编写数学物理一书的计划. 虽然 Hilbert 未能亲自参与这计划的实现, 但我希望这部著作, 特别是本卷, 能反映他的科学精神, 即总是坚定地面向数学问题的切要核心而反对只追求形式上的普遍性. 在讲述各个题材时, 我们将首先致力于典型的特例, 因为它们具体而生动, 从而富于启发性, 并能显示出其内在抽象问题的中心思想. 对一些个别现象, 我并不把它们贬为特例来看待, 而是要以此带领读者一步步地走到制高点, 引出一般理论来, 从而可以居高临下, 把“较低水平”的各个细节看得更清楚, 综合得更好, 掌握得更牢. 为了适应教与学这种有机过程, 我喜欢用归纳方法来引述, 这样有时就会很不简练, 这时就改用演绎的、引经据典式的讲法.

本书在主要内容上是自成一体的. 它相当于 1937 年问世的德文版《数学物理方法 II》. 原著后来被纳粹德国文化部禁止发行. 其后, 我的挚友 Ferdinand Springer 被迫辞去他在著名出版社的领导职务. 1943 年在美国政府的许可下由综合科学出版社 (Interscience Publishers) 再版而使此书得以流传下来. 其后, 就一直准备用英文全部改编出版. 在这很长一段时间里, 本门科学的进展已很可观, 我也对此力求获得更全面的了解. 这些进展, 就我个人作为这些方面的积极工作者与学习者所参与到的范围来说, 自然都反映在本书中了.

读者从目录可以看出本书所涉范围, 它几乎在每个重要细节上都不同于德文原著. 例如, 特征理论以及特征对波的传播理论的作用, 现在较之二十五年以前已能论述得更充分了. 还有, 由 Sobolev 和 Friedrichs 阐明的微分方程弱解的概念, 虽已写入德文版中, 但现在却放在讲述广义函数 (理想函数) 论的章节中. 广义函数是由 Laurent Schwartz 引入并称之为“分布”的. 现在它已经成为高等微积分的不可缺少的工具了. 第 6 章的附录给出了这个理论的浅述. 另一方面, 德文版最后一章的材料, 特别是关于椭圆型微分方程解的存在的讨论, 并未列入本卷中. 这些材料将在论述解的结构的第三卷中讲到. 该卷较简短, 其中还包含着有关的近代数学的概述.

现在问世的这本书, 在格式、内容的完整性、难易的程度上肯定都是参差不齐的. 但我仍然希望它对我的同学们 —— 不管他们是初学者、专家、数学家还是其他行业的科学家或工程师 —— 都会有用. 书中涉及的内容水平不一, 这也许反而能使读者通过较浅近的部分更易于进入整个领域.

一些在我的研究范围以外的成果, 我深知可能在本书里体现得不够, 甚或有所忽视, 对此只能表示歉意. 这些缺点不久以后将有其他著作来弥补, 例如即将出版 Gårding 和 Leray 关于他们自己的卓越成果的书.

R. 柯朗

1961 年 11 月于纽约

# 目 录

# 第 1 章　引　　论

我们从描述基本概念、基本问题以及求解的基本路线这样入门的一章开始.

一个偏微分方程是以形如

$$F(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots) = 0 \tag{1}$$

的关系式给出的. 这里, $F$ 是变量 $x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ 的函数; 要寻求的是自变量 $x, y, \cdots$ 的那样的函数 $u(x, y, \cdots)$, 当把 $u(x, y, \cdots)$ 和它的偏导数

$$\begin{gathered} u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots, \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

代入 $F$ 时, 能使得方程 (1) 对于这些自变量恒成立.

这种函数 $u(x, y, \cdots)$ 叫做偏微分方程 (1) 的解. 不仅要注意单个的"特殊"解, 而且要研究解的总体, 特别是要突出对 (1) 再增加若干条件时的个别解.

当自变量的个数为一时, 偏微分方程 (1) 就变成常微分方程.

在微分方程中出现的最高阶导数的阶数叫做微分方程的阶.

经常把自变量 $x, y, \cdots$ 限制在 $x, y, \cdots$ 空间的一个特定域内; 同样, 也只在 $x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots$ 空间的被限定的一部分内来考虑 $F$. 这种限制表明, 只考虑在 $x, y, \cdots$ 空间的基本域上满足对 $F$ 的相应变元所设的条件的那些函数 $u(x, y, \cdots)$. 由此规定, 今后的一切考虑都是对选取得足够小的区域而言的. 同样, 除非有相反的声明, 总假定一切遇到的函数都是连续的并具有所遇到的各阶连续导数①.

如果 $F$ 对于变量 $u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$ 是线性的且系数只依赖于自变量 $x, y, \cdots$ 的话, 微分方程就叫做线性的. 如果 $F$ 对于最高阶 ($n$ 阶) 导数是线性的, 而系数依赖于 $x, y, \cdots$ 并可能依赖于 $u$ 以及 $u$ 的 1 到 $n-1$ 阶导数的话, 那么微分方程就叫做拟线性的.

主要是讨论线性的或拟线性的微分方程, 对于更一般的微分方程, 通常都是把它们化为这种类型的方程再作讨论.

在只有两个自变量 $x, y$ 的情形下, 可以把微分方程 (1) 的解 $u(x, y)$ 想象为一张几何曲面 ——$x, y, u$ 空间中的一张"积分曲面".

① 在求解方程组时, 我们也总是考虑一个点的邻域, 在这个点处相应的 Jacobi 式不为零.

## 1.1　关于各种解的一般知识

### 1.1.1　例

对于一个 $n$ 阶常微分方程来说, 它的解的总体 (除可能的“奇异”解外) 是自变量 $x$ 的函数, 它还依赖于 $n$ 个任意的积分常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 反之, 对于每一含 $n$ 个参数的函数族

$$u = \phi(x; c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

有一个以 $u=\phi$ 为解的 $n$ 阶常微分方程, 这微分方程可由方程 $u = \phi(x; c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 和 $n$ 个方程

$$u' = \phi'(x; c_1, c_2, \cdots, c_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(n)} = \phi^{(n)}(x; c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

消去参数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 而得到.

对于偏微分方程来说, 情形要复杂得多. 这里也可以寻求解的总体或“一般解”; 也就是可以寻求这样的解, 当某些“任意的”元素被固定后, 它就表示每个个别的解 (仍旧要把某些“奇异”解除外). 在偏微分方程的情况中, 这种任意元素不能再以积分常数的形式出现, 而必定含有任意函数; 一般说来, 这些任意函数的个数等于微分方程的阶数. 这些任意函数所依赖的自变量比解 $u$ 少一个. 这种状况的更确切的叙述包含于 1.7 的存在定理之中. 在本节中, 只通过探讨几个例子来罗列一些知识.

1) 函数 $u(x, y)$ 的微分方程

$$u_y = 0$$

表明 $u$ 不依赖于 $y$, 因此

$$u = w(x),$$

这里 $w(x)$ 是 $x$ 的任意函数.

2) 对于方程

$$u_{xy} = 0,$$

可立即得到一般解

$$u = w(x) + v(y).$$

3) 同样, 非齐次微分方程

$$u_{xy} = f(x, y)$$

的解是

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+w(x)+v(y),$$

其中 $w$ 和 $v$ 是任意函数,$x_0$ 和 $y_0$ 是常数.

一般说来, 可以用二重积分来代替这个积分, 只要取 ◸, 如图 1-1 所示的“三角形”作为积分域. 这域的曲边是曲线 $C:y=g(x)$ 或 $x=h(y)$, 它与直线 $x=$常数, 或 $y=$常数中的任一条相交不超过一次. 这样一来, 就有

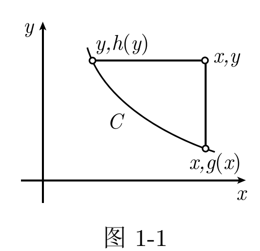


图 1-1

$$u(x,y)=\iint\limits_{\triangledown}f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+w(x)+v(y),$$
$$u_x=\int_{g(x)}^{y}f(x,\eta)\mathrm{d}\eta+w'(x),\quad u_y=\int_{h(y)}^{x}f(\xi,y)\mathrm{d}\xi+v'(y).\tag{1}$$

当 $w(x)=v(y)=0$ 时微分方程的特解对曲线 $C$ 上所有点 $(x,y)$ 满足条件 $u=u_x=u_y=0$.

4) 偏微分方程

$$u_x=u_y,$$

经变量代换

$$x+y=\xi,\ x-y=\eta,\ u(x,y)=\omega(\xi,\eta)$$

变为方程

$$2\omega_\eta=0.$$

这个变换后的方程的“通解”为 $\omega=w(\xi)$, 所以

$$u=w(x+y).$$

同样, 如果 $\alpha$ 和 $\beta$ 是常数, 那么微分方程

$$\alpha u_x+\beta u_y=0$$

的通解就是

$$u=w(\beta x-\alpha y).$$

5) 根据微分学的基本定理, 当 $g(x,y)$ 是 $x,y$ 的任意已给函数时, 偏微分方程

$$u_xg_y-u_yg_x=0$$

表示 $u,g$ 关于 $x,y$ 的 Jacobi 式 $\dfrac{\partial(u,g)}{\partial(x,y)}$ 等于零. 这就意味着 $u$ 依赖于 $g$, 即

$$u = w[g(x, y)], \tag{2}$$

其中 $w$ 是量 $g$ 的任意函数. 反之, 由于每个形如 (2) 的函数 $u$ 都满足微分方程 $u_x g_y - u_y g_x = 0$, 所以取 $w$ 为任意函数就得到解的总体.

值得注意的是, 对于更一般的 —— 拟线性的微分方程

$$u_x g_y(x, y, u) - u_y g_x(x, y, u) = 0$$

有同样的结果, 这里 $g$ 不仅明显地依赖于 $x, y$, 而且也依赖于未知函数 $u(x, y)$. 因为任何解 $u(x, y)$ 及 $\gamma(x, y) = g[x, y, u(x, y)]$ 的 Jacobi 式为零, 这是由于

$$u_x \gamma_y - u_y \gamma_x = u_x g_y - u_y g_x + u_x g_u u_y - u_y g_u u_x = 0$$

的缘故. 所以, 在此情形下, 方程的解由关系式

$$u(x, y) = W[g(x, y, u)] \tag{3}$$

给出, 这是用任意函数 $W$ 规定的 $u$ 的隐函数.

例如, 微分方程

$$\alpha(u) u_x - \beta(u) u_y = 0$$

的解是用

$$u = W[\alpha(u) y + \beta(u) x] \tag{4}$$

(或用 $\alpha(u)y + \beta(u)x = w(u)$) 规定的隐函数, 所以 $u$ 以更隐晦的方式依赖于任意函数 $W$(在 1.7.1 中将给出一个应用).

方程

$$u_y + u u_x = 0$$

是微分方程 $\alpha(u) u_x - \beta(u) u_y = 0$ 的一种特殊情形; 隐函数

$$u = W(-x + uy)$$

给出它的解, 其中 $W$ 是任意函数. 如果把 $u = u(x(y), y)$ 解释成在点 $x = x(y)$ 处的质点随时间 $y$ 运动的速度, 那么上述微分方程就说明一切质点的加速度都等于零.

6) 二阶偏微分方程

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

经过作变换

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta, \quad u(x, y) = \omega(\xi, \eta)$$

后, 变为

$$4\omega_{\xi\eta} = 0.$$

因此, 根据例 2), 它的解是

$$u(x,y) = w(x+y) + v(x-y).$$

7) 仿此可知, 微分方程

$$u_{xx} - \frac{1}{t^2}u_{yy} = 0$$

对于参数 $t$ 的任何值有通解

$$u = w(x+ty) + v(x-ty).$$

特别是, 函数

$$u = (x+ty)^n$$

和

$$u = (x-ty)^n$$

都是解; 也就是

$$t^2 u_{xx} - u_{yy}$$

对于一切 $x, y$ 以及一切实的 $t$ 都等于零.

8) 根据初等代数, 如果一个 $t$ 的多项式对于一切实的 $t$ 都为零, 那么它对于一切复的 $t$ 值也为零. 因此, 如果作代换 $t = \mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 则 7) 中的微分方程变为势方程

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

对于这个方程, 我们得到形如

$$(x+\mathrm{i}y)^n = P_n(x,y) + \mathrm{i}Q_n(x,y),$$
$$(x-\mathrm{i}y)^n = P_n(x,y) - \mathrm{i}Q_n(x,y)$$

的解, 这里 $P_n$ 及 $Q_n$ 是具有实系数的多项式, 它们本身必定都满足位势方程①, 令 $n$ 取遍 0, 1, 2, $\cdots$ 等数, 就得到势方程的无穷多个解, 但与前面的例子相比所不同的是, 到此为止只有可数个解.

使用由 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 规定的极坐标 $r, \theta$ 则得

$$P_n(x,y) = r^n \cos n\theta,\ Q_n(x,y) = r^n \sin n\theta. \tag{5}$$

对于任何实的 $\alpha$, 函数

$$P_\alpha(x,y) = r^\alpha \cos\alpha\theta,\ Q_\alpha(x,y) = r^\alpha \sin\alpha\theta$$

① 这些解说明一个复变量 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数的实部与虚部都满足势方程, 即它们是“调和”函数.

在 $x, y$ 平面的除去原点 $x=y=0$ 的任何域上, 也都满足势方程. 在把 $\Delta u$ 变换为极坐标 (参考卷 I)：

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

之后立即就可以验证这一点. 如果选取两个函数 $w(\alpha)$ 及 $v(\alpha)$ 使得积分

$$\int_a^b w(\alpha) r^\alpha \cos \alpha\theta \mathrm{d}\alpha \text{ 和 } \int_a^b v(\alpha) r^\alpha \sin \alpha\theta \mathrm{d}\alpha$$

的一阶及二阶导数能够在积分号下微分而得到, 那么就能造出依赖于两个任意函数 $w$ 和 $v$ 的解族, 它的形式是

$$\int_a^b r^\alpha (w(\alpha) \cos \alpha\theta + v(\alpha) \sin \alpha\theta) \mathrm{d}\alpha.$$

9) 作为高阶微分方程的例子, 考虑

$$u_{xxyy} = 0,$$

它的通解是

$$u(x, y) = w(y) + x w_1(y) + v(x) + y v_1(x).$$

10) 如果自变量的个数大于 2, 那么在通解中就会出现依赖于两个或更多个变量的任意函数. 例如, 关于 $u(x, y, z)$ 的微分方程

$$u_z = 0$$

的通解是

$$u = w(x, y).$$

### 1.1.2　已给函数族的微分方程

在 1.1.1 中说过, 能够造出为一个已给的依赖于几个任意参数的函数族所满足的常微分方程. 现在提出如下的问题：能否造出一个含 $n$ 个自变量的偏微分方程, 为一个依赖于任意函数 ($n-1$ 个自变量的函数) 的函数族所满足呢?

作为例子, 考虑形如

$$u = f[x, y, w(g(x, y))] \tag{6}$$

的函数集合, 其中 $f$ 是变元 $x, y, w$ 的已知函数,$g(x, y)$ 是 $x, y$ 的已知函数, 例如 $g = xy$. 要想得到一个关于这个函数集的偏微分方程, 将方程 (6) 对 $x$ 和 $y$ 微分：

$$u_x = f_x + f_w w' g_x,$$

$$u_y = f_y + f_w w' g_y.$$

消去 $w'$, 就得到所需要的微分方程

$$(u_x - f_x)g_y - (u_y - f_y)g_x = 0, \tag{7}$$

这里出现在 $f_x$ 和 $f_y$ 中的任意函数 $w$ 是利用方程 (6) 把它表示为 $x, y, u$ 的函数的.

这样得到的偏微分方程是一种特殊类型的, 即拟线性的方程, 因为它所含有的导数是线性的. 因此, 像 (6) 这样的函数集对于引出各种一阶微分方程尚不够一般.

不过, 如果由两个参数的函数族

$$u = f(x, y; \alpha, \beta)$$

出发, 而不用依赖于一个任意函数的函数集, 并做出导数

$$u_x = f_x(x, y; \alpha, \beta),$$
$$u_y = f_y(x, y; \alpha, \beta),$$

那么就有三个方程, 从它们通常都能消去 $\alpha$ 和 $\beta$(一定要 $f_{x\alpha} f_{y\beta} - f_{x\beta} f_{y\alpha} \neq 0$). 这样就得到偏微分方程 $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, 这方程一般说来, 对 $u_x$ 和 $u_y$ 不会是线性的.

上述这类限制得更窄了的解却引出了更一般类型的微分方程, 这个疑问将在 1.4 中解决.

1) 对于函数集

$$u = w(xy)$$

来说, 由方程

$$u_x = y w', \quad u_y = x w'$$

消去 $w'$, 就得到微分方程

$$x u_x - y u_y = 0.$$

若将 $x, y, u$ 解释为直角坐标, 则这集合中的每个函数在几何上都表示一张曲面, 这曲面与水平面的交线是等轴双曲线.

2) 一平面曲线绕 $u$ 轴旋转所产生的一切旋转曲面由

$$u = w(x^2 + y^2)$$

给出. 相应的微分方程是

$$y u_x - x u_y = 0.$$

3) 类似地,

$$xu_x + yu_y = 0$$

是由经过 $u$ 轴的水平直线所形成的直纹曲面 —— 即用

$$u = w(x/y)$$

所表示的曲面的微分方程.

4) 可展曲面是单参数平面族的包络. 一切可展曲面的微分方程是由这个定义推出的. 除垂直于 $x, y$ 平面的柱面外, 所有这种曲面都由函数

$$u = \alpha x + w(\alpha)y + v(\alpha) \tag{8}$$

给出, 其中 $\alpha$ 由方程

$$0 = x + w'(\alpha)y + v'(\alpha) \tag{9}$$

定义为 $x$ 及 $y$ 的隐函数. 因此 $u$ 以更隐晦的方式依赖于两个任意函数. 由 (8) 立即得到一阶导数 $u_x, u_y$:

$$u_x = \alpha,$$
$$u_y = w(\alpha),$$

故得

$$u_y = w(u_x). \tag{10}$$

为了消去任意函数 $w$, 再微分一次:

$$u_{yy} = w'u_{xy}, \quad u_{xy} = w'u_{xx};$$

得到

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \tag{11}$$

它就是所求的除去垂直于 $x, y$ 平面的柱面以外的一切可展曲面的微分方程.

在所有这些例子中, 容易证明反过来也是正确的, 即相应微分方程的一切解都属于给定的函数集.

5) 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一切 $\alpha$ 次的齐次函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 由对 $t$ 恒满足的条件

$$u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{12}$$

描绘出来. 若令 $t = \dfrac{1}{x_n}$, 则得

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n^\alpha u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right);$$

因此 $u$ 可用某个函数 $w$ 表示为

$$u = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \tag{13}$$

反之, 由于用 $n-1$ 个变元的一个任意函数所形成的每个这种函数 $u$ 都满足上面的齐性条件, 所以 (13) 式表示所有的 $\alpha$ 次齐次函数.

为了得到这个函数集的偏微分方程, 取方程 (13) 的关于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的导数并消去函数 $w$. 这就产生了 Euler 齐性关系式

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + \cdots + x_n u_{x_n} = \alpha u. \tag{14}$$

不过, 将方程 (12) 对 $t$ 微分并令 $t=1$ 就能直接得到关系式 (14).

反之, 函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的齐性关系式 (14) 意味着

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha} u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\right)\\ &= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\sum_{i=1}^{n} tx_i u_{tx_i}(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) - \alpha u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\right\} = 0,\end{aligned}$$

所以表达式 $u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)/t^\alpha$ 是不依赖于 $t$ 的函数, 因此它等于它在 $t=1$ 时的值, 这值就是 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 但根据 (12), 这就表明 $u$ 是齐次的.

## 1.2 微分方程组

### 1.2.1 微分方程组和单个的微分方程等价的问题

对于常微分方程来说, 单个微分方程的理论与微分方程组的理论是等价的. 对于偏微分方程来说情况就不同了.

二阶常微分方程

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

经过代换 $y' = z$ 后, 就能化为对于两个函数 $y(x), z(x)$ 的两个一阶微分方程所成的方程组

$$\left.\begin{aligned}&F(x, y, z, z') = 0,\\ &y' - z = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

微分方程 (1) 的每个解导致微分方程组 (2) 的一个解, 反之亦然. 一般说来, 对于两个函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的两个一阶常微分方程所成的组

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

都可化为对于一个函数 $y(x)$ 的一个二阶微分方程, 只要在所论域内, $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$. 这样就能够由方程 (3) 解出 $z'$ 和 $z$ 而成为

$$z' = \phi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y'). \tag{3a}$$

微分第二个方程并消去 $z'$ 就得到

$$\phi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0, \tag{3b}$$

这是一个只对 $y(x)$ 的二阶微分方程. 如果将这方程 (3b) 的解代入关系式 $z = \psi(x, y, y')$, 那么就得到相应的函数 $z$, 它和 $y$ 一起, 就是原来的方程组 (3) 或 (3a) 的解.

因此, 只要假定 $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$, 方程组 (3) 就确定等价于单个的微分方程.

现在考虑关于函数 $u(x, y)$ 的二阶偏微分方程

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{4}$$

作代换 $u_x = p, u_y = q$, 得到关于三个函数 $u, p, q$ 的三个一阶偏微分方程所成的组：

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y) = 0, \\ u_x - p = 0, \\ u_y - q = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

由这方程组的每个解 $u, p, q$ 所得到的 $u$ 就是微分方程 (4) 的一个解, 反之, 由 (4) 的每个解 $u$ 可导出 (5) 的一个解组 $u, u_x, u_y$.

**因此, 一个二阶偏微分方程等价于三个一阶微分方程所成的组** (不过是一个特殊形式的组).

**但反过来并不对**. 含两个一阶偏微分方程的方程组并不都等价于一个二阶微分方程[1], 更不用说含三个一阶微分方程的方程组了. 一般说来, 不能用微分法和消去法由对两个未知函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的含两个偏微分方程

$$\begin{array}{l} f(x, y, u, v, u_x, u_x, v_y, v_y) = 0, \\ g(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) = 0 \end{array} \tag{6}$$

的方程组得出一个只对 $u$ 的等价的二阶偏微分方程. 对 $x$ 和 $y$ 求导又得出四个方程. 为了用一个等价的对 $u$ 的二阶偏微分方程来代替方程组 (6), 必须从这六个方

[1] 不过, 在 1.7 中将见到, 对微分方程组加上某些限制解组的"初始条件", 就能得出这种等价性. 有关等价性的问题见第 1 章附录 II.

程消去六个量 $v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}$. 不过, 由六个方程消去六个量一般是不可能的, 举个反例就可说明①.

再微分并比较方程的个数和所要消去的量的个数, 我们看出, 无法找到代替方程组 (6) 的单独一个方程, 即使不限制它的阶数. 例如, 若再对这六个方程的每一个求导, 就得到十二个关系式, 要想得到一个只对 $u$ 的三阶微分方程, 必须消去十个量 $v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{xxx}, v_{xxy}, v_{xyy}, v_{yyy}$. 因为由十二个方程消去十个量往往得到两个独立的关系式, 所以, 除了特殊情形外, 消去的结果必然是单独对 $u$ 的两个不同的三阶方程② .

### 1.2.2 常系数线性方程组的消去法

值得注意的是, 与一般情况相反, 下面的定理对一种重要的特殊情形成立:

由任何含 $n$ 个未知函数的具有常系数的线性微分方程组③能够得到对任一个未知函数的具有常系数的单个的线性微分方程.

设 $u, v, w, \cdots$ 是自变量 $x, y, z, \cdots$ 的未知函数, 并设 $P_i, Q_i, \cdots$ 是微分符号 $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}, \cdots$ 的多项式, 例如

$$P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \cdots\right) = \sum \alpha^i_{\nu_1\nu_2\cdots} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\cdots}}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\nu_2}\partial z^{\nu_3}\cdots},$$

系数 $\alpha^i_{\nu_1\nu_2\cdots}$ 是常数, 那么方程组可形式地写作

$$\begin{aligned}
&P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \cdots\right)u + Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \cdots\right)v + \cdots = g_1(x, y, \cdots),\\
&P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \cdots\right)u + Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \cdots\right)v + \cdots = g_2(x, y, \cdots),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

右边的 $g_1, g_2, \cdots$ 是已知的. 现在使用形式的代数消去法 (Cramer 法则), 得到关于各个函数的微分方程:

$$Du = G^1, \quad Dv = G^2, \quad \cdots,$$

① 经过消去法和微分法不能导致一个二阶方程的这种方程组的一个例子是方程组 $u_x + v_y = -yu, u_y + v_x = y\nu$. 得到对一个 (超定的) 函数 $u$ 的两个三阶方程:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

② 参考上面的附注.

③ 定义见 1.2.3.

其中 $D$ 是符号 $P_i, Q_i, \cdots$ 的行列式, 而 $G^j$ 是函数 $g_\nu$ 的一个适当的符号线性组合. 显然 $D$ 是一个线性微分算子, 它的阶就是符号多项式 $D$ 的次数 (而 $D$ 的次数依赖于 $P_i, Q_i, \cdots$ 的次数). 符号 $G^j$ 表示对应于行列式 $D$ 的子式的微分算子. 在特殊情形下, 若原方程组是由 $n$ 个一阶方程组成的, 即若多项式 $P_i, Q_i, \cdots$ 是线性的, 则运算结果所得到的方程一般说来是 $n$ 阶的.

假定 $u$ 是运算结果所得较高阶方程之一的一个解, 那么将 $u$ 代入已给方程组后, 就可略去原方程之一, 因为这时方程组是相关的了. 于是就得到减少一个方程的关于 $v, w, \cdots$ 的方程组. 这个组可像原来的方程组一样处理, 并且经过消去法得到微分方程 $D^*v = G^{2*}$, 这里 $D^*$ 是行列式 $D$ 的一个子式. 循此继续做下去, 原方程组就可用阶数递减的独立方程的序列 $Du = G^1, D^*v = G^{2*}, \cdots$ 来代替.

### 1.2.3 适定的、超定的、欠定的方程组

两个自变量的偏微分方程组的一般形式是

$$\begin{aligned} &F_i(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(m)}, u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \cdots, u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, u_{xx}^{(1)}, \cdots) = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \cdots, h), \end{aligned} \tag{7}$$

就是由自变量 $x$ 和 $y$ 的 $m$ 个函数 $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(m)}$ 的 $h$ 个方程所构成的方程组. 假定这 $h$ 个方程是独立的, 就是说, 它们之中没有一个能从其他的方程经过微分法和消去法而推导出来.

若 $h = m$, 这方程组就称为适定的方程组; 若 $h > m$, 则方程组称为是超定的, 若 $h < m$, 则称为是欠定的.

两个函数 $u(x, y), v(x, y)$ 的 Cauchy-Riemann 微分方程

$$u_x - v_y = 0, \qquad u_y + v_x = 0$$

是适定的方程组的例子. 对于这个特殊的方程组经过微分法和消去法容易得出 $u$ 和 $v$ 分别满足的偏微分方程 $\Delta u = 0$ 和 $\Delta v = 0$(参考 1.1.1), 即 $u$ 和 $v$ 是“调和”函数.

对于一个函数 $u(x, y)$ 的超定方程组的最简单的例子是

$$u_x = f(x, y), \qquad u_y = g(x, y),$$

众所周知, 它当且仅当

$$f_y = g_x$$

时才能解. 由两个复变量

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \qquad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

的解析函数$f(z_1,z_2)$ 的理论提供了一个更有趣的例子. 表示函数 $f(z_1,z_2)=u+\mathrm{i}v$ 的解析性的 Cauchy-Riemann 微分方程组是

$$\begin{aligned} &u_{x_1}=v_{y_1}, \quad &u_{x_2}=v_{y_2},\\ &u_{y_1}=-v_{x_1}, \quad &u_{y_2}=-v_{x_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

经过微分之后, 这几个方程导致如下的对一个函数 $u$ 的超定方程组:

$$\begin{aligned} &u_{x_1x_1}+u_{y_1y_1}=0, \qquad &u_{x_1x_2}+u_{y_1y_2}=0,\\ &u_{x_2x_2}+u_{y_2y_2}=0, \qquad &u_{x_1y_2}-u_{x_2y_1}=0. \end{aligned} \tag{8a}$$

这个方程组是高度真超定的, 这件事表明多个复变量的函数的理论本质上比一个复变量的函数的古典理论复杂得多.

如果我们用关系式

$$x=\frac{x_2}{x_1}, \quad y=\frac{x_3}{x_1}, \quad \cdots$$

引入 $n+1$ 个"齐性变量" $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 来代替 $n$ 个变量 $x,y,\cdots$, 我们就得到超定方程组的第三个例子. 函数 $u(x,y,\cdots)$ 就变为函数 $\omega(x_1,x_2,\cdots)$, 它是新变量的零次齐次式, 所以, 它满足 Euler 的齐性关系式

$$x_1\omega_{x_1}+x_2\omega_{x_2}+\cdots=0.$$

函数 $u(x,y,\cdots)$ 关于 $x,y,\cdots$ 的一阶偏导数可用函数 $\omega(x_1,x_2,\cdots)$ 的导数表示出来:

$$\begin{aligned} u_x&=x_1\omega_{x_2},\\ u_y&=x_1\omega_{x_3},\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

因此, 已给的对 $u$ 的一阶偏微分方程

$$f(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots)=0$$

变为对函数 $\omega(x_1,x_2,\cdots)$ 的如下形式的一阶偏微分方程:

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,\omega_{x_1},\omega_{x_2},\omega_{x_3},\cdots)=0,$$

而齐性关系式

$$x_1\omega_{x_1}+x_2\omega_{x_2}+\cdots=0$$

是一个附加的方程. 代替一个微分方程, 我们得到两个方程组成的超定方程组. 如果我们引入齐性变量来变换微分方程组的话, 当然, 会得到类似的情形.

方程

$$u_x v_y - u_y v_x = 0$$

是表示两个函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的 Jacobi 式恒等于零的. 这方程是欠定方程组的一个例. 这方程蕴含着[1]在 $u$ 和 $v$ 之间有关系式

$$w(u,v) = 0,$$

这关系式不显含自变量 $x$ 和 $y$, 它就表示这个欠定微分方程组的“通解”[2]. 对于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 $n$ 个函数 $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}$ 来说, Jacobi 式为零:

$$\frac{\partial(u^{(1)}, \cdots, u^{(n)})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x_1} \cdots u^{(n)}_{x_1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ u^{(1)}_{x_n} \cdots u^{(n)}_{x_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

一般地表示 $n$ 个函数 $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}$ 之间有依赖关系:

$$w(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) = 0. \tag{10}$$

因此, 关系式 (10) 可以看做是欠定微分方程组 (9) 的通解. 以后, 在第 2 章和第 3 章中将回到解各种类型的欠定微分方程组的问题.

## 1.3　特殊微分方程的求积法

### 1.3.1　分离变量法

对于数学物理中的许多微分方程问题来说, 可用特殊的方法求得依赖于任意参数的解族, 不过这些方法不能直接给出全部解.

这些方法中最重要的是分离变量法. 这个方法将用一些例子来说明.

1) 考虑方程

---

① 参考 1.1.1 中例 5).

② 同样地, 表示由 $x, y$ 平面到 $u, v$ 平面的保积变换 (保持面积不变的变换) 的欠定方程 $u_x v_y - u_y v_x = 1$ 的解是

$$x = \alpha + \omega_\beta, \qquad u = \alpha - \omega_\beta,$$
$$y = \beta - \omega_\alpha, \qquad v = \beta + \omega_\alpha,$$

其中 $\omega$ 是满足下列条件的任意函数:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\alpha,\beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha}\omega_{\beta\beta} - \omega_{\alpha\beta}^2 \neq 0.$$

$$u_x^2 + u_y^2 = 1;$$

假定

$$u(x, y) = \phi(x) + \psi(y),$$

则得

$$(\phi'(x))^2 + (\psi'(y))^2 = 1$$

或

$$(\phi'(x))^2 = 1 - (\psi'(y))^2.$$

因为右边不依赖于 $x$ 而左边不依赖于 $y$, 所以两边都不依赖于 $x$ 也不依赖于 $y$, 即等于同一常数 $\alpha^2$; 因此立即得到含有两个任意参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的解族

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2} y + \beta. \tag{1}$$

2) 类似地, 对于三个变量 $x, y, z$ 的函数 $u$ 的微分方程

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

来说, 如果假定 $u = \phi(x) + \psi(y) + \chi(z)$, 则得到依赖于三个任意参数 $\alpha, \beta, \gamma$ 的解族

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z + \gamma. \tag{2}$$

3) 把这种试验性的假设

$$u = \phi(x) + \psi(y)$$

用于微分方程

$$f(x) u_x^2 + g(y) u_y^2 = a(x) + b(y),$$

像前面的例子一样, 得到

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a(\xi) + \alpha}{f(\xi)}} \mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} \sqrt{\frac{b(\eta) - \alpha}{g(\eta)}} \mathrm{d}\eta + \beta, \tag{3}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是任意常数.

4) 将自变量变换后, 往往能使变量分离. 例如, 将天体力学的二体问题中出现的对于 $u(x, y)$ 的方程

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{k}{r} - h \quad (r^2 = x^2 + y^2; \quad k, h\text{是常数}),$$

变换为对极坐标 $r, \theta$ 的函数 $u(r, \theta)$ 的方程

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2 = \frac{k}{r} - h \text{ 或 } r^2 u_r^2 + u_\theta^2 = kr - hr^2.$$

用公式 (3) 就得到依赖于两个任意参数 $\alpha, \beta$ 的解族

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{k}{\rho} - h - \frac{\alpha^2}{\rho^2}} \mathrm{d}\rho + \alpha\theta + \beta. \tag{4}$$

5) 在线性微分方程的情形中, 特别是对那些二阶的来说, 假设

$$u(x,y)=\phi(x)\psi(y)$$

往往是有用的 (在卷 I 第 5 章 5.3—5.9 中给出了几个例子). 对于传热方程

$$u_{xx}-u_y=0, \tag{5}$$

得到

$$\phi''(x):\phi(x)=\psi'(y):\psi(y),$$

所以左右两边必定都是常数. 可以假定这常数是正的, 也可以假定它是负的, 因此可用 $\nu^2$ 或 $-\nu^2$ 来表示. 于是就得到两个解族

$$u=a\ \sin\nu(x-\alpha)\mathrm{e}^{\nu^2}y,$$
$$u=a\ \sin\nu(x-\alpha)\mathrm{e}^{-\nu^2}y.$$

后者在数学物理中起着特殊的作用; 如果 $u$ 是温度, $y$ 是时间, $x$ 是空间坐标, 它就表示随着时间的推移而趋向零的温度分布.

### 1.3.2　用叠加法构造更多的解. 传热方程的基本解. Poisson 积分

由线性微分方程的含有参数的解, 用累加法、积分法和微分法可作出更多的解. 因为在卷 I 第 5 章中已给出许多这种例子, 这里只再讨论几个.

要想得到传热方程的另一个解, 将解 $\mathrm{e}^{-\nu^2}y\cos\nu x$ 对参数 $\nu$ 从 $-\infty$ 到 $\infty$ 积分, 就得到新的解

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\nu^2y}\cos\nu x\mathrm{d}\nu\quad(y>0).$$

容易算出右边的积分[①], 得到

$$u=\sqrt{\frac{\pi}{y}}\mathrm{e}^{-x^2/4y}, \tag{6}$$

---

① 为了算出这个积分, 作置换 $\nu^2y=\lambda^2$, 得到积分

$$\frac{1}{\sqrt{y}}J(a),\ 其中\ a=\frac{x}{\sqrt{y}}\ 而\ J(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2}\cos(a\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

为了定出 $J(a)$, 在积分号下微分以求出 $J'(a)$

$$J'(a)=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2}\lambda\sin(a\lambda)\mathrm{d}\lambda;$$

用分部积分法, 立即得到 $J'(a)=-aJ(a)/2$, 又由直接计算得知

$$J(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=\sqrt{\pi}.$$

由此得到 $J(a)=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-a^2/4}$, 因此 (6) 成立.

这就是传热方程的“基本解”.

作为叠加原理的第二个例子, 给出关于圆片 $r^2 = x^2 + y^2 < 1$ 上的势方程 $\Delta u = 0$ 的边值问题的解; 当 $r = 1$ 时, 已知 $u$ 的边界值为极角 $\theta$ 的 (连续可微) 函数 $g(\theta)$. 设:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\cos n\phi \mathrm{d}\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\sin n\phi \mathrm{d}\phi$$

是 $g(\theta)$ 的 Fourier 级数的系数, 则

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta)r^\nu \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu P_\nu(x,y) + b_\nu Q_\nu(x,y)) \end{aligned}$$

当 $r \leqslant q < 1$ 时一致收敛. 这个当 $r \leqslant q$ 时可逐项微分两次的级数表示 1.1.1 的例 8) 中所考虑的势函数 (位函数)$P_n$ 和 $Q_n$ 的叠加. 因此它是调和函数, 并且是边值问题的解. 在圆的内部可将求和与积分交换次序, 得到

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cos\nu(\theta - \phi)\right]\mathrm{d}\phi.$$

把 $2\cos\alpha$ 写作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ 并把这样得到的积分号下的几何级数加起来, 经过简单运算后, 就得到表达式

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2^r\cos(\theta - \phi) + r^2} g(\phi)\mathrm{d}\phi, \tag{7}$$

这就是用 Poisson 积分表示的边值问题的解 (参考第 4 章以及卷 I).

## 1.4 两个自变量的一阶偏微分方程的几何解释. 完全积分

### 1.4.1 一阶偏微分方程的几何解释

几何直观对于两个自变量的函数 $u(x,y)$ 的一阶偏微分方程的积分理论有着很大的帮助. 给定微分方程

$$F(x,y,u,p,q) = 0, \tag{1}$$

$F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, 这里采用了缩写符号 $p = u_x$, $q = u_y$. 对于通过坐标为 $x, y, u$ 的点 $P$ 的每张积分曲面来说, 确定该点处的切平面的位置的量 $p$ 和 $q$ 必定满足条件 (1). 积分曲面在点 $P$ 处的切平面[①]是限制在方程 (1) 所描述的流形的那些位置上的[②].

① 为了强调在所考虑的切平面上, 只有切点的近邻起作用, 最好是把切平面上的点 $P$ 连同 $P$ 的任意小邻域一起当做是“面元”, 并用这种面元来运算 (在常微分方程的情形下, 相仿地使用线元).

② 更详细的讨论, 参阅第 2 章 2.3.1.

对于已给点 $P:(x,y,u)$, 这种流形一般是一个单参数族 (例如, 对于 $p^2+q^2=1$ 来说, 这个族是具有参数 $t$ 的一个单参数族：$p=\cos t$, $q=\sin t$). 如果 $F$ 对 $p$ 和 $q$ 是线性的, 那么这族可能的切平面就形成通过所谓“Monge 轴”的这样一条直线的平面束. 现在撇下一阶“拟线性”方程这种特殊的情形, 将在 1.5 中讨论它, 姑且假定在所论的每个点 $P$ 处, 平面族包围成一个真正的锥, 即所谓“Monge 锥”[1]. 于是, 在 $x,y,u$ 空间的某域内, 微分方程在几何上可用“锥场”来表示, 恰像一阶常微分方程用方向场来表示一样. 寻求解就是寻求在其每点处切于相应的 Monge 锥 (或“适合”锥场) 的曲面.

像常微分方程的情形一样, 下述定理由几何摹想是显然的：如果微分方程 $F(x,y,u,p,q)=0$ 的依赖于一个参数 $a$ 的解族

$$u=f(x,y,a) \tag{2}$$

有一个包络, 那么这个包络也是一个解.

事实上, 积分曲面族的包络在每个点 $P$ 处的切平面都切于该点的 Monge 锥. 这个切平面和在 $P$ 处切于包络的曲面族中的积分曲面的切平面是相同的.

从解析方面来看, 可依如下方式证明这个命题：包络是由方程

$$f_a(x,y,a)=0 \tag{3}$$

将 $a$ 表示成 $x$ 和 $y$ 的函数然后将函数 $a(x,y)$ 代入 $f$ 而得到的; 因此包络的形式为

$$u=f(x,y,a(x,y))=\psi(x,y).$$

利用 (3), 得到

$$\psi_x=u_x=f_x+f_a a_x,\quad \psi_y=u_y=f_y+f_a a_y.$$

由此可知, $\psi(x_0,y_0),\psi_x(x_0,y_0),\psi_y(x_0,y_0)$ 的值在定点 $(x_0,y_0)$ 处分别与 $f(x,y,a_0)$, $f_x(x,y,a_0),f_y(x,y,a_0)$ 的值相同, 其中 $a_0=a(x_0,y_0)$. 由于函数 $u=f(x,y,a_0)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处满足微分方程, 所以函数 $u=f(x,y,a(x,y))=\psi(x,y)$ 也满足微分方程.

### 1.4.2　完全积分

1.3 中的例子指出了在一阶微分方程的情形下, 常常能得到依赖于任意参数的解. 在特殊情形下, 设两个自变量的函数 $u(x,y)$ 的微分方程 (1)

$$F(x,y,u,p,q)=0$$

有依赖于两个参数的解

[1] 以 Gaspard Monge(1746–1818) 的姓命名的.

$$u = \phi(x, y, a, b) \tag{4}$$

(如果 $u$ 不明显出现于 $F$ 中, 则由单参数解族 $u = \phi(x, y, a)$ 可立即导致依赖于两个参数的解族 $u = \phi(x, y, a) + b$).

如果在所论域中, 矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \phi_a & \phi_{xa} & \phi_{ya} \\ \phi_b & \phi_{xb} & \phi_{yb} \end{pmatrix}$$

的秩为2[①], 那么这个双参数解族就叫做 (1) 的完全积分, 特别地, 当行列式

$$D = \phi_{xa}\phi_{yb} - \phi_{xb}\phi_{ya} \tag{5}$$

不为零时, $M$ 的秩为 2.

"完全积分"概念的意义来源于如下的基本观点: 由于作包络, 也就是由于求导和消去的过程, 可从完全积分 (4) 得到微分方程(1) 的依赖于一个任意函数的解组[②]. 要作出这种解, 用一个任意函数, 例如 $b = w(a)$, 将两个独立参数 $a$ 和 $b$ 联系起来, 这样就从双参数族中选出了一个单参数族, 然后作出这个单参数族的包络. 把 $a$ 看做是由方程

$$\phi_a + \phi_b w'(a) = 0 \quad (b = w(a)) \tag{6}$$

得出的 $x$ 及 $y$ 的函数并把它代入

$$u = \phi(x, y, a, w(a)) = \psi(x, y).$$

在这儿作出附加假定: (6) 是能对 $a$ 解出的. 于是就得到依赖于一个任意函数 $w$ 的解流形 $\psi(x, y)$. 此外, 在刚才所描述的情况下, 1.1.2 中所提出的疑问也弄清楚了. 给出偏微分方程的一个双参数解族, 同时作出了依赖于一个任意函数的解组; 但是这个任意函数是如此复杂, 以致这个解组一般不能像 1.1.2 中那样表示出来.

在下一章对于一阶微分方程理论的系统论述中指明, 完全积分的理论能够推广到 $n$ 个自变量的函数的微分方程上面去, 并且它和一阶微分方程积分的一般理论是密切相关的.

---

① 这个条件肯定函数 $\phi$ 实质上依赖于两个独立参数. 因为如果引入一个适当的关系 $\gamma = g(a, b)$, 就得到 $\phi(x, y, a, b) = \psi(x, y, \gamma)$ 是依赖于一个参数 $\gamma$ 的话, 那么由关系式

$$\phi_{x_a} = \psi_{x\gamma}\gamma_a, \quad \phi_{xb} = \phi_{x\gamma}\gamma_b, \quad \phi_{ya} = \phi_{y\gamma}\gamma_a,$$

$$\phi_{yb} = \psi_{y\gamma}\gamma_b, \quad \phi_a = \psi_\gamma\gamma_a, \quad \phi_b = \psi_\gamma\gamma_b$$

立即推出上述矩阵的秩不是 2.

② 这个方法是否能得到全部解, 在这儿不予讨论. 下面的例子说明了做出一般命题的困难: 设 $F(x, y, u, p, q) = G(x, y, u, p, q)H(x, y, u, p, q)$, 并设 $\phi$ 是方程 $G = 0$ 的完全积分但不是 $H = 0$ 的解. 那么, 根据定义, $\phi$ 也是 $F = 0$ 的完全积分. 但还有 $F = 0$ 的一些解族 —— 即 $H = 0$ 的解 —— 不能作为包络由 $\phi$ 求出.

### 1.4.3 奇异积分

在 1.4.2 中, 用双参数族 $u=\phi(x,y,a,b)$ 中的单参数子族作出包络除了得到"一般"解外, 在作包络的过程中我们还能得到另外的解 ——奇异解. 因为, 双参数族 $u$ 可以有这样的包络[①], 它不含于由单参数子族所作出的包络之中. 这种包络, 是由下面的三个方程

$$\begin{aligned} &u=\phi(x,y,a,b),\\ &0=\phi_a,\\ &0=\phi_b, \end{aligned} \tag{7}$$

消去 $a$ 和 $b$ 而得到的, 它必然也是一个解, 这个解叫做 (1) 的"奇异"解. 应该注意到, 这里像常微分方程一样, 要求出奇异解并不需要完全积分的知识, 由微分方程经过微分法与消去法就能得到它们: 奇异解是由方程

$$F(x,y,u,p,q)=0,\quad F_p=0,\quad F_q=0 \tag{8}$$

消去 $p$ 和 $q$ 而得到的. 方程

$$F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)=0$$

对于 $a$ 和 $b$ 恒成立, 把它对 $a$ 和 $b$ 微分, 得到

$$F_u\phi_a+F_p\phi_{xa}+F_q\phi_{ya}=0,$$

$$F_u\phi_b+F_p\phi_{xb}+F_q\phi_{yb}=0.$$

在奇异积分曲面上, $\phi_a=\phi_b=0$, 所以, 对于这曲面上一切点有

$$F_p\phi_{xa}+F_q\phi_{ya}=0,\ F_p\phi_{xb}+F_q\phi_{yb}=0.$$

如果在这曲面上假定行列式

$$D=\phi_{xa}\phi_{yb}-\phi_{xb}\phi_{ya}$$

不为零, 那么方程

$$F_p=0,F_q=0$$

成立. 所以奇异积分的方程可由方程 (8) 消去 $p$ 和 $q$ 而得到.

由此可知, 奇异解可作为使得

$$F=F_p=F_q=0$$

的解而定出, 不必涉及特定的完全积分 (参考第 2 章 2.4).

① 不过, 这里应除去 $u$ 不明显出现在 $F$ 中的情形.

### 1.4.4 例

考虑函数

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1 \tag{9}$$

的双参数族, 即 $x,y,u$ 空间的半径为 1 中心在 $x,y$ 平面上的一切球. 这些函数构成微分方程

$$u^2(1+p^2+q^2)=1 \tag{10}$$

的一个完全积分. 若令 $b=w(a)$, 就从所有球中分出一个单参数族, 这个球族的中心位于 $x,y$ 平面的曲线 $y=w(x)$ 上, 那么这个族的包络, 即由

$$\begin{aligned}&(x-a)^2+(y-w(a))^2+u^2=1,\\&x-a+w'(a)(y-w(a))=0\end{aligned} \tag{11}$$

消去 $a$ 所得到的曲面就成为另一个解. 每一个这种包络都是以 $y=w(x)$ 为轴的管状曲面.

全部双参数族 (9) 还有由平面 $u=1$ 及 $u=-1$ 组成的另一个包络; 这可以直观地看出, 也可由

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1,\\x-a=0,\\y-b=0,\end{aligned} \tag{12}$$

消去 $a$ 和 $b$ 而解析地定出. 由于这二曲面满足微分方程 (10), 所以它们是 (10) 的奇异解. 如果由方程

$$\begin{aligned}F=u^2(1+p^2+q^2)=1,\\F_p=2u^2p=0,\\F_q=2u^2q=0\end{aligned} \tag{13}$$

消去 $p$ 和 $q$, 得到这两张曲面.

Clairaut 微分方程

$$u=xu_x+yu_y+f(u_x,u_y) \tag{14}$$

给出了另一个例子, 这方程常常在应用中遇到. 由双参数平面族

$$u=ax+by+f(a,b) \tag{15}$$

开始, 这里 $f(a,b)$ 是参数 $a$ 和 $b$ 的预先给定的函数. 由于 $u_x=a, u_y=b$, 所以这个平面族满足偏微分方程 (14). 这里 $D=1$(见公式 (5)), 因此 (15) 所给出的 $u$ 是 Clairaut 微分方程的完全积分.

为了得到这个方程的一般解，还是做包络：选取任意函数 $b = w(a)$，由方程

$$
\begin{aligned}
u &= ax + yw(a) + f(a, w(a)),\\
0 &= x + yw'(a) + f_a + f_b w'(a)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

消去 $a$.

Clairaut 方程的奇异解是重要的. 它是双参数族 (15) 的包络, 也就是由方程

$$
\begin{aligned}
u &= ax + by + f(a, b),\\
x &= -f_a,\\
y &= -f_b
\end{aligned}
\tag{17}
$$

消去 $a$ 和 $b$ 而得出的. 如果将微分方程 (14) 对 $u_x = p, u_y = q$ 求导, 则由 1.4.3 的法则导致同样的公式 (与 1.6.3 比较, 那里讲出了不同的观点).

## 1.5　一阶线性和拟线性微分方程的理论

### 1.5.1　线性微分方程

考虑关于 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的形如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a \tag{1}$$

的偏微分方程. 若 $a_i$ 和 $a$ 只是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的已知的连续可微函数, 则 (1) 称为线性微分方程; 更一般地, 若 $a_i$ 和 $a$ 还依赖于未知函数 $u$ 本身, 则称方程是拟线性的. 在本节中证明这种拟线性偏微分方程的理论等价于一个常微分方程组的理论 (参考第 2 章 2.2).

首先讨论齐次线性微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0 \tag{1a}$$

这一特殊情形.

在变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 $n$ 维空间中, 用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

定出以参量 $s$ 表示的曲线 $x_i = x_i(s)$. 这些曲线叫做**特征曲线**(将与第 2 章 2.2 中给出的拟线性微分方程的论述联系起来讨论特征曲线的一般意义). 在 $n = 2$ 的情

形下, 它们是与 1.4.1 中所提到的 (由 Monge 锥退化而成的) Monge 轴相切的那些曲线.

回忆一下有关常微分方程的一些结论. 在 (2) 中引用量 $x_i$ 之一代替 $s$ 作为自变量, 可将所得方程组的依赖于 $n-1$ 个参数 $c_i$ 的一般解表示为

$$c_i = \phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2 \cdots, n-1).$$

这里 $c_i$ 是任意的积分常数, 而 $\phi_i$ 是方程组的互相独立的“积分”. “积分”$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在这儿是自变量 $x_i$ 的这种函数, 它沿着由组 (2) 解出的每一条曲线 $x_i(s)$ 的值为常数.

方程 (1a) 表示：对于偏微分方程的解 $u$ 沿着常微分方程组的一条积分曲线的值 $u(s) = u[x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s)]$ 来说, 关系式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3}$$

成立. 因此, 沿着常微分方程组(2)的每条积分曲线, 偏微分方程(1a)的每个解的值为常数, 即不依赖于 $s$. 偏微分方程 (1a) 的每个解都是常微分方程组 (2) 的一个积分.

另一方面, 常微分方程组 (2) 的每个积分

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

都是偏微分方程 (1a) 的一个解; 将这个积分中的 $x_i$ 用组 (2) 的任何解 $x_i(s)$ 代入, 并将 $\phi$ 对 $s$ 微分, 即可证实 (1a) 沿着每条积分曲线 $x_i(s)$ 成立. 对于 $x$ 空间的适当范围的域内每一点有积分曲线中的一条经过, 因此 $\phi$ 在此域内对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒满足微分方程 (1a).

在微分方程组 (2) 的每 $n$ 个积分的集合

$$\phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

中, 有一个形如

$$\omega(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) = 0 \tag{4}$$

的关系式成立. 因为对于系数 $a_\nu$ 不全为 0 的方程

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

来说, 仅当行列式

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \tag{5}$$

等于零时才能成立. 但是, 这个条件是对于形如 (4) 的关系式成立的充分条件. 另一方面, 根据常微分方程理论中的基本存在定理, 方程组 (2) 有 $n-1$ 个互相独立的积分 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$, 使得每个积分 $\phi$ 必定具有形式:

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = w(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}). \tag{6}$$

反之, 由于每个函数 $w(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1})$ 沿着 (2) 的每条积分曲线是常数, 因而它本身是 (2) 的一个积分, 所以偏微分方程 (1a) 的一切解都可表示为 (6) 的形式, 其中 $w$ 是 $n-1$ 个变元的任意函数.

反之, 常微分方程 (2) 的解可用偏微分方程的 $n-1$ 个互相独立的解

$$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$$

表出; 例如, 可用由方程组 $\phi_\nu = c_\nu$ 算出的 $n-1$ 个量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 作为它们的解, 这 $n-1$ 个量是自变量 $x_n$ 和参数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 的函数.

### 1.5.2 拟线性微分方程

当微分方程 (1) 是拟线性的且具有非零的右端

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$$

时, 这种一般情形并不太难, 只要增加一个自变量 $x_{n+1}$ 就能把它化成齐次线性微分方程的情形, 这样就完全可以解决了 (这种化法在本书中以后也是有用的). 引入 $u = x_{n+1}$ 作为新的自变量, 如果允许所要求的 (1) 的解用隐式 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = 0$ 表出, 或更一般地, 用常数 $c$ 表示为

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = c, \tag{7}$$

那么问题就化为求 $\phi$ 了. 因为 $\phi_{x_i} + \phi_{x_{n+1}} u_{x_i} = 0$, 所以 $\phi$ 必定满足偏微分方程

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu \phi_{x_i} = 0, \tag{8}$$

这里, $a(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) = a_{n+1}$. 这个关系式的形式恰是对于 $n+1$ 个变量的函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 的线性齐次微分方程. 不过, 有一点儿概念性的困难: 方程 (8) 不需要对 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 恒成立, 因为它只是从满足关系式 $\phi = 0$ 或 $\phi = c$ 的那些 $x_i$ 值得出的. 从这个观点出发, (8) 还不是一个线性齐次偏微分方程. 但是, 如果不考虑原来微分方程的单个解, 而考虑依赖于参数 $c$ 的单参数解族并用 $\phi = c$ 给

出的话, 那么方程 (8) 必须对 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的所有值成立, 就是说, 它确实是上面讨论过的那种类型的线性微分方程. 如果任选

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$$

并取由 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = c$ 给出的值 $c$, 那么由于 (8) 必须对 $c$ 的这个值成立, 所以它对 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 恒成立.

反之, 求出 (8) 的一个解 $\phi$, 并令 $\phi = c$, 则得到 (1) 的一个单参数解族.

因此证明了在 (8) 的解与原方程 (1) 的单参数解族间存在着一一对应关系. 这表明一般拟线性微分方程 (1) 的积分等价于常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = a \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

的积分.

## 1.6 Legendre 变换

### 1.6.1 对于二元函数的 Legendre 变换

有几种微分方程的求积问题可用"Legendre 变换"把它们大大简化. 这种变换是根据微分方程的几何解释提出来的, 为此, 把积分曲面用它的切平面坐标来表示而不用点坐标来表示[①].

描述 $x, y, u$, 空间的曲面, 有两种可能的办法, 或者把曲面作为由函数 $u(x, y)$ 所确定的点集给出, 或者把它看做是它的切平面的包络, 即建立这样一个方程, 它能为切于曲面的平面所满足. 如果 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}$ 是方程为

$$\bar{u} - \xi\bar{x} - \eta\bar{y} + \omega = 0$$

的平面的流动坐标, 那么就把 $\xi, \eta, \omega$ 叫做这个平面的平面坐标. 因为和曲面 $u(x, y)$ 切于点 $(x, y, u)$ 的平面的方程为

$$\bar{u} - u - (\bar{x} - x)u_x - (\bar{y} - y)u_y = 0,$$

所以它的平面坐标是

$$\xi = u_x, \eta = u_y, \omega = xu_x + yu_y - u.$$

现在, 如果 $\omega$ 是 $\xi$ 和 $\eta$ 的已知函数, 那么它表示出了双参数切平面族, 因而所考虑的曲面也就确定了. 利用方程

$$\xi = u_x, \eta = u_y$$

①参考卷 I.

定出 $x$ 和 $y$ 为 $\xi, \eta$ 的函数, 并把它们代入方程

$$\omega = xu_x + yu_y - u = x\xi + y\eta - u$$

就能从 $u(x,y)$ 求出函数关系 $\omega(\xi,\eta)$.

反之, 要想由切平面坐标定出点坐标, 得做出函数 $\omega(\xi,\eta)$ 的偏导数. 由于 $\xi = u_x, \eta = u_y$, 立即得到

$$\omega_\xi = x + \xi\frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x\frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y\frac{\partial y}{\partial \xi} = x.$$

相仿地,

$$\omega_\eta = y.$$

因此得到一组公式:

$$\begin{gathered}\omega(\xi,\eta) + u(x,y) = x\xi + y\eta,\\ \xi = u_x, \eta = u_y,\\ x = \omega_\xi, y = \omega_\eta,\end{gathered} \tag{1}$$

它们表示出点坐标与切平面坐标间的关系的对偶性质.

曲面由点坐标到平面坐标的变换叫做对于二元函数的 Legendre变换. 它和单纯的坐标变换有本质上的区别. 因为坐标变换只是对一个点配给另一个点, 而组 (1) 却是对每个面元 $(x,y,u,u_x,u_y)$ 配给一个面元 $(\xi,\eta,\omega,\omega_\xi,\omega_\eta)$.

如果 $u_x = \xi, u_y = \eta$ 这两个方程对 $x$ 和 $y$ 能解出的话, Legendre 变换总是办得到的, 而这二方程当 Jacobi 式

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \rho \tag{2}$$

对于所论曲面上的点不为零时是可解的. Legendre 变换对于满足微分方程

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

的曲面, 即对可展曲面显然是失效的. 这个结论可从几何上直接看出来. 根据定义, 可展曲面具有单参数切平面族, 这些切平面是沿着直线与曲面相切的, 而不只是各在一点处相切的, 因此不可能在曲面的点与切平面之间建立起一一对应关系.

最后, 为了将 Legendre 变换用于二阶微分方程, 算出对函数 $u(x,y)$ 和 $\omega(\xi,\eta)$ 的二阶导数的变换. 为此目的, 设想方程 $\xi = u_x, \eta = u_y$ 中的变量 $x$ 和 $y$ 已经用关系式 $x = \omega_\xi, y = \omega_\eta$ 表示为 $\xi$ 和 $\eta$ 的函数了. 将 $\xi = u_x, \eta = u_y$ 对 $\xi$ 及 $\eta$ 微分, 得到

$$1 = u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta},$$

$$0 = u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta},$$

$$0 = u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta},$$

$$1 = u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta},$$

或用矩阵记号, 写作

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\xi\xi} & \omega_{\xi\eta} \\ \omega_{\xi\eta} & \omega_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果为了简便起见, 令

$$\begin{aligned} \omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\rho}, \\ u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= \rho, \end{aligned} \tag{3}$$

则得

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= -\rho\omega_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= \rho\omega_{\xi\xi}. \end{aligned} \tag{4}$$

### 1.6.2 对于 $n$ 元函数的 Legendre 变换

为完整起见, 阐述一下 $n$ 个自变量的函数的 Legendre 变换. 它是由下列公式组给出的.

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \omega(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n,$$

$$\begin{aligned} u_{x_1} = \xi_1,\ u_{x_2} = \xi_2, \cdots, u_{x_n} = \xi_n, \\ \omega_{\xi_1} = x_1,\ \omega_{\xi_2} = x_2, \cdots, \omega_{\xi_n} = x_n. \end{aligned} \tag{5}$$

为了给出二阶导数的变换公式, 将矩阵

$$\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} \cdots u_{x_1x_n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ u_{x_nx_1} \cdots u_{x_nx_n} \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} \omega_{\xi_1\xi_1} \cdots \omega_{\xi_1\xi_n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \omega_{\xi_n\xi_1} \cdots \omega_{\xi_n\xi_n} \end{pmatrix}$$

中元素 $u_{x_ix_k}, \omega_{\xi_i\xi_k}$ 的余因式用 $U_{ik}$ 和 $\Omega_{ik}$ 来表示, 并将这二矩阵的行列式用 $U$ 和 $\Omega$ 来表示. 于是变换公式就成为

$$u_{x_ix_k} = \frac{\Omega_{ik}}{\Omega}, \quad \omega_{\xi_i\xi_k} = \frac{U_{ik}}{U} \tag{6}$$

且 $\Omega U = 1$.

Legendre 变换能够应用的条件是 $U \neq 0$(或 $\Omega \neq 0$), 这是容易验证的.

### 1.6.3　Legendre 变换在偏微分方程上的应用

考虑一个最多是二阶的偏微分方程

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0. \tag{7}$$

利用 Legendre 变换, 把函数 $\omega(\xi,\eta)$ 配给这个方程的积分曲面 $u(x,y)$, 于是方程 $F=0$ 就变成函数 $\omega$ 的也最多是二阶的微分方程:

$$G=F(\omega_\xi,\omega_\eta,\xi\omega_\xi+\eta\omega_\eta-\omega,\xi,\eta,\rho\omega_{\eta\eta},-\rho\omega_{\xi\eta},\rho\omega_{\xi\xi})=0, \tag{8}$$

其中

$$\rho=\frac{1}{\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta}-\omega_{\xi\eta}^2}.$$

不过, 这个微分方程一般只产生原微分方程的非可展积分曲面, 因为 Legendre 变换对可展曲面是不能用的.

特别是在一阶偏微分方程的情形下, 当变量 $x,y$ 及 $u$ 以简单的形式出现而导数 $u_x,x_y$ 以较复杂的形式出现时, Legendre 变换是适用的.

作为例子, 考虑方程

$$u_xu_y=x, \tag{9}$$

经 Legendre 变换后这方程变为

$$\xi\eta=\omega_\xi; \tag{10}$$

它的解可立即用

$$\omega=\frac{1}{2}\xi^2\eta+\omega(\eta)$$

给出. 根据变换公式, 得到

$$\begin{aligned}
&x=\xi\eta,\\
&y=\frac{1}{2}\xi^2+w'(\eta),\\
&u=\xi^2\eta+\eta w'(\eta)-w(\eta).
\end{aligned} \tag{11}$$

如果从这三个方程消去 $\xi$ 及 $\eta$, 就得到已给微分方程的解[①].

① 但是, 失去了表达式 $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$ 等于零的解. 将方程 $u_xu_y=x$ 对 $x$ 和 $y$ 微分, 得到

$$u_{xx}u_y+u_{xy}u_x=1,$$

$$u_{xy}u_y+u_{yy}u_x=0.$$

这是一个非齐次方程组, 它的行列式 $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$ 仅当 $u_{xy}=u_{yy}=0$ 时才能为零. 由此得知失去的解必定具有形式

$$u=ay+\frac{1}{2a}x^2+b.$$

其中 $a$ 和 $b$ 是任意常数. 事实上, 这个表达式组成 (9) 的一个完全积分, 用 1.4.2 的方法并引入适当的参数就可由它得到 (11).

另一个例子是微分方程

$$u_x u_y = 1. \tag{12}$$

根据 Legendre 变换, 它变成

$$\xi\eta = 1.$$

这个方程已经不是微分方程, 因此变换在这里是无效的. $u_x u_y = 1$ 的一切解是可展曲面. 这个事实通过将方程对 $x$ 和 $y$ 微分：

$$\begin{aligned} u_{xx}u_y + u_{xy}u_x = 0, \\ u_{xy}u_y + u_{yy}u_x = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

就可立即肯定. 由于 $u_x u_y = 1$, 所以 $u_x = u_y = 0$ 的可能性是没有的, 因而每个积分曲面 $u(x,y)$①必定满足条件

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0.$$

同样, Legendre 变换对每个形如

$$F(u_x, u_y) = 0 \tag{14}$$

的微分方程失效.

用 1.4.4 中曾经考虑过的 Clairaut方程

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y) \tag{15}$$

作为第三个例子. 根据 Legendre 变换, (15) 变成简单方程

$$\omega = -f(\xi, \eta). \tag{16}$$

由此可知, 仅仅 Clairaut 微分方程的非可展积分曲面是用方程 (16) 表示的, 或用点坐标表示为

$$\begin{aligned} x &= -f_\xi(\xi,\eta), \\ y &= -f_\eta(\xi,\eta), \\ u &= f - \xi f_\xi - \eta f_\eta. \end{aligned} \tag{17}$$

下面的计算证实了这个结论：将微分方程 (15) 微分, 得到公式

$$(x + f_p)u_{xx} + (y + f_q)u_{xy} = 0,$$

① 附带说一下, 微分方程 (12) 可用代入 $x = \frac{1}{2}z^2$ 化为形式 (9), 因此可解出. 其完全积分为

$$u = ax + \frac{1}{a}z + b.$$

$$(x+f_p)u_{xy}+(y+f_q)u_{yy}=0$$

(其中 $p=u_x, q=u_y$). 由此可知, 对于积分曲面来说, 或者

$$D=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0$$

或者

$$x=-f_p, y=-f_q.$$

但是后面这种情形恰好产生由 Legendre 变换所得到的那种例外的曲面.

作为另一个例子, 考虑极小曲面的二阶微分方程 (参考卷 I)

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0, \tag{18}$$

它对于 $u(x,y)$ 的导数不是线性的. 这个明显的困难可用 Legendre 变换把 (18) 变成线性微分方程

$$(1+\eta^2)\omega_{\eta\eta}+2\xi\eta\omega_{\xi\eta}+(1+\xi^2)\omega_{\xi\xi}=0 \tag{19}$$

而得以克服. 后面 (参考本章附录 I 第 3 章 3.1.4 及卷 III) 将考虑把微分方程 (18) 线性化的其他方法, 它们将产生一条通向极小曲面理论的简捷路径.

Legendre 变换的一种相仿的重要应用①出现在流体力学中：用两个速度分量 $u$ 和 $v$ 来描述二维可压缩流体的定常流, $u, v$ 是直角坐标 $x, y$ 的函数. 设声速 $c$ 是 $u^2+v^2$ 的已给函数. 这运动由一阶方程组

$$u_y-v_x=0,$$

$$(c^2-u^2)u_x-uv(u_y+v_x)+(c^2-v^2)v_y=0$$

来限定. 于是可知, 存在一个速度势 (速度位)$\phi(x,y)$, 使得

$$u=\phi_x, v=\phi_y$$

以及

$$(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}-2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}=0.$$

处理这个二阶非线性微分方程的关键是 legendre 变换

$$\varPhi+\phi=ux+vy,$$

$$\phi_x=u, \phi_y=v,$$

① 参考第 5 章及 R. Courant and K. O. Friedrichs 著 [1] 第 247—249 页.

$$\Phi_u = x, \quad \Phi_v = y$$

它导致对 $\Phi(u,v)$ 的二阶线性微分方程

$$(c^2-u^2)\Phi_{vv}+2uv\Phi_{uv}+(c^2-v^2)\Phi_{uu}=0,$$

这方程对许多流动问题的求解是有用的①.

## 1.7 Cauchy 和 Kowalewsky 存在定理

### 1.7.1 引言和例

讨论一个基本定理来结束这一章, 这定理肯定了偏微分方程解的存在, 同时阐明了任意函数进入“一般”解中的状态, 定理是由 Cauchy 给出的, 他创始了偏微分方程的现代理论. Sophie Kowalewsky 受了 Weierstrass 的启示, 在她的论文中用更一般的方式做出了证明②.

定理是针对“初值问题”的, 就是将要经常说到的“Cauchy 问题”. 它是限制在微分方程和初始数据以及解都是解析的假设之下的, 并且是针对 $n+1$ 个自变量 $x$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 的 $m$ 个未知函数 $u^1,u^2,\cdots,u^m$(有时也写作 $u_1,u_2,\cdots,u_m$) 的 $m$ 个 $k$ 阶偏微分方程所成的组的. 假定这个组写成了对变量 $x$ 的“标准”形式:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^i = f_i\left(x,y_1,\cdots,y_n,\frac{\partial u^1}{\partial x},\cdots,\frac{\partial^k u^m}{\partial y_n^k}\right), \tag{1}$$

其中函数 $f_i$ 在以量 $x,y_1,y_2,\cdots,\dfrac{\partial^k u^m}{\partial y_n^k}$ 为变量的多维空间的某域内是这些量的**解析**函数 (这就是说, 它们可展成对所有这些变量的幂级数, 这级数在一个适当小的域, 例如可假定是包含原点 $x=0,y_i=0,u_i=0$ 的某个区域内是收敛的). 在“初始平面” $x=0$ 上, 原点 $y_i=0$ 的一个适当小的领域内给定变量 $y_1,\cdots,y_n$ 的 $km$ 个任意的解析函数 $\phi_{i,k}(y_1,\cdots,y_n)(i=1,\cdots,m;k=0,\cdots,k-1)$. 这时 Cauchy 问题就是求方程组 (1) 的在 $x=0$ 上取得初始值

$$u^i(0,y_1,\cdots,y_n)=\phi_{i,0}(y_1,\cdots,y_n),\cdots,$$
$$\frac{\partial^{n-1}u^i}{\partial x^{n-1}}(0,y_1,\cdots,y_n)=\phi_{i,n-1}(y_1,\cdots,y_n)$$

的解. 总得想着这个初始问题只是在小范围内 (在 $x=0,y_i=0$ 的足够小的邻域内) 提出的.

① 这种变换可由反转函数组 $u(x,y),v(x,y)$, 即将 $x,y$ 表示为自变量 $u,v$ 的函数而直接得出. 这种方法常称为“速端图”法, 因为它以速度向量 $u,v$ 的平面, 即所谓“速端平面”作为参考系统 (见第 5 章 5.2).

② 参考 J. Hadamard[2] 第 11 页的脚注. J.Hadamard 参考 A. Cauchy, S. Kowalewsky, G. Darboux 和 E. Goursat.

现将主要定理叙述如下：Cauchy问题有且只有一个解析解$u^1, u^2, \cdots, u^m$.

假定 $k=1$, 即考虑一阶方程组就够了. 并且, 将只对 $n=1$ 的情形 (即只对两个自变量 $x, y$ 的情形) 作出讨论, 因为对于更多的自变量来说不需要做什么修改.

一般说来, 化方程组为标准形式 (1) 是能够做到的. 不过, 在 1.7.5 中将看到还有重要的例外情形, 是不能化为这种形式的①.

为了证明这个定理, 先形式地做出级数解, 然后证明这些级数的一致收敛性.

在给出一般的讨论之前, 先来看几个例子.

对于带有常数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的微分方程

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

来说,

$$u = w(\alpha y - \beta x)$$

给出了全部解, $w$ 是任意函数. 现在假定初始值 $u(0, y) = \phi(y)$ 是任意指定的, 那么令 $x=0$ 就确定了函数 $w$, 得到解 $u = \phi\left(y - \dfrac{\beta x}{\alpha}\right)$.

更一般地, 考虑非线性微分方程

$$\alpha(u)u_x + \beta(u)u_y = 0$$

(参考 1.1.1 中例 5)) 假定系数 $\alpha$ 和 $\beta$ 依赖于未知函数 $u$. 这里初值问题是给定了 $u(0, y) = \phi(y)$ 而求满足这条件的解.

前面已经得知, 这微分方程的全部解由 $\alpha(u)y - \beta(u)x = w(u)$ 给出, 其中 $w$ 是任意函数. $w$ 仍由初始条件求出. 将 $x=0$ 及 $u=\phi(y)$ 代入, 得到 $w(\phi) = \alpha(\phi)y$; 若函数 $u=\phi(y)$ 的反函数为 $y=\chi(u)$, 则由关系式 $w(\phi) = \alpha(\phi)\chi(\phi)$ 定出了任意函数 $w$. 因此, 所求的解满足 $\alpha(u)y - \beta(u)x = \alpha(u)\chi(u)$ 或等价的关系式

$$u = \phi\left(y - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)}x\right).$$

如果由这个隐式方程决定了函数 $u(x, y)$, 那么就得到了初值问题的解 (在本节 1.7.4 中, 将讨论一种特殊情形, 它对以后的应用是重要的).

对于二阶微分方程 $u_{xy} = f(x, y)$ 来说, 1.1.1 的公式 (2) 中三角形域上的积分是初值问题的解.

---

① Cauchy 初值问题是一个最自然的问题 (恰像在常微分方程中, 它可以说明任意积分常数的出现一样), 这一点由微分方程 (1) 的根本意义来看就是很明显的. 由这些方程, 根据初始数据以及从它们推知的各阶 $y$ 导数, 可以表示出数据中未曾给出的那一个导数, 将看到, 这种做法也为寻求未知函数在原点的一切导数开辟了道路.

最简单的振动微分方程

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

的初值问题：若对于 $x = 0$, 初始条件 $u(0, y) = \phi(y)$ 和 $u_x(0, y) = \psi(y)$ 是任意指定了的, 求 $u$(参考卷 I, 第 5 章 5.3). 由这微分方程的一般解 $u = f(y + x) + g(y - x)$, 依照关系式 $f(y) + g(y) = \phi(y), f'(y) - g'(y) = \psi(y)$ 使之符合初始条件, 得到函数 $f$ 和 $g$ 的特定形式, 即

$$2u(x, y) = \phi(y + x) + \phi(y - x) + \int_{y-x}^{y+x} \psi(\lambda) \mathrm{d}\lambda.$$

在叙述一般的初值问题时, 假定微分方程可就未知函数对$x$的最高阶导数解出.

例如考虑一阶微分方程

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{2a}$$

(其中 $p = u_x, q = u_y$) 时, 假定方程 (2a) 能就 $p$ 解出, 取得形式

$$p = f(x, y, u, q). \tag{2}$$

这时初值问题是寻求 (2) 的这种解 $u(x, y)$, 它在 $x = 0$ 时变成给定的函数 $u(0, y) = \phi(y)$; 从几何上来说, 这就是要求出与平面 $x = 0$ 相交于已给的初始曲线 $u = \phi(y)$ 的积分曲面.

可提出更一般的问题：求 $F(x, y, u, p, q) = 0$ 的通过已给空间曲线 $u = \phi(y), x = \psi(y)$ 的积分曲面. 如果引入 $\xi = x - \psi(y)$ 及 $\eta = y$ 作为新自变量以代 $x$ 和 $y$, 令

$$u(x, y) = u(\xi + \psi(\eta), \eta) = \omega(\xi, \eta),$$

则微分方程变为

$$F(\xi + \psi(\eta), \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta - \psi' \omega_\xi) = G(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta) = 0,$$

带有初始条件 $\omega(0, \eta) = \phi(\eta)$. 于是, 更一般的问题就化成了原先考虑过的特殊形式的问题, 现在将限于考虑这种特殊形式的问题.

考虑二阶微分方程

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{3a}$$

缩写符号

$$r = u_{xx} = p_x, \quad s = u_{xy} = p_y = q_x, \quad t = u_{yy} = q_y$$

将常常用到. 假定在这些变元的所论及的域内, 这方程可就 $r$ 解出, 即可写成如下的形式：

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t). \tag{3}$$

这个微分方程的初值问题是, 寻求当 $x = 0$ 时具有给定的 $u$ 和 $u_x$ 的初始值

$$u(0, y) = \phi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y) \tag{4}$$

的解 $u(x, y)$. 在一阶微分方程中有一个任意的初始函数 $\phi(y)$, 而这里有两个任意指定的函数 $\phi(y)$ 和 $\psi(y)$.

对于高阶微分方程或对于微分方程组可提出类似的问题. 特别地, 要考虑对于未知函数 $u_i(x, y)$(有时也用 $u^i(x, y)$ 表示) 的一阶微分方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i\left(x, y, u_1, \cdots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{5}$$

并具有任意指定的初始值

$$u_i(0, y) = \phi_i(y).$$

在证明了这些初值问题都有唯一确定的解之后, 将弄清在一般解中任意函数的出现.

### 1.7.2　化为拟线性微分方程组

上述各种初值问题都可化成一阶拟线性微分方程组的等价问题. 曾经强调指出, 微分方程组的全部解一般说来不等价于单个方程的解组. 不过, 如果把微分方程和适当的附加初始条件一块儿考虑而不是单独考虑微分方程的话, 将看到, 它们是等价的. 拟线性微分方程组比原来的微分方程有更多种类的解, 但要这样来限制初始条件, 使得两个初值问题的解组完全重合.

首先对一阶微分方程 (2) 给予化简. 注意在指定了 $u(0, y) = \phi(y)$ 时, 初始值 $q(0, y) = \phi'(y)$ 也自然地被指定了. 还有, 由微分方程 (2) 可得到 $p$ 的初始值, 即

$$p(0, y) = f(0, y, \phi(y), \phi'(y)).$$

将方程 (2) 对 $x$ 微分, 得到对于量 $u, p, q$ 的一阶拟线性偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned} u_x &= p, \\ q_x &= p_y, \\ p_x &= f_x + f_u p + f_q p_y \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

和初始条件

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \phi(y), \\ q(0, y) &= \phi'(y), \end{aligned} \tag{7}$$

$$p(0, y) = f(0, y, \phi(y), \phi'(y)).$$

可以肯定这个初值问题是和原来的初值问题等价的.

要证实这个命题, 只需证明方程组 (6), (7) 的解 $u, p, q$ 满足方程

$$p = f(x, y, u, q), \quad u_x = p, \quad u_y = q$$

就行了. 因为根据 (6) 中 $p_y = q_x$, 故有

$$u_{xy} = q_x,$$

把它对 $x$ 积分, 得

$$u_y(x, y) = q + v(y).$$

令 $x = 0$ 并留意初始条件 (7), 得到

$$u_y = q$$

对一切 $x$ 及 $y$ 成立, 因为由 $\phi'(y) = u_y(0, y)$, 必然得出 $v(y) = 0$. 再根据 (6)

$$u_{xx} = p_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, u, q),$$

因此积分后得

$$u_x = f(x, y, u, q) + a(y).$$

但因 $u_x = f$ 对 $x = 0$ 成立, 故知 $a(y) = 0$, 因而 $u_x = f(x, y, u, u_y)$, 即 $u(x, y)$ 是原问题的解.

相仿地, 具有两个初始条件 (4) 的二阶微分方程 (3) 的初值问题可换成自变量 $x, y$ 的六个函数 $u, p, q, r, s, t$ 的下列微分方程组的等价初值问题：

$$\begin{aligned}
&u_x = p, q_x = p_y, p_x = r, \\
&s_x = r_y, t_x = s_y, \\
&r_x = f_x + f_u p + f_p r + f_q p_y + f_s r_y + f_t s_y,
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
&u(0, y) = \phi(y), p(0, y) = \psi(y), q(0, y) = \phi'(y), \\
&t(0, y) = \phi''(y), s(0, y) = \psi'(y), \\
&r(0, y) = f(0, y, \phi(y), \psi(y), \phi'(y), \psi'(y), \phi''(y))
\end{aligned}$$

是初始条件. 由原问题的已知初始数据 $\phi,\psi$ 并由微分方程, 立即得出 $q,t,s,r$ 的合适的初始数据. 像前面一样, 能证明 $p,q,r,s,t$ 与导数 $u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}$ 重合, $u$ 和 $u_x$ 取得给定的初始值 (4), 并且微分方程 (3) 得到满足.

同样, 可用一阶拟线性微分方程组来代替高阶微分方程或方程组.

上面得到的拟线性微分方程组, 在右边的系数中含有自变量 $x$ 和 $y$. 用一点儿技巧把它变成另一个其中不显含自变量 $x,y$ 并对导数是齐次的等价拟线性微分方程组就方便了. 为此目的, 用方程

$$\xi_x=\eta_y,\quad \eta_x=0 \tag{8}$$

和初始条件

$$\xi(0,y)=0,\quad \eta(0,y)=y \tag{9}$$

形式地引入两个函数 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 来代替 $x$ 和 $y$. (8) 和 (9) 的解是 $\xi=x,\eta=y$. 由于 $\eta_y=1$, 可用五个函数 $u,p,q,\xi,\eta$ 的显然等价的方程组

$$\left.\begin{aligned}&u_x=p\eta_y,q_x=p_y,\\&\xi_x=\eta_y,\eta_x=0,\\&p_x=f_qp_y+(f_x+pf_u)\eta_y\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

来代替初值问题 (6), (7). 不过, 必须在 $f_q,f_x,f_u$ 中将 $x,y$ 换成 $\xi,\eta$, 并需要初始条件

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\phi(y),q(0,y)=\phi'(y),\\&\xi(0,y)=0,\eta(0,y)=y,\\&p(0,y)=f(0,y,\phi(y),\phi'(y)).\end{aligned} \tag{11}$$

这样一来, 与 (2) 的初值问题等价的问题就可叙述成如上形式.

对于二阶的初值问题有类似的结果. 像一阶问题的情形一样, 巧妙地用满足微分方程 (8) 和初始条件 (9) 的辅助函数 $\xi$ 和 $\eta$ 来代替 $x$ 和 $y$. 并可写出对函数 $u,p,q,r,s,t,\xi,\eta$ 的一个拟线性、齐次、一阶微分方程组的等价初值问题来代替 (3) 和 (4).

以这种方式出现的一切初值问题都具有一阶拟线性方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{m}G_{ij}(u_1,u_2,\cdots,u_m)\frac{\partial u_j}{\partial y}\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{12}$$

的形式, 并具有形如

$$u_i(0,y)=\phi_i(y) \tag{13}$$

的预给的初始条件.

在这个拟线性方程组中, 系数 $G_{i\kappa}(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 只明显地依赖于未知函数 $u_i$ 本身, 而不依赖于自变量 $x$ 和 $y$.

这方面总的结论：对于微分方程组的各阶初值问题都能毫无困难地化为这种类型的初值问题. 当然, 对于 $n$ 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的情形, (12) 应换成形如

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} G_{i,j,\nu}(u_1, \cdots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial y_\nu} \tag{12a}$$

的方程组.

### 1.7.3 初始流形上的导数的确定法

由微分方程和初始数据一起肯定能算出所求解沿着初始曲线 (如 $x = 0$) 的一切导数, 只要假定这种解存在并且这些解和微分方程及初始函数都是解析的. 首先注意到, 沿着初始曲线 $x = 0$, 将所有已知量 (比方说是 $u$ 和 $u$ 的某些导数) 对 $y$ 微分, 得到更多的已知量, 也就是得到更多的一些导数. 所缺的对 $x$ 微分的导数, 则必须借助于微分方程来确定.

因此, 在微分方程 (2), $p = f(x, y, u, q)$ 的情形下, 沿着 $x = 0$, 由已给数据可以定出 $q = \phi'(y)$ 及 $t = u_{yy} = q_y = \phi''(y)$ 等. 由微分方程本身得到 $p(0, y) = f(0, y, \phi(y), \phi'(y))$. 同样, 在 $x = 0$ 上, 得知

$$q_x = p_y = f_y + f_u q + f_q q_y.$$

为了确定尚未得到的沿着初始曲线的二阶导数 $r = p_x = u_{xx}$, 将方程 (2) 对 $x$ 微分, 得到 $r = p_x = f_x + f_u p + f_q q_x$. 由以上的论述可知右边的量对 $x = 0$ 是已知的, 因此左边对 $x = 0$ 也确定了.

把这样确定的各个量以及微分方程再对 $x$ 微分, 得到在 $x = 0$ 上的各个高阶导数, 直到函数 $f$ 及解 $u$ 的连续可微性的假定不成立时为止.

在二阶微分方程 (3) 的初值问题的情形下, 用类似的办法, 可以定出 $u$ 在初始曲线上的各个导数. 即使讨论一般 (包括所有上面考虑过的特殊问题) 的初值问题 (12), (13), 也是那么简单, 对于这种形式的方程组, 应该怎样逐步地定出函数 $u_i$ 沿着初始流形 (即 $x = 0$) 的各个导数也是了然的.

首先, 由函数 $\phi_i(y)$ 经过微分后得到在直线 $x = 0$ 上的导数 $\dfrac{\partial u_i}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \cdots$, 然后由微分方程得到对 $x$ 的一阶导数. 将这样求出的各个量对 $y$ 微分, 得到沿 $x = 0$ 的混合导数 $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}$. 再将微分方程组 (12) 对 $x$ 微分, 所得表达式的右边只含有函数 $u_i$ 对 $x$ 和 $y$ 的一阶导数及混合二阶导数, 所以这些式子是已知的, 从而定出左边

的值, 即定出二阶导数 $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, 等. 应该强调一下, 在这种逐步确定的过程中, 只用到求导和代入两种运算.

根据解析性的假定, 可做无限次求导, 然后, 由初始数据, 定出函数 $u_i$ 在 $x=0$ 上的所有导数, 因此, 也定出了在 $x=0, y=0$ 处的所有导数.

现在自然可把这个步骤反转过来. 如果上述初始导数的逐步确定法可以使用无限次 —— 在微分方程本身及初始值都是解析的条件下情形当然如此 —— 那么就可用这样得出的导数做系数作出一个形式的幂级数, 然后应该证明这样作出的幂级数是收敛的而且是原来的初值问题的解.

### 1.7.4 解析微分方程的解的存在性的证明

在对方程组 (12) 的基本存在定理的证明中, 可设关于原点 $x=0, y=0$ 的展式作为解并设初始值 $\phi_i(0)=0$. 否则我们可引入差式 $u_i-\phi_i(0)$ 作为新的未知函数[①]. 所谓数据的解析性是指函数 $G_{ik}, \phi_i$ 可用幂级数

$$\phi_i(y)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^i y^\nu, \tag{14}$$

$$G_{ik}(u_1, \cdots, u_m)=\sum_{\nu_1, \cdots, \nu_m=0}^{\infty} b_{\nu_1, \cdots \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \cdots u_m^{\nu_m} \tag{15}$$

来规定, 它们分别在域 $|y| \leqslant \rho$ 及 $|u_i| \leqslant r$ 内收敛.

断定：对于微分方程组所提出的初值问题有一个解, 这解可表示为幂级数

$$u_i(x, y)=\sum_{\substack{l=0 \\ k=1}}^{\infty} c_{lk}^i x^l y^k. \tag{16}$$

根据 1.7.3, 幂级数 (16) 的系数是用微分方程及初始数据唯一地确定的. 因为, 这个 (现在还是假设的) 解 $u_i$ 的各个导数在点 $x=0, y=0$ 处的值, 只要在沿初始曲线 $x=0$ 的导数中代入特殊值 $y=0$ 便能得到. 因此, 级数展开式 (16) 的系数 $c_{lk}^i$ 是唯一地确定的.

若假定这样作出的幂级数在关于点 $x=0, y=0$ 的某域内是收敛的, 那么, 根据熟知的定理, 可在此收敛域的内部逐项微分, 这样得出的导数可代入微分方程. 最后得到的式子可重新依 $x$ 和 $y$ 排成幂级数. 根据 $u_i$ 在原点的累次导数的求法, 得知每个方程的左边和右边连同它们的各阶导数在点 $x=0, y=0$ 处是相同的. 由于解析性, 微分方程恒成立, 即函数 $u_i$ 是一个解组. 由幂级数 (16) 的构造以及这些级

① 引用 $u_i-\phi_i(y)=v_i$ 作为新未知函数将更加简化, 因为这样一来, 所有的初值 $v_i(0, y)$ 都恒为零, 而微分方程的一般形式并不改变.

数收敛的假定, 立即得知这个解组具有给定的初始值, 因而是初值问题的解. 所以, 只要证明了幂级数(16)在某域的内部是收敛的, 存在定理的证明就立即完成了.

为了证明这个收敛性, 考察系数 $c_{lk}^i$ 对于系数 $a_\nu^j, b_{\nu_1}^{js}, \cdots, \nu_m$ 的依赖关系. 首先注意, 将任何幂级数逐项微分就产生一个新的幂级数, 它的系数是由原来的系数用非负整数做线性组合而形成的. 将幂级数代入微分方程 (12), 只出现加法和乘法. 这样形成的式子的右边变成 $x$ 或 $y$ 的幂级数, 它的系数 $c_{lk}^i$ 是量 $a_\nu^j, b_{\nu_1}^{j^s}, \cdots, \nu_m$ 的多项式:

$$c_{lk}^i = P_{lk}^i(a_\nu^j, b_{\nu_1}^{j_s}, \cdots, \nu_m). \tag{17}$$

这些多项式的系数是非负整数, 它们不依赖于函数 $G_{ik}$ 和 $\phi_i$ 的特殊形式.

做了这个准备之后, 将用古典的强函数法来论证收敛性. 除原来针对表达式 $G_{ik}$ 和 $\phi_i$ 的初值问题之外, 再考虑一个新的初值问题, 在此问题中用另外的"强"函数 $K_{ik}$ 和 $\psi_i$ 来替换 $G_{ik}$ 和 $\phi_i$. 在原点的某邻域内, 令

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^i y^\nu \tag{18}$$

及

$$K_{ik}(u_1, \cdots, u_m) \sum_{\nu_1, \cdots, \nu_m=0}^{\infty} B_{\nu_1, \cdots, \nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \cdots u_m^{\nu_m}, \tag{19}$$

其中

$$A_\nu^i \geqslant |a_\nu^i| 而 B_{\nu, \cdots, \nu_m}^{ik} \geqslant |b_{\nu, \cdots, \nu_m}^{ik}|.$$

换言之: 新函数 $K_{ik}$ 和 $\psi_i$ 的展开式的系数是非负的, 且不小于原来函数 $G_{ik}$ 和 $\phi_i$ 的相应系数的绝对值. 现在提出初值问题

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{ik}(v_1, v_2, \cdots, v_m) \frac{\partial v_k}{\partial y} (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{20}$$

$$v_i(0, y) = \psi_i(y), \tag{21}$$

它是原来初值问题的"强问题". 如果依照前面的方法, 作出强问题的假设的幂级数解

$$v_i(x, y) = \sum_{\substack{l=0 \\ k=1}}^{\infty} C_{lk}^i x^l y^k \tag{22}$$

的系数 $C_{lk}^i$, 那么就从 $A_\nu^j$ 和 $B_{\nu_1, \cdots, \nu_m}^{js}$ 得到新的量 $C_{lk}^i$, 所用的方法与由 $a_\nu^j$ 及 $b_{\nu_1, \cdots, \nu_m}^{js}$ 得出原来系数 $c_{lk}^i$ 是一样的 (即 $C_{lk}^i = P_{lk}^i(A_\nu^j, B_{\nu_1, \cdots, \nu_m}^{js})$). 但因这些多项式具有非负的系数, 故知

$$C_{lk}^i \geqslant |c_{lk}^i|.$$

因此, 形式的幂级数 (22) 是幂级数 (16) 的强级数. 所以, 只要能够证明这个长级数 (22) 的收敛性, 那么原来级数 (16) 的收敛性也就肯定了.

利用上面的这个说明, 做一个特别简单的强问题, 它的解可以明显地给出, 因而强级数的收敛性得证. 为此目的, 像前面一样, 选取两个正数 $r$ 和 $\rho$, 使得 $G_{ik}(u_1, \cdots, u_2, \cdots, u_m)$ 和 $\phi_i(y)$ 分别对于 $|u_i| \leqslant r$ 和 $|y| \leqslant \rho$ 收敛, 于是, 由幂级数理论的熟知的定理, 存在一个常数 $M$ 使得

$$|a_\nu^i| \leqslant \frac{M}{\rho^\nu} = A_\nu^i$$

且

$$|b_{\nu_1,\cdots,\nu_m}^{js}| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1+\cdots+\nu_m}},$$

因此, 得

$$|b_{\nu_1,\cdots,\nu_m}^{j_s}| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1+\cdots+\nu_m}} \frac{(\nu_1+\cdots+\nu_m)!}{\nu_1!\cdots\nu_m!} = B_{\nu_1,\cdots,\nu_m}^{js}.$$

现在令 (参考 (18), (19))

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^i y^\nu = M\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{y}{\rho}\right)^\nu \tag{23}$$

且令

$$\begin{aligned} K_{ik}(u_1,\cdots,u_m) &= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_m=0}^{\infty} B_{\nu_1\cdots,\nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1}\cdots u_m^{\nu_m} \\ &= M\sum_{\nu_1,\cdots,\nu_m=0}^{\infty}\left(\frac{u_1}{r}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{u_m}{r}\right)^{\nu_m}\frac{(\nu_1+\cdots+\nu_m)!}{\nu_1!\cdots\nu_m!}. \end{aligned} \tag{24}$$

如果将变元

$$u_1, u_2, \cdots, u_m$$

限制在使得

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m| < r$$

的域内, 那么级数 (24) 收敛, 它的和可表示为

$$K_{ik}(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \frac{M}{1-\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_m}{r}}. \tag{25}$$

对于 $|y| < \rho$, 由级数 (23) 得到

$$\psi_i(y) = \frac{M_y}{\rho - y}. \tag{26}$$

因此, 初值问题

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}=\frac{M}{1-\dfrac{v_1+v_2+\cdots+v_m}{r}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial y}, \tag{27}$$

$$v_i(0,y)=\frac{M_y}{\rho-y} \tag{28}$$

是问题 (12) 的强问题.

剩下的工作是作出这个方程组的显式解 $v_i(x,y)$, 并证明在点 $x=0,y=0$ 处, 这些解可展成幂级数.

由于所有的函数 $K_{ik}$ 都是恒等的, 所有的 $\psi_i$ 也都是恒等的, 看样子不论 $i$ 如何都可设

$$v_i(x,y)=v(x,y).$$

这样就得到单独一个偏微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{mM}{1-\dfrac{m}{r}v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

或

$$\left(1-\frac{m}{r}v\right)v_x-mMvy=0 \tag{29}$$

以及初始条件

$$v(0,y)=v_0=\frac{My}{\rho-y}. \tag{30}$$

所以, 只需证明这个初值问题有一个在原点的足够小的邻域内可展成幂级数的解 $v(x,y)$.

这个初值问题与 1.7.1 中考虑过的例子是一致的. 由那儿的论述得出关于解 $v$ 的二次方程

$$(v+M)\left[\left(1-\frac{m}{r}v\right)y+mMx\right]=\rho v\left(1-\frac{m}{r}v\right). \tag{31}$$

在这方程的两个根中, 需选出在 $x=0,y=0$ 处取得零值那一个. 由方程 (31) 立即得知这种解的存在性, 因为当 $x=y=0$ 时, (31) 变为 $v\left(1-\dfrac{mv}{r}\right)=0$. 由于假定了 $r>0$, 所以在 $x=y=0$ 处, 两根是不同的. 因此, 二次方程 (31) 的判别式在原点处异于零, 从而在原点的邻域也异于零, 在此邻域内根 $v$ 一定能展成 $x$ 及 $y$ 的收敛的幂级数.

确实, 这种解可显式地给出如下：

$$v=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{M}{\rho}(y-rx)+\dfrac{r}{m}\left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)}{1-\dfrac{y}{\rho}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\left[\dfrac{M}{\rho}(y+rx)-\dfrac{r}{m}\left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)\right]^2-4M^2\dfrac{rx}{\rho}}}{1-\dfrac{y}{\rho}}, \tag{32}$$

这是容易验证的.

于是, 在原点的某邻域内, 证明了强级数 (22) 的收敛性, 从而证明了原级数 (16) 的收敛性, 于是初值问题的解析解的存在性也完全得到证明.

同时得知: 对于具有相同强函数的一切微分方程及一切初始函数来说, 在一个相同的域内幂级数一致收敛且解存在.

显然, 前面的证明指出了: 对于解析方程组 (12) 的初值问题, 当初始数据是解析的时候, 只有一个解析解. 在许多情形下, 初始数据的解析性的假定是太强了, 它甚至往往与所描述的物理问题的性质相抵触. 因此, E.Holmgren① 对于解析方程或解析方程组的 Cauchy 问题, 在不限定初始数据为解析的情况下, 对于解的唯一性的证明是有价值的. 在 Cauchy 数据为解析的特例下, 每一个 Cauchy 问题的解自然都是解析的, 而这个解析的解也正是这种 Cauchy 问题的唯一的解 (参考第 3 章附录 II).

关于 E.Holmgren 定理的确切叙述和证明, 读者可参考第 3 章附录 II.

### 1.7.5 关于线性微分方程的一件注意事项

如果固定系数 $C_{lk}^i$, 那么前面的论述表明: 解 $u$ 的幂级数在半径为 $r$ 的圆内收敛, $r$ 是只依赖于 $M$ 及 $\rho$ 的函数 $r(M,\rho)$.

如果原微分方程是线性的而且是齐次的, 那么 $\alpha u$($\alpha$ 是任意常数) 是以 $\alpha\phi$ 为初始值的具有相同的收敛半径 $r$ 的解, 根据 1.7.4 得知 $\alpha\phi$ 仍保持有收敛半径 $\rho$. 因此 $r=r(\alpha M,\rho)$ 只依赖于 $\rho$ 而不依赖于 $M$. 仿此可推断非齐次微分方程. 这个论断包含着如下的一项重要结果: 对于固定的线性微分方程来说,如果初始值对其变元的一切值都收敛 (例如,当初始值是多项式时), 那么解的展开式就在一个不依赖于特定初始值的固定半径内收敛.

### 1.7.6 关于非解析微分方程的一个附注

为了数学物理的需要, 解析微分方程的假设也是太狭窄了. 在下面各章中将对广泛的而不限于解析的微分方程类来求解, 对于这些微分方程, 本节的存在证明是不适用的, 需另作补充或作完全不同的论证. 更重要的是 H.Lewy② 新近发现线性偏微分方程的一个例子, 并有 L.Hörmander③ 进一步探讨了这种方程类, 它们具有全部光滑但非解析的系数, 却根本没有解. 某些与解析方程似乎没有多少区别的微分方程的这种意想不到的属性提出了一个迫切的问题: 要在可解的与不可解的 "非正规的" 微分方程之间找出一个简单的区别来. L.Hörmander 的工作在这个问题上提供了很多见解.

---

① 参考 E.Holmgren[1].
② 参考 H.Lewy[1].
③ 参考 L.Hörmander[1].

### 1.7.7 关于临界初始数据的几点注记. 特征

1.7.2 和 1.7.3 的结论, 是建立在微分方程组可写成形成 (12) 的假设之上的. 如果考察在何种条件下能写成这种“标准”形式, 就要引出例外的或“临界的”初始流形或“特征”的概念. 下面定义特征的概念, 它在偏微分方程的理论中起着基本的作用, 并且在本书的各个部分中都将出现.

首先设已给的方程组是线性的并且自变量的个数为 2：

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}+c_{ij}u_j\right)=d_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

这里 $a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_i$ 是 $x$ 和 $y$ 的已知函数. 这个组在任何点 $(x_0,y_0)$ 处能对 $x$ 的导数解出, 只要系数 $a_{ij}$ 的矩阵在 $(x_0,y_0)$ 处是非奇异的. 如果矩阵 $a_{ij}$ 在 $(x_0,y_0)$ 处是奇异的, 那么直线 $x=x_0$ 就称为特征线; 反之称为自由线.

更一般地, 可考虑用形式 $\xi(x,y)=0$ 给出的并嵌入曲线族 $\xi(x,y)=$常数之中的解析曲线 $C$. 那么常要考虑在 $C$ 上给出 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的初始值的这种初值问题. 这种问题可简化为初始流形是坐标线的情形, 只要引入新自变最 $\xi$ 及 $\eta$ 来代替 $x$ 及 $y$, 其中 $\eta$ 是任何适当的第二个变量. 然后将方程组用 $\xi$ 及 $\eta$ 表示出来：

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(a_{ij}\xi_x+b_{ij}\xi_y)\frac{\partial u_i}{\partial \xi}+(a_{ij}\eta_x+b_{ij}\eta_y)\frac{\partial u_j}{\partial \eta}+c_{ij}u_j\right]=d_i \tag{33}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

曲线 $C$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处称为是特征的, 如果直线 $\xi=\xi_0$ 对于变换后的方程组来说在相应点 $(\xi_0,\eta_0)$ 处是特征的.

现在 (33) 在 $C$ 上对导数 $\dfrac{\partial u_j}{\partial \xi}$ 来说是线性方程组. 若矩阵 $a_{ik}\xi_x+b_{ik}\xi_y$ 在所论点 $P$ 处是非奇异的, 即若行列式 $Q=\|a_{ik}\xi_x+b_{ik}\xi_y\|$ 在 $P$ 处异于 0, 则此方程组有一个且只有一个解. 在此情形下, 曲线称为在 $P$ 处是自由的; 反之称为在 $P$ 处是 临界的或是特征的.

在第 3 章中将详尽地考察这种情形. 这儿只声明对于在每点 $P$ 处都是自由的初始曲线来说, Cauchy 和 Kowalewsky 存在定理及其证明保持不变.

这些定义和命题容易推广到任意个变量的情形, 推广到拟线性的或其他非线性的情形, 并推广到高阶方程组的情形.

这里要加一个关于 特征和初值问题的简短注解.

对于线性方程的 Cauchy 和 Kowalewsky 定理已经扩展到初始流形在每点处为特征的情形了①. 在此情形下, 初始数据不能任意指定, 而必须满足由微分方程所

① 参考 J. Hadamard[2] 第 77 页, G. F. Duff[1] 及 D. Ludwig[1].

规定的某些条件 (见第 6 章 6.3). 相应地, 解也不是唯一确定的, 除非沿着横穿初始流形的一个流形规定某些附加条件. 这种情形与具有零行列式的线性代数方程组的情形相似.

J.Leray① 曾经处理过初始流形沿着其些曲线是特征的情形. 一般说来, 解在初始曲面的邻域内是多值的, 解的分支的多少决定于有关特征曲面的几何性质.

① 参考 J.Leray[1].

# 第 1 章附录 I
# 关于极小曲面的支持函数的 Laplace 微分方程

在 1.6.3 中曾经用 Legendre 变换将极小曲面 $u(x, y)$ 的非线性微分方程变为线性方程. 用 Legendre 变换的一种稍微不同的、齐次的形式, 可将极小曲面的方程变为三个自变量的函数 (所谓支持函数) 的 Laplace 方程, 现说明如下:

先将极小曲面 $M$(参考卷 I) 的方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=0$$

写成

$$\alpha_x+\beta_y=0,$$

其中 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ 表示 $M$ 的法线的方向余弦. 只考虑 $M$ 的这样一部分, 在这部分不同的点处任意两条法线都没有相同的方向余弦 $\alpha, \beta$. 在曲面上用 $\alpha, \beta$ 作为自变量, 而以 $x, y, u$ 作为这两个自变量的函数, 这个方程就等价于

$$x_\alpha+y_\beta=0. \tag{1}$$

现在, 代替方向余弦, 在曲面上考虑三个"齐次"变量 $\alpha, \beta, \gamma$ 的任意组, 它们是正比于法线的三个方向余弦的. 于是其法矢具有分量 $\alpha, \beta, \gamma$ 的切平面的方程, 可写为

$$x\alpha+y\beta+u\gamma=\phi(\alpha, \beta, \gamma), \tag{2}$$

其中"支持函数" $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ 对 $\alpha, \beta, \gamma$ 是一次齐次式, 且当 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 时, 函数 $\phi$ 表示由原点到切平面的距离. 将曲面看做是 (2) 所给出的切平面的包络. 分量正比于 $\alpha, \beta, \gamma$ 的法线方向所对应的切点是

$$x=\phi_\alpha, \quad y=\phi_\beta, \quad u=\phi_\gamma.$$

它是

$$\alpha=f_x, \quad \beta=f_y, \quad \gamma=f_u$$

的"逆 Legendre 变换", 如果 $f(x, y, u)=0$ 是曲面方程的话.

利用上面的关系式以及齐性条件, 现在容易验证极小曲面的方程 $x_\alpha+y_\beta=0$ 就变为极小曲面的支持函数的 Laplace 方程

$$\phi_{\alpha\alpha}+\phi_{\beta\beta}+\phi_{\gamma\gamma}=0$$

(另一种说明见第 5 章 5.2).

# 第 1 章附录 II
# 一阶微分方程组和高阶微分方程组

## $1''.1$ 启发性的话

在 1.2 和 1.7 中证明了, 如果对解提出了附加的初始条件, 那么解单个高阶微分方程的问题可化为解一阶微分方程组的问题, 因此强调一阶方程组的理论是适当的.

不过, 一般说来, 不能期望单个的微分方程与微分方程组完全等价. 像在 1.2 中所做过的, 似乎有理由可以相信, 一个双自变量的偏微分方程组一般不能用求导和消去的办法化为单独一个函数的高阶微分方程. 1.2 的论述同样适用于含 $n$ 个自变量的方程.

当然, 这些论述并没有确证单个方程化为一阶方程组都是不可能的. 事实上, 由给定的方程组经过微分后所得到的方程组是一种特殊性质的方程组, 因而在某些情况下可以消去成为一个高阶的方程. 所以, 将于 $1''.2$ 中 (至少对特殊情形) 定出能使方程组等价于单个的高阶微分方程的必要和充分条件 (也参考 1.2).

## $1''.2$ 两个一阶偏微分方程所成的组和一个二阶微分方程等价的条件

Cauchy-Riemann 微分方程

$$u_x = v_y,$$

$$u_y = -v_x. \tag{1}$$

这个例子表明, 在特殊情形下, 微分方程组等价于单独一个函数的二阶微分方程: (1) 的每个解 $u$ 满足位势方程 $\Delta u = 0$, 并且对每个这种势函数可找到一个共轭的势函数 $v$, 使得 $u$ 及 $v$ 满足方程组 (1).

更一般地, 探求在何种条件下方程组

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \\ \Psi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

等价于单独对 $u$ 的一个二阶微分方程 $L[u]=0$, 意思就是, (2) 的每个解 $u$ 满足方程 $L[u]=0$, 并且反过来说, 对于 $L[u]=0$ 的每个解 $u$ 可找到一个"共轭"函数 $v$, 使得 $u$ 及 $v$ 满足方程组(2).

首先考虑写成如下形式的线性微分方程：

$$\begin{aligned} v_x &= a(x,y)v + A(x,y,u,u_x,u_y), \\ v_y &= b(x,y)v + B(x,y,u,u_x,u_y). \end{aligned} \tag{3}$$

这里 $A$ 和 $B$ 是 $u, u_x, u_y$ 的线性函数, 它们的系数, 还有函数 $a(x,y), b(x,y)$, 在原点的邻域上是解析地依赖于它们的变元的. 再假定 $B$ 中 $u_x$ 的系数异于零.

由 1.7 得知, 如果给定了解析的初始值 $u(0,y)$ 和 $v(0,y)$, 那么在原点的邻域上, (3) 有唯一的解析解 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$. 另一方面, 可任意指定 $u(0,y)=\phi(y)$ 及 $u_x(0,y)=\psi(y)$ 来代替 $u(0,y)$ 及 $v(0,y)$. 不过, 这两个初始条件不唯一地确定方程组的解 $u$ 和 $v$. 原因是, 由 (3) 中第二个方程得出对 $v(0,y)$ 的一个一阶常微分方程：

$$v_y(0,y) = b(0,y)v(0,y) + B(0,y,\phi(y),\psi(y),\phi'(y)).$$

即得到初始值 $v(0,y)$ 的一个单参数族, 于是根据它, 就得到方程组 (3) 的解 $v(x,y)$ 的单参数族.

证明下面的定理：

当且仅当条件

$$a_y = b_x$$

成立时, 方程组(3)才等价于单独对 $u$ 的一个二阶微分方程[①].

为了证明这个定理, 将方程 (3) 对 $y$ 并对 $x$ 微分, 得到

$$(a_y - b_x) = L[u], \tag{4}$$

其中 $L[u] = -[aB - bA + A_y - B_x]$ 是单对 $u$ 的一个二阶线性微分式 (这里符号 $A_y$, $B_x$ 各表示 $A$ 和 $B$ 对 $y$ 及对 $x$ 的全导数).

首先, 设 $a_y - b_x = 0$, 则 $L[u]=0$, 即 $u$ 满足二阶微分方程

$$L[u] \equiv aB - bA + A_y - B_x = 0.$$

为了求出 $u$ 的共轭函数 $v(x,y)$, 将 $L[u]=0$ 的解 $u$ 代入方程组 (3) 中的 $A$ 和 $B$. 如果相容条件

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

① 如果方程组 (3) 是椭圆型的且在稍微广泛的意义下来理解等价性, 那么可以证明, 对单独一个函数的"等价的"二阶方程总是存在的, 并且反之亦然.

成立的话, 则由方程组 (3) 将得出解 $v$. 施行必要的微分运算并利用 $a_y = b_x$, 就得到一个非齐次的线性一阶方程, 只要 $a(x,y)$ 及 $b(x,y)$ 不同时为零, 则由它可解出 $v(x,y)$(参考 1.5.2). 于是证明了定理的第一部分.

现在设在 $x=0$ 处 (因而在 $y$ 轴的邻域)$a_y - b_x \neq 0$. 则由 (4) 得到式

$$v = \frac{L[u]}{a_y - b_x}, \tag{5}$$

对于每个 $u$ 这个式子唯一地定出 $v$.

但是, 如果满足 (3) 的一切 $u$ 都满足同一个二阶微分方程, 那么 $u$, 并根据 (5) 还有 $v$, 都将由初始值 $u(0,y)$ 及 $u_x(0,y)$ 唯一地确定出来, 而这是与本小节上面所得到的结果相矛盾的[1].

最后, 讨论方程组 (2) 能写成形如

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F(x,y,u,v,p,q), \\ v_y &= G(x,y,u,v,p,q) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的情形, 其中 $F$ 和 $G$ 解析地依赖于它们的变元, 而且 $\dfrac{\partial G}{\partial p} \neq 0$. 由这两个方程算出 $v_{xy}$. 得到

$$G_p u_{xx} + (G_q - F_p)u_{xy} - F_q u_{yy} + G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G = 0.$$

当表达式

$$\frac{F_q}{G_p}, \quad \frac{G_q - F_p}{G_p}, \quad \frac{G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G}{G_p} \tag{7}$$

都不依赖于 $v$ 时, 上面的方程是一个单对 $u$ 的二阶微分方程. 反之, 可以证明, 当且仅当 (7) 中各式不依赖于 $v$ 时, 有一个等价于 (6) 的单对 $u$ 的二阶微分方程存在.

[1] 注意, 如果 $A$ 和 $B$ 不是线性地依赖于 $u, u_x, u_y$, 定理仍然成立. 再有, 若系数 $a$ 和 $b$ 也依赖于 $u, u_x = p$ 及 $u_y = q$, 则为了可能化简起见, 条件 $a_y = b_x$ 应换成条件

$$a_q = b_p = 0, \quad a_p = b_q, a_y + a_u q = b_x + b_u p.$$

# 第 2 章　一阶偏微分方程的一般理论

用幂级数法做出偏微分方程的解需要很严格的假设, 即定解条件必须是解析的 (见第 1 章 1.7.4). 这样就会排除许多紧要的问题.

事实上, 对于一阶偏微分方程来说, 在弱得多的连续性和可微性的假设之下, 就能推演出一套更直接、更完全的求积理论. 这一章主要是讲一阶偏微分方程和某个常微分方程组等价的问题[①]. 理论的关键是特征概念, 它在高阶方程中也起着决定性的作用.

除非特别声明, 这里仍然假定所出现的各阶导数都是连续的.

还要再次强调指出, 这里所有的叙述和推导都是“在小范围上的”, 即它们只涉及一些点、线等的邻域, 而没有必要将这些邻域的范围予以规定[②].

## 2.1　两个自变量的拟线性微分方程的几何理论

### 2.1.1　特征曲线

先简短地复习一下在第 1 章 1.5 中讲过的拟线性微分方程. 先考虑两个自变量 $x, y$ 的方程:

$$au_x + bu_y = c, \tag{1}$$

这里 $a, b, c$ 是 $x, y, u$ 的已知函数, 假定在所论域内, 它们以及它们的一阶导数都是连续的, 并且满足 $a^2 + b^2 \neq 0$.

这个偏微分方程可作如下的几何解释: 微分方程的积分曲面 $u(x, y)$ 在点 $P : (x, y, u)$ 必须具有这样的切平面, 这切平面的法线的方向数是由线性方程 $ap + bq = c$ 联系着的 $u_x = p$, $u_y = q$ 和 $-1$. 根据这个方程, 过点 $(x, y, u)$ 的所有积分曲面的切平面应该属于同一个平面束, 在点 $P$ 处这平面束的轴由关系式

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u = a : b : c \tag{2}$$

给定; 这些平面束和它们的轴叫做 Monge 束和 Monge 轴 [③]

点 $P$ 和过点 $P$ 的 Monge 轴的方向一起组成特征线元素.

---

① 参考 C. Carathéodory [1].

② 在附录 II 守恒定律的理论中将出现例外的情形.

③ 参考第 1 章 1.4.1.

所有 Monge 轴的方向在 $x,y,u$ 空间内形成一个方向场, 这个方向场的积分曲线由常微分方程组 (2) 确定, 这些曲线叫做偏微分方程 (1) 的特征曲线, 如果沿着特征曲线引入参数 $s$, 则微分方程 (2) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c. \tag{2a}$$

特征曲线在 $x,y$ 面上的投影叫做特征基线.

将偏微分方程 (1) 积分就等于寻求在每个点上 "适合"Monge 场的曲面, 即在每个点处的切平面都属于 Monge 束的曲面, 或者说, 在每个点都切于 Monge 轴的曲面. 于是我们看出：每个由单参数特征曲线族所形成的曲面 $u(x,y)$ 是偏微分方程 (1) 的一个积分曲面. 反之, 每个积分曲面 $u(x,y)$ 是由一个单参数特征曲线族所形成的.

容易验证上面的叙述：在微分方程 (1) 的每个积分曲面 $u(x,y)$ 上, 可由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b$$

确定一个单参数曲线族 $x=x(s)$, $y=y(s)$, $u=u(x(s),y(s))$, 这里 $a,b$ 中的 $u$ 已用 $u(x,y)$ 代入.

沿着这样的曲线, 偏微分方程 (1) 变成了 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c$. 于是可知单参数曲线族满足关系式 (2a), 因此, 它们是由特征曲线组成的. 参数 $s$ 并不明显地出现在微分方程中, 所以, 若用 $s+$常数代替 $s$, 会得到同样的积分曲线. 因此, 给参数 $s$ 加一个常数是无关紧要的.

因为微分方程组 (2a) 的解可由 $s=0$ 时 $x,y,u$ 的初始值唯一地确定, 所以得到如下的定理：

同某个积分曲面有一个公共点的每一条特征曲线全部位于该积分曲面上. 再有, 每个积分曲面是由某个单参数特征曲线族所形成的.

### 2.1.2 初值问题

从初值问题 来得出偏微分方程解的一般流形. 将 $x,y,u$ 表示为参数 $t$ 的函数来定出一条空间曲线 $C$, 其中 $x_t^2+y_t^2\neq 0$, 且 $C$ 在 $x,y$ 面上的投影 $C_0$ 是简单曲线①. 现在要在投影 $C_0$ 的邻域上找出一张经过 $C$ 的积分曲面 $u(x,y)$, 即找出 (1) 的一个解, 它对于 $t$ 恒有 $u(t)=u(x(t),y(t))$. 这里只假定微分方程的系数以及初始量 $x(t),y(t),u(t)$ 在所论域内是连续可微的, 而不必是解析的.

要解初值问题, 通过 $C$ 上每一点引一条特征曲线, 就是微分方程组 (2a) 的积分曲线; 这在 $C$ 上每点的某个邻域内是可以引出唯一的一条来的. 这样就得到一

① 如果 $C$ 在 $x,y$ 面上的投影 $C_0$ 或 $C$ 本身有重点的话, 那么就将得到自己相交的积分曲面.

个依赖于参数 $t$ 的特征曲线族

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t).$$

如果能用前两个函数以 $x, y$ 来表示 $s, t$, 那么这族曲线就形成一张曲面 $u(x,y)$. 为此, 充分的条件是沿着曲线 $C$ 的 Jacobi 式

$$\Delta = x_s y_t - y_s x_t = a y_t - b x_t \tag{3}$$

不为零 (这里引用了常微分方程的一个熟知的定理, 根据这个定理, 函数 $x, y, u$ 连续可微地依赖于 $s$ 和 $t$①).

如果在 $C$ 上条件 $\Delta \neq 0$ 成立, $u$ 可写成 $x, y$ 的函数, 那么第三个微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c$ 就等价于给定的偏微分方程, 因为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = a u_x + b u_y$. 于是关于初始曲线 $C$ 的初值问题就解出来了. 至于解的唯一性则由 2.1.1 的定理可立即得出, 这定理说明一条特征曲线若与一积分曲面有一个公共点则该曲线就全部位于该曲面上. 也就是, 通过 $C$ 的每个解包含过 $C$ 的全部单参数特征曲线族, 因此必定与 $u$ 全等.

沿着 $C, \Delta \neq 0$ 的条件可几何地解释如下：在 $C$ 上每个点处, 切线的方向与特征方向在 $x, y$ 面上有不同的投影.

如果初值问题有解, 并且 $\Delta = 0$ 这个例外的情形沿着 $C$ 处处成立, 那么 $C$ 本身就是一条特征曲线②, 因为在此情形下, 能够在曲线上选取参数 $t$ 使得沿着 $C$ 有 $a = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, b = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 而偏微分方程又说明了 $c = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, 因此 $C$ 必定是一条特征曲线. 但是, 如果 $C$ 是特征曲线, 那么经过初始曲线 $C$ 的积分曲面就不止一张而是无穷多张了. 考虑通过 $C$ 上任意一点的另一条曲线 $C'$, 沿着它的 Jacobi 式 $\Delta$ 不为零, 则通过 $C'$ 的积分曲面必定含有特征曲线 $C$, 这样, 关于 $C$ 的初值问题的解的集合, 就由曲线 $C'$ 的集合所确定. 经过这个集合中的各条曲线的各个积分曲面都含有曲线 $C$. 因此特征曲线是两张积分曲面相会合的曲线 ——分支曲线, 而通过任何非特征曲线最多只有一张积分曲面.

上面的结果总结于下列定理中：若在初始曲线 $C$ 上处处有 $\Delta \neq 0$, 则初值问题有一个且只有一个解③. 但若沿着 $C$ 处处有 $\Delta = 0$, 则初值问题不可解, 除非 $C$ 是一条特征曲线, 而这时问题有无穷多个解.

① 参考第 5 章 5.2.6 中所证明的类似的定理.

② $\Delta$ 仅在 $C$ 的几个孤立点或仅在 $C$ 的某个子集上为零的情形这里不予考虑. 参考 J. Leray [1].

③ 将所有假设一一列出的存在定理的较麻烦的叙述是这样的：设 $G_0$ 是 $x, y$ 平面上的域, $G$ 是由 $G_0$ 加上满足 $|u| < U$ 的 $u$ 值所形成的 $x, y, u$ 空间的域. 设在 $G$ 上 $a, b, c$ 是 $x, y, u$ 的连续可微函数, 并设 $x(t), y(t), u(t)$ 是 $t(|t| < T)$ 的连续可微函数且满足 $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$, 它们在 $G$ 上定出一条曲线 $C$, $C$ 在 $G_0$ 上的投影 $C_0$ 是简单曲线. 假定沿着 $C$, $\Delta \equiv a y_t - b x_t \neq 0$, 那么存在 $G_0$ 的一个子域 $G_0'$, 它包含 $C_0$, 并且在其中可定出一个连续可微的函数 $u(x,y)$, 这函数在 $G_{0'}$ 上满足微分方程 $a u_x + b u_y = c$ 而在 $C_0$ 上满足初始条件 $u(x(t), y(t)) = u(t)$. 这个函数 $u$ 是唯一确定的.

注意, 初值问题的解仅指微分方程 (1) 的通过 $C$ 的那些解, 它们在 $C$ 的邻域上以及在 $C$ 上都是连续可微的. 如果对 $u$ 没有沿着 $C$ 是连续可微的假定, 就不能从条件 $\Delta=0$ 导出 $C$ 是特征曲线. 事实上, 通过非特征曲线 $C$ (对于 $C$ 有 $\Delta=0$) 微分方程可以有解. 不过在 $C$ 上 $u$ 的导数不再是连续的了. 在这种情形下, $C$ 可能是积分曲面 $u(x,y)$ 的脊线 (特征曲线的包络), 至少 $C$ 的投影 $C_0$ 是特征曲线的投影的包络. 在 $C$ 的邻域上, $u$ 不再是 $x$ 和 $y$ 的单值函数.

### 2.1.3　例

1) 为了说明结论, 考虑微分方程

$$uu_x+u_y=1 \tag{4}$$

(第 1 章 1.1.2 例 5) 的特殊情形). 对应的特征微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=u,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=1; \tag{5}$$

将它们解出, 得

$$\begin{aligned}
x&=x_0+u_0s+\frac{s^2}{2},\\
y&=y_0+s,\\
u&=u_0+s,
\end{aligned}$$

这里 $x_0,y_0,u_0$ 是任意积分常数. 特别地, 与给定的初始曲线 $C$

$$x_0=\phi(t),\quad y_0=\psi(t),\quad u_0=\chi(t)$$

相交的特征曲线族为

$$\begin{aligned}
x(s,t)&=\phi(t)+s\chi(t)+\frac{s^2}{2},\\
y(s,t)&=\psi(t)+s,\\
u(s,t)&=\chi(t)+s.
\end{aligned} \tag{6}$$

行列式

$$\Delta(s,t)=x_sy_t-x_ty_s=s(\psi_t-\chi_t)+\chi\psi_t-\phi_t$$

在 $C$ 上的值为

$$\Delta=\Delta(0,t)=\chi\psi_t-\phi_t. \tag{7}$$

若沿着 $C$ 行列式 $\Delta$ 不为 0, 则可由 (6) 消去参数 $s$ 和 $t$; 然后 $u$ 可表示为 $x$ 及 $y$ 的函数. 事实上, 现在可得到

$$\begin{aligned}
u&=y+\chi(t)-\psi(t),\\
x&=\phi(t)+\chi(t)(y-\psi(t))+\frac{(y-\psi(t))^2}{2};
\end{aligned}$$

只要

$$D = \phi_t - \chi\psi_t + (y - \psi(t))(\chi_t - \psi_t)$$

不为 0, 可由第二个方程得到 $t$ 是 $x$ 及 $y$ 的函数. 当趋向曲线 $C$ 时, $y - \psi(t) \to 0$; 由于 $\phi_t - \chi\psi_t \neq 0$, 因此有一个 $C$ 的邻域, 在其中 $D \neq 0$, 于是 $t = t(x, y)$, 从而 $u = u(x, y)$.

如果选取特征曲线

$$x_0 = \frac{1}{2}t^2, \quad y_0 = t, \quad u_0 = t \tag{8}$$

作为 $C$, 那么 (6) 就变成

$$x = \frac{1}{2}(s+t)^2, \quad y = s + t, \quad u = s + t$$

(仍旧是同一条曲线 $C$ 的表达式), 它不表示 (4) 的解. 要对于这样的 $C$ 来解初值问题, 可以看出带有任意函数 $w$ 的方程

$$x = \frac{1}{2}u^2 + w(u - y) \tag{9}$$

给出了 (4) 的隐式解. 如果这样选取 $w$, 使得 $w(0) = 0$ 并使得由 (9) 能唯一地定出 $u$, 则所有对应的积分曲面 $u = u(x, y)$ 都通过特征曲线 $C$.

最后, 设 $C$ 为非特征曲线

$$x_0 = t^2, \quad y_0 = 2t, \quad u_0 = t. \tag{10}$$

则方程组 (6) 变成

$$x = \frac{s^2}{2} + st + t^2, \quad y = s + 2t, \quad u = s + t. \tag{11}$$

虽然 $C$ 不是特征曲线, 但当 $s = 0$ 时, 行列式 $\Delta(s, t) = s$ 等于 0, 消去 $s$ 和 $t$ 得到

$$u(x, y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}, \tag{12}$$

是通过 $C$ 的两张曲面, 当 $x > \dfrac{y^2}{4}$ 时, 满足方程 (4). (12) 并非初值问题的解. 因为当趋向 $C$ 时导数 $u_x$ 及 $u_y$ 不是有界的.

曲线 $C$ 不是曲面 $u = u(x, y)$ 的脊线, 不过, 它是曲面上的奇异曲线, 因为在 $C$ 于 $x, y$ 面的投影的邻域内 $u$ 不是单值的.

2) 在 (1) 为线性微分方程, 而其中函数 $a, b, c$ 不明显地依赖 $u$ 的情形, 我们将看出, 沿着非特征初始曲线 $\Delta$ 为 0 意味着曲函数组

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t)$$

所确定的解是垂直于 $x, y$ 面的柱面. 若假定在 $C$ 上

$$y_s u_t - u_s y_t \neq 0,$$

则 $x$ 可表示为 $y$ 及 $u$ 的函数. 来证明 $x = f(y,u)$ 不依赖于 $u$.

首先注意到, 对于线性微分方程, 由 (2a) 得知行列式 $\Delta$ 应适合关系

$$\Delta_s = (a_x + b_y)\Delta,$$

所以只要 $\Delta$ 在 $C$ 上为 0 则处处为 0. 现在从

$$x_s = f_y y_s + f_u u_s,$$

$$x_t = f_y y_t + f_u u_t,$$

立即得到

$$\Delta = f_u(u_s y_t - u_t y_s);$$

因此

$$f_u = 0 \quad 即 \quad x = f(y).$$

## 2.2 $n$ 个自变量的拟线性微分方程

对于 $n$ 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n > 2)$ 来说, 理论上没有多大变化, 不过这里不仅要考虑一维的特征曲线和 $n$ 维的积分曲面, 而且还必须考虑 $(n-1)$ 维的特征流形 $C$. 一张积分曲面可以由一个 $(n-1)$ 参数的特征曲线族构成, 也可以由单参数的 $(n-1)$ 维特征流形族构成, 每个 $(n-1)$ 维特征流形是由一个 $(n-2)$ 参数的特征曲线族形成的①.

考虑拟线性微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

这里系数 $a_i$ 和 $a$ 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ 的已给函数, 具有连续的导数, 并且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$. 显然, (1) 的几何意义是在 $x, u$ 空间的每个点处曲面 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

① 当然, 对于 $(n-2)$ 维特征流形等也都能予以定义, 不过它们对后面的讨论没有作用.

上的特征方向 $\mathrm{d}x_1:\mathrm{d}x_2:\cdots:\mathrm{d}x_n:\mathrm{d}u=a_1:a_2:\cdots:a_n:a$ 切于该曲面. 再有, 像两个自变量的情形一样, 用如下的特征曲线的定义：由常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=a_i,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=a\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

所给定的 $x,u$ 空间的 $n$ 参数曲线族叫做微分方程 (1) 的特征曲线族; 特征曲线在 $x$ 空间的投影叫做特征基线.

这些由 (2) 所规定的 $x,u$ 空间的特征曲线不构成偏微分方程 (1) 的特定解[①].

特征曲线和积分曲面之间的联系由下列定理给出：

在偏微分方程 (1) 的每个积分曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上存在一个 $(n-1)$ 参数特征曲线族, 它形成这个积分曲面. 反之, 每个由这种曲线族所形成的曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是积分曲面. 再者, 如果一条特征曲线同某个积分曲面有一个公共点, 那么这曲线全部位于该曲面上.

要证明定理的第一部分, 考虑常微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 将解函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 代入方程右边的 $u$. 于是这个方程组就在积分曲面上规定了一个 $(n-1)$ 参数的曲线族, 这个曲线族形成了该曲面. 沿着这个族的一条曲线, $u$ 变成曲线参数 $s$ 的函数, 并且得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\sum_{i=1}^{n}u_x\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i};$$

因 $u$ 满足微分方程, 故得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=a$, 于是可知, 这曲线是一条特征曲线. 像在 2.1 中一样, 第二部分的证明可由特征曲线的定义立即得出, 第三部分可由过已给点的特征曲线的唯一性得出.

现在可利用由特征微分方程所定出的特征曲线来构造积分曲面, 以解决下列初值问题：在 $(n+1)$ 维的 $x,u$ 空间中, 假定用 $n-1$ 个独立参数 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ 给定了一个 $(n-1)$ 维流形 $C$,

$$x_i=x_i(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}),\quad u=u(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

设矩阵 $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t_\nu}\right)$ 的秩为 $n-1$. 假定此流形在 $x$ 空间的投影 $C_0$ 没有重点, 即

① $n+1$ 个特征微分方程 (2) 只定出一个 $n$ 参数曲线族是因为出现了一个参数 $s$ 的无关紧要的积分常数的缘故 ($s$ 不明显出现在 (2) 中).

值得注意的是线性微分方程的特殊情形, 就是当 $a_i$ 不明显地依赖 $u$ 时, 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 已经形成了一个确定的组, 它将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间的“特征基线”表示成一个 $(n-1)$ 参数族, 而在一般情形下, 它们形成一个 $n$ 参数族.

$C_0$ 上不同的点对应着不同的数值组 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$. 在 $C_0$ 的邻域要寻求微分方程的通过 $C$ 的解 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 也就是当数量 $x_i$ 用 $x_i(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 替换时变成 $u(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 的那个函数 $u$.

用下列方法来解这个初值问题：对于给定的 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 的一个值组, 求出特征常微分方程组 (2) 的解

$$x_i(s, t_1, \cdots, t_{n-1}), \quad u(s, t_1, \cdots, t_{n-1}),$$

这个解当 $s=0$ 时与预先指定的 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 的函数相重合. 这些函数不仅连续可微地依赖于 $s$ 而且也连续可微地依赖于 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$. 现在考虑把 $s, t_1, \cdots, t_{n-1}$ 这些量表示成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 (利用方程 $x_i = x_i(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$), 并把它们代入 $u(s, t_1, \cdots, t_{n-1})$, 于是 $u$ 就成为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数了. 这种把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 作为新自变量的引入法只有当 Jacobi 式

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(s, t_1, \cdots, t_{n-1})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial s} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{3}$$

沿着 $C$ ($s=0$ 时) 不为 0 时才是可行的. 根据 (2), 第一行的各元素沿着 $C$ 可用关系式 $\dfrac{\partial x_i}{\partial s} = a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 表示, 这里 $x_i$ 及 $u$ 已用给定的初始值代换成 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 的函数了.

于是, Jacobi 式 (3) 恒同于

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

在 $\Delta \neq 0$ 的假定下, 由 $u(s, t_1, \cdots, t_{n-1})$ 得到函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 对于

$$u(s, t_1, \cdots, t_{n-1})$$

的方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = a$ 变成

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a,$$

所以 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是微分方程 (1) 的解. 因此, 假定 $\Delta \neq 0$, 初值问题就有唯一确定的解.

在沿着 $C$ 处处有 $\Delta = 0$ 的例外情形下, 初值问题的解不存在. 人们不禁要问: 在这种情形下还需要什么条件才能保证初值问题的解存在?

首先要注意到, 在 $\Delta = 0$ 的假定下, 存在 $n-1$ 个唯一确定的函数 $\lambda_i(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$, 它们连续地依赖于那些参数, 并使得沿着 $C$ 线性关系式

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \tag{4}$$

成立. 事实上, 这可由行列式 $\Delta = 0$ 以及第一行中至少有一个元素的余因式不为 0 而立即得出.

为了叙述所需的必要条件, 我们引入 $n-1$ 维特征流形 的概念. 用几何的语言来说, 在 $x, u$ 空间的每一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 处指定一个 特征向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a$. 如果在一个 $n-1$ 维流形 $C$ 的每个点处对应的特征向量都与该流形相切, 则此 $n-1$ 维流形叫做特征流形.

将流形 $C$ 用 $n-1$ 个参数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 表出后, 叙述它的解析定义: 如果存在 $n-1$ 个函数 $\lambda_i(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 使得在 $C$ 上关系式

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \tag{5a}$$

成立, 也就是使得特征向量线性地依赖于以 $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_\nu}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial t_\nu}$ 为分量的 $n-1$ 个线性独立的切向量, 那么 $C$ 就叫做偏微分方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a$ 的特征流形.

对于拟线性微分方程的特征流形下列定理成立: 每个特征流形是由一个 $(n-2)$ 参数的特征曲线族所形成的; 反之, 每个 $(n-2)$ 参数的特征曲线族形成一个特征流形.

如果特征曲线 $\varGamma$ 与特征流形 $C$ 有一个公共点, 那么它就完全位于该流形上.

要想证明第一个定理, 在 $t_i$ 的参数空间里考虑由常微分方程组

$$\left| \frac{\mathrm{d}t_\nu}{\mathrm{d}s} \right| = \lambda_\nu(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \tag{6}$$

(共 $n-1$ 个方程) 所确定的 $(n-2)$ 参数的曲线族 $t_i = t_i(s)$. 然后函数 $x_i(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 和 $u(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 就变成 $s$ 的函数, 它们表示 $C$ 上的曲线, 对它们来说关

系式

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \lambda_\nu$$

成立. 根据确定特征流形的方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = a$, 这就表示 $C$ 上的那些曲线是特征曲线, 它们形成一个 $(n-2)$ 参数的曲线族, 并且构成了 $C$. 逆定理是不证自明的, 因为由特征曲线族产生的流形, 在它的每个点处必定切于对应的特征向量.

第二个定理可由下列事实立即得出：就是特征微分方程的解是由初始条件而唯一确定的, 这个初始条件要求每条特征曲线包含 $C$ 的一个点. 前面已经得知, 经过 $C$ 上这个点, 存在一条完全位于 $C$ 上的特征曲线.

现在把主要的结果综合为如下的定理：**若在初始流形 $C$ 上 $\Delta \neq 0$, 则此初值问题有一个且只有一个解. 若在 $C$ 上处处有 $\Delta = 0$, 则初值问题可解的必要与充分条件是 $C$ 为特征流形. 在此情况下, 初值问题有无穷多个解, 而且 $C$ 还是一个分支流形, 通过它各个不同的解可以光滑地互相延拓.**

定理中只有涉及 $\Delta = 0$ 的这一部分尚待证明. 根据条件 $\Delta = 0$ 得知, 存在 $n-1$ 个函数 $\lambda$ 使得关系式 (5) 成立, 这些 $\lambda$ 连续可微地依赖于参数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$. 还必须证实仅余的一个关系式 (5a) 是积分曲面 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 通过 $C$ 的必然结果. 对于 $C$ 上的一个解 $u$, 我们有

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i},$$

又因 $u$ 满足微分方程 (1), 故有

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu},$$

这就是所要证明的关系式①.

反之, 若 $C$ 是特征流形, 试来作出偏微分方程的通过 $C$ 的无穷多个解. 选取任意一个 $(n-1)$ 维流形 $C'$, 它与 $C$ 相交于一个 $(n-2)$ 维流形 $S$, 对于 $S$ 处处有 $\Delta \neq 0$. 则过 $C'$ 有唯一确定的积分曲面 $J'$. 但根据上述的构造, $J'$ 包含所有通过 $S$ 的特征曲线, 因而也包括由它们所形成的流形 $C$. 这就完成了我们的主要定理的证明.

① 这个结果可以从几何上这样来想象, 如果特征向量是切于积分曲面, 又因为根据 (5), 特征向量在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 空间的投影与 $C$ 在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 空间的投影相切, 所以它本身与 $C$ 相切.

# 2.3　两个自变量的一般微分方程

## 2.3.1　特征曲线和焦线. Monge 锥

考虑一般的微分方程

$$F(x,y,u,p,q)=0, \tag{1}$$

这里采用了缩写符号 $u_x=p$, $u_y=q$. 根据惯例, 假定 $F$ 在所论域内对于它的五个变元是连续函数而且具有连续的一阶偏导数, 还需假定

$$F_p^2+F_q^2\neq 0.$$

对偏微分方程 (1) 可作如下的几何解释 (参考第 1 章 1.2.4): $x,y,u$ 空间的积分曲面在每个点 $P:(x,y,u)$ 处的切平面的方向系数 $p,q$ 满足方程 $F=0$. 这个方程对于 $p,q$ 已不是线性的了, 因此, 一般说来, 切平面不形成通过一条直线的平面束, 而是包络着一个以 $P$ 为顶点的锥面的单参数平面族, 这个锥面叫做"Monge 锥"(只考虑小范围内的锥面, 就是一片锥叶的足够小的一部分. 在大范围内, Monge 锥可以由好几片锥叶组成[①]). 微分方程给所论空间域内每一点 $(x,y,u)$ 指定了这样一个 Monge 锥. 将方程积分的问题就是寻求适合这种锥场的曲面, 也就是, 求出在每个点切于相应的锥面的曲面.

也可用 Monge 锥的母线的关系式代替它们的切平面的关系式 $F=0$ 来表示 Monge 锥. 为此, 将 $p$ 与 $q$ 看做是参数 $\lambda$ 的函数而先将 Monge 锥 $F=0$ 用参数表示出来. 锥的母线是对应着参数 $\lambda$ 和 $\lambda+h$ 的切平面的交线当 $h\to 0$ 时的极限. 如果沿着一条固定的母线, 把 $x,y,u$ 看做是到锥顶的距离 $\sigma$ 的函数, 那么容易得出方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\sigma}=p(\lambda)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}+q(\lambda)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma}$$

和

$$0=p'(\lambda)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}+q'(\lambda)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma}.$$

将 $F=0$ 对 $\lambda$ 微分, 又得到

$$F_p p'(\lambda)+F_q q'(\lambda)=0;$$

因此, 对于锥的母线关系式

$$\mathrm{d}x:\mathrm{d}y:\mathrm{d}u=F_p:F_q:(pF_p+qF_q) \tag{2}$$

① 在第 5 章和第 6 章中, 将在"大范围"内给 Monge 锥作一个更详尽的分析. 这里所考虑的仅指切平面的足够小的一块, 例如, 一叶锥的这样一部分, 在那里 $q$ 可表示为 $p$ 的单值可微函数.

成立. 可把这个关系式看做是与微分方程 (1) 给出的 Monge 锥的表达式对偶的.

把 Monge 锥的母线的方向叫做特征方向. 在拟线性方程的情形下, 空间每一点只有一个特征方向, 而这里每个点处的特征方向成为一个单参数族. 在每一点具有特征方向的空间曲线叫做焦线或 Monge 曲线. 沿着 Monge 曲线引入适当的参数 $s$, 就可把条件 (2) 写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q. \tag{3}$$

三个方程中最后一个叫做 成带条件. 它说明函数 $x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)$ 不仅定出一条空间曲线, 同时也定出曲线上每点的切平面. 由一条曲线和这曲线上的切平面族组成的叫做带. 三个常微分方程 (3) 及关系式 $F(x, y, u, p, q) = 0$ 所成的方程组对于 $x, y, u, p, q$ 这五个 $s$ 的函数来说是一个不定方程组. 这个组的每个解产生一条所谓焦带①.

我们的理论在于肯定这种焦带是嵌入在积分曲面上的, 并将称之为特征带. 在每张积分曲面上必定有焦线, 因为在每个点处积分曲面与 Monge 锥相切, 因此每个点处含有一个特征方向. 这些特征方向形成一个方向场, 这个场在积分曲面上所形成的焦线就是它的积分曲线. 要求焦线嵌入②在积分曲面 $u(x, y)$ 上. 在这种要求下, 需对作为 $s$ 的函数的两个量 $p$ 及 $q$ 引入两个附加的常微分方程. 下面就来证明这一点.

要在特定的积分曲面 $u = u(x, y)$ 上求出这两个微分方程 (这时在曲面上 $p$ 及 $q$ 也看做是 $x, y$ 的特别给定了的函数), 先注意微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q,$$

在曲面上定出一个单参数曲线族, 沿着这些曲线

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = u_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q$$

① 如果预先给出一个 $x, y, u$ 间的任意关系, 也就是, 如果要求焦线位于预先给定的曲面上, 那么焦带的四个条件就变成了一个确定的方程组了 (不过, 焦带未必切于这曲面). 于是, 在一般情形下, 显然存在一个单参数焦线族在预先给定的曲面上.

② 这里 "嵌入 (embedding)" 一词的意义是在焦线对 $x, y$ 平面的投影的邻域内, $u$ 是 $x, y$ 的单值且二阶连续可微的函数.

成立, 于是上述曲线形成 Monge 曲线族并作成积分曲面. 将偏微分方程先对 $x$ 微分然后对 $y$ 微分, 得到关系式

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u p + F_x = 0,$$

$$F_p p_y + F_q q_y + F_u q + F_y = 0,$$

它们在积分曲面上恒成立. 由于 $F_p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $F_q = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, p_y = q_x$, 故知对于以 $s$ 为参数所给出的 Monge 曲线来说, 上面两个方程立即变为关系式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_u p + F_x = 0, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} + F_u q + F_y = 0.$$

因此, 如果 Monge 曲线嵌入积分曲面, 那么曲线上点的坐标 $x, y, u$ 以及量 $p$ 和 $q$, 沿着曲线应满足五个常微分方程的组

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_p, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = F_q, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = pF_p + qF_q, \\ &\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} = -(pF_u + F_x), \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = -(qF_u + F_y). \end{aligned} \tag{4}$$

这个方程组叫做方程 (1) 的特征微分方程组.

现在反转次序来考虑, 不把这个常微分方程组看做是从已给的积分曲面得到的, 而是以这个组为出发点, 不牵涉 (1) 的解. 由于在参数 $s$ 中有一个无关紧要的附加常量, 这方程组定出一个带着相应的切平面 $p(s), q(s)$ 的四参数曲线族 $x(s), y(s), u(s)$, 也就是定出了一个带族.

注意：函数 $F$ 是特征微分方程组的一个积分[①], 即沿着这方程组的每个解, $F$ 恒为常数. 这是因为对于这种解的关系式

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = F_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} + F_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

成立, 并且根据特征微分方程, 右边的式子对 $s$ 恒为零.

沿着这些解, $F$ 应该取常数值零, 这样才符合原来的微分方程[②], 利用这个条件就从特征微分方程的四参数解族中划分出一个三参数族. 特征微分方程的每个解, 如果又满足方程 $F = 0$, 则称之为“特征带”; 具有这种带的空间曲线 $x(s), y(s), u(s)$ 叫做特征曲线.

① 不要把这里所用“积分”一词与意义为解的那个“积分”混同起来. 积分 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的意义是说自变量 $x_i$ 的一个函数, 它沿着由方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

解出的每条曲线取得常数值.

② 没有这个限制, 就必须同时考虑整个微分方程族：$F =$ 常数.

对于拟线性方程, 由于特征微分方程的引入, 可得如下的定理：在每个积分曲面上, 存在着一个单参数特征曲线族和相应的特征带. 再有, 若一条特征带与一张积分曲面有一个公共的元素 (有公共的数值 $x, y, u, p, q$), 则此带完全属于该积分曲面①.

### 2.3.2　初值问题的解

一阶偏微分方程理论的最重要特点就是偏微分方程 (1) 的积分问题等价于特征常微分方程组 (4) 的积分问题. 换句话说, 一阶偏微分方程的积分可化为相应的特征常微分方程组的积分.

为了证明这个等价性, 用特征带来构造积分曲面 (类似于 2.1 及 2.2 中使用过的方法). 对于偏微分方程再一次提出 初值问题. 为了上述目的, 把问题按下列方式表述较为便利：用参数 $t$ 的函数 $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$ 给出初始带 $C_1$, 使得曲线 $C: x(t), y(t), u(t)$ 的投影 $C_0$ 没有重点. 再假定成带关系式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

及

$$F = 0$$

对 $t$ 恒成立. 这种带 $C_1$ 叫做积分带.

这个初值问题就是在 $C_0$ 的邻域求出一个函数 $u(x, y)$, 它在这邻域上满足微分方程, 并且它和 $p = u_x, q = u_y$ 一起在 $C_0$ 上取得预先给定的初始值, 也就是, 这函数包含初始带 $C_1$②.

为解这个初值问题, 通过给定的初始带的每个元素引一条由特征微分方程 (4) 给定的特征带 (以 $s$ 作为流动参数), 当 $s = 0$ 时, 这条带化为带 $x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)$ 上给定的初始元素. 把这个解组用

$$x(s,t), \quad y(s,t), \quad u(s,t), \quad p(s,t), \quad q(s,t)$$

表示. 由常微分方程熟知的定理可断定这个解组是唯一的, 并且连续可微且依赖于 $s$ 及参数 $t$. 如果表达式

$$\Delta = F_p y_t - F_q x_t = x_s y_t - x_t y_s \tag{5}$$

沿着初始带不为零, 因而在它的某个 $s, t$ 邻域也不为零, 那么在此邻域就可以引用 $x, y$ 作为自变量以代替参数 $s$ 和 $t$. 这就是说能够把量 $u, p, q$ 表示成 $x, y$ 的函数,

① 再说一遍, 并非每条焦线都是特征曲线, 焦线族远比特征线族大得多. 参考 2.3.3.

② 提出这个问题, 本来可以先只给出初始曲线 $C$, 而 $p$ 及 $q$ 可由成带关系式及方程 $F = 0$ 定出; 不过, 这里初值问题所选择的形式要更好些, 因为它避免了沿着 $C$ 对 $p$ 及 $q$ 的方程的解的多值性作无谓的论述.

并从而得到曲面 $u(x,y)$. 可以断言在此曲面上有 $p=u_x, q=u_y$, 即 $u(x,y)$ 是积分曲面, 因此, 初值问题得解.

上述事实, 只要关系式 $p=u_x, q=u_y$ 成立就自明了. 因为 $F$ 是方程组 (4) 的一个积分, 量 $F(x,y,u,p,q)$ 沿着上述曲面对 $s$ 及 $t$ 恒为零 (由于第二个初始条件), 所以它对 $x$ 及 $y$ 也恒为零.

要验证关系式 $p=u_x$ 及 $q=u_y$, 只需证明

$$\begin{aligned} U &= u_t - px_t - qy_t, \\ V &= u_s - px_s - qy_s \end{aligned} \tag{6}$$

在曲面上恒为零就行了. 关系式

$$\begin{aligned} 0 &= u_t - u_x x_t - u_y y_t, \\ 0 &= u_s - u_x x_s - u_y y_s \end{aligned} \tag{7}$$

就蕴涵着 $p=u_x, q=u_y$, 因为 (7) 是 $u_x, u_y$ 的线性方程组, 根据假设, 它的行列式 $x_t y_s - x_s y_t = \Delta$ 不等于零.

量 $V$ 等于零是特征微分方程的直接结果. 为了证明 $U$ 等于零, 把 $U$ 和 $V$ 看做 $s,t$ 的函数. 考虑恒等式

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial t} = -(p_s x_t - p_t x_s + q_s y_t - q_t y_s),$$

利用特征微分方程 (4), 并由 $V$ 恒等于 0 推出 $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$, 得到

$$\frac{\partial U}{\partial s} = p_t F_p + q_t F_q + (px_t + qy_t)F_u + F_x x_t + F_y y_t.$$

另一方面, 关系式 $F=0$ 对 $s$ 及 $t$ 恒成立, 把它对 $t$ 微分, 得到

$$p_t F_p + q_t F_q + u_t F_u + x_t F_x + y_t F_y = 0,$$

因此

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -F_u U. \tag{8}$$

对于固定的 $t$, 这方程表示 $U$ (作为 $s$ 的函数) 的线性常微分方程. 因为根据假设, 当 $s=0$ 时 $U$ 等于零, 所以由常微分方程解的唯一确定性, 根据它的初始值 $U(0)$[①] 可知量 $U$ 对于一切 $s$ 值为零. 这就是所要证明的. 由于常微分方程 (在这里是特征方程) 的解由它们的初始条件而唯一地确定, 所以所构造的积分曲面也是唯一的.

① 即关系式.

$$U(s) = U(0)\mathrm{e}^{-\int_0^s F_u \mathrm{d}s}.$$

将以上结果总结如下：给定一条空间曲线 $C : x = x(t), y = y(t), u = u(t)$, 它可由 $p(t), q(t)$ 补充成为一条初始带 $C_1 : x, y, u, p, q$, 这里 $C_1$ 满足成带关系式及关系式 $F = 0$; 如果沿着这条带 $\Delta = F_p y_t - F_q x_t \neq 0$, 那么在 $C_1$ 的一个邻域上经过这条带有一张且只有一张积分曲面.

### 2.3.3 特征作为分支元素. 补充说明. 积分劈锥面. 焦散流形

还得弄清特殊情形 $\Delta = 0$ 的意义. 如果 $F_p y_t - F_q x_t = 0$ 沿着积分曲面上的带 $C_1$ 处处成立, 那么, 根据 61 页的讨论, $C_1$ 必定是这曲面上的特征带. 因此, 在特殊情形 $\Delta = 0$ 下, 仅当 $C$ 为特征曲线时, 即当此曲线用条件 1) 及 2) 所确定的函数 $p$ 及 $q$ 补充成为特征带时, 才能有积分曲面通过曲线 $C$. 但是, 如果这个条件满足了, 那就不止一个而是有无穷多的积分曲面沿着这条初始带彼此相切. 考虑一条与 $C$ 相交的曲线 $C'$, 把它补充为这样的初始带, 使得这带与 $C$ 所属的特征带相切于公共点, 则关于 $C'$ 的初值问题产生一张积分曲面, 这曲面包含着整个 $C$ 所属的特征带, 因为它与特征带有一个公共元素.

于是可知, 积分曲面上的特征线是这样的曲线, 有不同的积分曲面沿着它们彼此相遇并相切. 因此, 可将这些曲线 (或带) 看做是积分曲面的分支元素. 穿过这些曲线之一, 可以不朝着原来的积分曲面延展过去, 而是可以进到积分曲面族中的另一支去, 并且可以保持 $u$ 的一阶导数的连续性.

总括起来, 对于初值问题有下列两种情形：若在初始带 $C_1$ 上 $\Delta \neq 0$, 则初值问题有唯一的解. 若沿着 $C_1$ 有 $\Delta = 0$, 则初值问题仅当初始带 $C_1$ 为特征带时才有解, 在此情形下, 有无穷多解.

关于 $\Delta = 0$ 的情形作一点最后的说明：如果初始带 $C_1$ 不是特征带, 那么它就是焦带, 这时没有通过 $C_1$ 的初值问题的解, 也就是, 没有积分曲面既包含这条初始带, 而在带的邻域又有直到二阶的连续偏导数. 不过, 可能有这样的积分曲面, 对它来说焦线 $C$ 是一条奇异曲线. 事实上, 如果以 $C_1$ 的每个元素 $(x, y, u, p, q)$ 作为初始元素, 并通过它们作出特征带, 假定这些特征带不全重合 (在 $C_1$ 为特征带的情形下才会全都重合), 那么这些带就会形成一张积分曲面.

在这些积分曲面上, 曲线 $C$ 必定是奇异曲线, 并且一般说来, 它是做成曲面的那些特征曲线的包络. 它可以是积分曲面的脊线, 或者至少是, 于 $C$ 在 $x, y$ 平面上投影的邻域内 $u$ 不能确定为 $x, y$ 的单值函数. 将用例题来说明这些可能性 (参考 2.6 并参考 2.1 中对拟线性方程的情形所讨论的例). 在光的传播理论中, 特征相当于光线; 所以这些光线的焦聚曲线 就是上面所说的焦线 $C$ (这就是焦线这一术语的来源).

初值问题的一个特殊的极限情形, 就是初始曲线退化为一个点的情形, 是十分有趣的. 上面的论断就导致如下的结论：经过 $x, y, u$ 空间的一个定点 $P$ 的所有特征

曲线形成一张积分曲面. 这张积分曲面 (它可以由若干页组成) 在 $P$ 处有一个锥形奇点 (以 Monge 锥作为切锥), 这曲面叫做偏微分方程在 $P$ 处的积分劈锥面. 以后将看到, 它在光的传播理论中扮演光锥这个角色.

下面最后一个附注 —— 这附注同样适用于 $n$ 个变量的情形 —— 说明拟线性方程与一般非线性方程之间的重要区别. 在线性及拟线性情形中, 要构造解用一个双参数 (在 $n$ 个自变量的情形下, 是 $n$ 参数) 特征曲线族就够了. 而在一般情形下, 必须考虑完全的特征带以便把切线方向 $p$ 及 $q$ 包含进去, 这条带的 $x, y, u$ 曲线是一条特征曲线. 不过, 这些带形成一个三参数 (或 $(2n-1)$ 参数) 族; 对应的特征曲线一般也形成三参数族.

## 2.4 完全积分

在第 1 章 1.2.4 中, 微分方程 $F=0$ 的一个依赖于二参数 $a$ 和 $b$ 的完全积分

$$u=\phi(x,y,a,b)$$

被用来构造解, 这解含有一个任意函数 $w(a)$. 这构造法就是令 $b=w(a)$ 并从

$$u=\phi(x,y,a,w(a)),$$
$$0=\phi_a+\phi_b w'(a),$$

两个方程消去 $a$ 而做出包络. 对于固定的 $a$ 值, 上两个方程表示积分曲面 $u=\phi(x,y,a,w(a))$ 与包络的接触曲线. 由于函数 $w(a)$ 可这样选取, 使得对于某个 $a$, 它取得任意值 $b$ 而且它的导数 $w'(a)$ 取得任意值 $c$, 所以两个方程

$$u=\phi(x,y,a,b), \tag{1}$$

$$0=\phi_a+c\phi_b \tag{1a}$$

表示一个曲线族 (依赖于三个参数 $a,b,c$), 这些曲线形成包络的接触曲线①.

现在来证明 方程 (1), (1a) 所表示的曲线是微分方程的特征曲线. 这样由 $p=\phi_x(x,y,a,b), q=\phi_y(x,y,a,b)$ 所得到的相应的带自然就是特征带了.

证明可由如下的事实而直观地得到：两个不同的积分曲面沿着这些曲线相切. 在 2.3 中已经得知, 这只有沿着特征带才可能.

利用直接计算很容易验证这个论断. 用 $x$ 取代 $s$ 作为沿着曲线的自变量, 将方程 (1a) 对 $x$ 微分, 得到

$$\phi_{ax}+c\phi_{bx}=-y_x(\phi_{ay}+c\phi_{by}). \tag{2}$$

① 当然, 所有这些叙述都是针对着参数的足够小的范围而言的.

这个量不能为 0, 因为根据定义 $\phi_{ax}\phi_{by}-\phi_{ay}\phi_{bx}\neq 0$. 现在将方程 $F=0$ (其中 $u=\phi(x,y,a,b)$) 先对 $a$ 微分然后对 $b$ 微分, 得到方程

$$\begin{aligned}&F_u\phi_a+F_p\phi_{ax}+F_q\phi_{ay}=0,\\&f_u\phi_b+F_p\phi_{bx}+F_q\phi_{by}=0.\end{aligned}\tag{3}$$

用 $c$ 乘第二个方程并与第一个相加, 利用 (1a) 及 (2), 就得到方程 $F_py_x-F_q=0$. 根据 2.3.1 中 (3), 若 $F_p\neq 0$, 这就表示上述曲线是特征曲线. 为了得到这个结果, 在所论域中应作重要的假定：

$$F_p^2+F_q^2\neq 0.$$

因此, 偏微分方程的任何完全积分产生一个三参数特征曲线族及特征带族 (选取 $x$ 作为自变量, 换掉了用参数 $s$ 的对称形式, 不会引起什么麻烦).

这样就反转了 2.3 的论断; 即**已经从偏微分方程的一个完全积分得到了特征微分方程的解**. 同样的手段将用于 2.7 中.

用这种方法, 一般地能得到所有的特征曲线, 从而得到偏微分方程的积分曲面. 如果假定在任给的满足 $F_p^2+F_q^2\neq 0$ 的积分曲面上每个点处, 能够指定族 $u=\phi(x,y,a,b)$ 中之一在该点处与曲面相切, 那么这件事就变成显然的了.

最后介绍奇异解. 根据 1.4.3, 这种解是由作二参数族 $u=\phi(x,y,a,b)$ 的包络而得到的, 也可以不用特定的完全积分, 而由方程

$$F=0,\quad F_p=0,\quad F_q=0$$

消去 $p$ 及 $q$ 得到. 本节中所讨论的一切, 对于奇异解都是不成立的, 因为在积分曲面上我们总是假定 $F_p^2+F_q^2\neq 0$. 对于奇异解来说, 无论初始曲线如何选取, 特征初始条件

$$\Delta\equiv F_py_t-F_qx_t=0$$

总能满足, 由于这个事实也可弄清奇异解的独特性质. 在此意义下奇异解上的每条带都是特征带.

## 2.5 焦线和 Monge 方程

在 2.3.1 中, 焦线由微分方程组 (3) 表示, 其中 $p$ 及 $q$ 二量服从附加条件 $F(x,y,u,p,q)=0$. 假定 $F_p\neq 0$, 并且 $x$ 代替 $s$ 作为沿着曲线的参数, 则下列三个方程成立：

$$F=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{F_q}{F_p},\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{pF_p+qF_q}{F_p}.\tag{1}$$

由这三个方程消去 $p$ 及 $q$, 得到一个含两个未知量 $y$ 及 $u$ 的常微分方程

$$M\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0. \tag{2}$$

这个方程叫做 Monge微分方程. 这是一个不定常微分方程组的简单例子, 它说明在点 $(x, y, u)$ 的 Monge 锥的母线的方向所应满足的条件, 而原来的偏微分方程 $F = 0$ 则表示 Monge 锥的切平面所应满足的关系. 用参数 $s$ 取代 $x$, 则锥的方程变为

$$M\left(x, y, u, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right) = 0, \tag{2a}$$

这里 $M$ 是后三个变元的齐次式.

反之, 若给出 Monge 方程 $M(x, y, u, y', u') = 0$, 能构造出相应的偏微分方程. 这可由方程 $M = 0$ 以及含有线元 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u$ 的确定切平面的两个方程

$$q = -\frac{M_{y'}}{M_{u'}}, \quad p = \frac{y'M_{y'} + u'M_{u'}}{M_{u'}}$$

消去 $y', u'$ 而得到. 其结果就是方程 $F(x, y, u, p, q) = 0$ (转变为 Monge 锥的切平面关系式). 因此, Monge 方程 (含两个未知函数的一个一阶常微分方程) 和一个二元函数的一阶偏微分方程表示同样的几何图形, 即以 $(x, y, u)$ 为顶点的锥. 方程 $F = 0$ 及 $M = 0$ 在投影几何的意义下是相对偶的.

Monge 方程的解——焦线是这样的曲线, 它们在每一点与特征曲线相切. 由 2.3.3 可知焦线 (除了它们本身是特征曲线外) 是微分方程 $F = 0$ 的积分曲面上特征曲线的包络 (如果这种包络存在的话).

这就引出了解任意给定的 Monge 方程的一个值得注意的理论. 一般看来, 要由 Monge 方程确定 $u$ 及 $y$, 似乎还需设置某个任意的关系式 $W(x, y, u) = 0$, 消去 $u$ 或 $y$ 得到一个一阶常微分方程, 然后积分这个微分方程, 因而这种积分步骤就要做无穷多次. 用这种方法不能得到表达 Monge 方程的全部解的仅含一个任意函数的单一表达式. 不过, 若用完全积分, 可给出 Monge 方程的依赖于一个任意函数的显式的解, 并且无需再做多次积分. 假定 $u = \phi(x, y, a, b)$ 是等价于 Monge 方程的偏微分方程的一个已知的完全积分, 我们便得出这个 "显式" 解. 方程

$$\begin{aligned} &u = \phi(x, y, a, w(a)), \\ &0 = \phi_a(x, y, a, w(a)) + \phi_b(x, y, a, w(a))w'(a) \end{aligned} \tag{3}$$

表示积分曲面上依赖于参数 $a$ 的特征曲线族 (参考 2.4), 再加上一个由 (3) 中第二式对 $a$ 微分所得到的方程

$$\phi_{aa} + 2\phi_{ab}w'(a) + \phi_{bb}w'^2(a) + \phi_b w''(a) = 0, \tag{4}$$

这就表示做曲线族 (3) 的包络. 这三个方程表示一条以 $a$ 为参数的空间曲线, 即特征曲线的包络. 由它们消去 $a$, 将 $y$ 及 $u$ 表示成 $x$ 的函数, 就得到所寻求的 Monge 方程的解. 要将已给的欠定的 Diophantine 式常微分方程 (2) 的一切解表示成形式 (3), (4), 先把 (2) 换成等价的偏微分方程 $F=0$, 然后求出一个完全积分.

## 2.6　例

现在用一些例子来说明上面推导的理论, 这些例子中有几个本身是很重要的.

### 2.6.1　直光线的微分方程. $(\mathrm{grad}\ u)^2=1$

考虑函数 $u(x,y)$ 的微分方程

$$u_x^2+u_y^2=1 \tag{1}$$

及函数 $u(x,y,z)$ 的微分方程

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=1. \tag{2}$$

这些方程出现在几何光学中. 曲面 $u=$常数表示波前, 特征曲线表示光线. 更一般地, 微分方程

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=n(x,y,z) \tag{3}$$

描绘变折射率 $n(x,y,z)$ 的非均匀介质中的波前.

先讨论两个自变量的情形, 对于这种情形得到 (见第 1 章 1.3) 完全积分

$$u=ax+\sqrt{1-a^2}y+b \tag{4}$$

而方程组

$$\left.\begin{aligned}u&=ax+\sqrt{1-a^2}y+w(a),\\0&=x-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}y+w'(a)\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

表示它的包含一个任意函数的解.

方程组

$$\left.\begin{aligned}u&=ax+\sqrt{1-a^2}y+b,\\0&=x-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}y+c\end{aligned}\right\}$$

以及相应的关系式

$$p=a,\quad q=\sqrt{1-a^2}$$

确定出一个依赖于三个参数 $a,b,c$ 的特征带族, 沿着这些带可以把 $x$ 作为自变量. 特征曲线, 即“光线”, 是直线, 且沿着其中任意一条的相应切平面是固定不变的.

特征线以及相应的切平面二者都与 $x, y$ 平面成 $45°$ 角. 显然, 在点 $(x_0, y_0, u_0)$ 处的 Monge 锥应为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(u-u_0)^2.$$

用上面的诸关系式解出了的特征微分方程可写作

$$\mathrm{d}x:\mathrm{d}y:\mathrm{d}u:\mathrm{d}p:\mathrm{d}q=p:q:1:0:0, \tag{5}$$

把它们积分, 就得到

$$p=p_0,\quad q=q_0,\quad u=s+u_0,\quad x=p_0s+x_0,\quad y=q_0s+y_0,$$

这里对于参数值 $s=0$ 的初始值表示为 $x_0, y_0, u_0, p_0, q_0$.

由 $p^2+q^2=1$, $y'=\dfrac{q}{p}$, $u'=\dfrac{1}{p}$ 消去 $p$ 及 $q$, 就得到偏微分方程 (1) 的关于函数 $u(x)$ 及 $y(x)$ 的 Monge 方程:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=1. \tag{6}$$

它的解是这样的曲线, 其上各点的切线与 $x, y$ 面成 $45°$ 角. 这些焦线或焦聚曲线 (它们是曲线 $u=$常数的渐伸线) 可不用积分而用任意函数 $w(a)$ 表示如下:

$$\begin{aligned}
u&=ax+\sqrt{1-a^2}y+w(a),\\
0&=x-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}y+w'(a),\\
0&=-\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^3}}y+w''(a)^{①}.
\end{aligned} \tag{7}$$

这些焦线可用来说明微分方程 (1) 的解②是以焦线为脊线的可展切曲面, 这脊线在各点的切线与 $x, y$ 面成 $45°$ 角.

方程 (1) 的解还有另一个重要的几何意义. 在 $x, y$ 平面内考虑曲线族 $u(x,y)=c=$常数可断定: 在平面内任何点处函数 $u(x,y)$ 的值等于由曲线 $u(x,y)=0$ 到该点的距离. 曲线 $u(x,y)=c$ 平行于 $u(x,y)=0$ 且与之相距为 $c$; 曲线族的正交轨线是直线 (特征曲线的投影), 而这些直线的包络, 即曲线 $u=$常数的公共渐曲线, 是脊线 (焦线) 的投影.

---

① 用计算直接验证这个表达式留作练习.

② 除平面 (4) 及积分锥面以外, 即除母线与 $x, y$ 面成 $45°$ 角的正圆锥外.

这个事实是可以证明的. 例如, 对于给定的初始曲线 $G(x_0, y_0) = 0$ (沿着它约定了初始条件 $u = 0$) 把初值问题解出来即可. 为了解出一个解, 考虑经过初始曲线上每个点 $(x_0, y_0)$ 的特征, 即 $x = p_0 s + x_0$, $y = q_0 s + y_0$, $u = s$. 因为

$$p_0^2 + q_0^2 = 1,$$

所以 $s$ 表示此直线的投影上由点 $(x, y)$ 到点 $(x_0, y_0)$ 的距离. 要确定 $p_0$ 和 $q_0$, 注意若将 $x_0$ 看做是沿初始曲线的独立参数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x_0} = p_0 + q_0\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}$. 因此, 这个方程和初始条件 $G_{x_0} + G_{y_0}\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0} = 0$ 就意味着 $p_0 G_{y_0} - q_0 G_{x_0} = 0$. 于是可知上述特征曲线的投影正交于初始曲线. 所以 $u$ 的确是 —— 至少在初始曲线的足够小的邻域内是点 $(x, y)$ 到曲线 $G(x_0, y_0)$ 的距离. 由这些解释立即得知, 每条曲线 $u =$ 常数, 都正交于直线.

如果由如下的问题出发则证明稍有不同：求已给曲线 $u =$常数的正交轨线. 这些轨线可用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u_x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = u_y \tag{8}$$

描绘出来. 将此两个方程平方并相加, 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1, \tag{9}$$

于是可知 $s$ 表示轨线上的弧长. 将微分方程 (8) 中的第一个对 $s$ 微分并再利用 (8), 得到 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = u_{xx}u_x + u_{xy}u_y$. 将偏微分方程对 $x$ 微分就能看出上式右边恒为 0. 仿此可得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} = 0$, 这就证明了正交轨线是直线.

对于三个自变量的情形, 用同样的方法可证明偏微分方程 (2) 的解由一个等距曲面族 $u(x, y, z) =$ 常数给出, 这曲面族平行于任意的初始曲面 $G(x, y, z) = 0$. 这些曲面具有直伸的正交轨线, 这些直线位于曲面 $u = c_1$ 及 $u = c_2$ 之间的部分具有定长 $c_1 - c_2$; $u$ 本身是由初始曲面到点 $(x, y, z)$ 的距离.

### 2.6.2 方程 $F(u_x, u_y) = 0$

现在我们来考虑微分方程

$$p \cdot q = \frac{1}{2} \quad (p = u_x, q = u_y)^{①}. \tag{10}$$

① 利用变换 $\omega = u, \eta = (x - y)/\sqrt{2}, \xi = (x + y)/\sqrt{2}$, 微分方程就化为关于 $\omega(\xi, \eta)$ 的微分方程 $\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 = 1$, 它可用类似于上面的方法来处理.

关于 $y(x)$ 及 $u(x)$ 的等价的 Monge 方程具有形式

$$u'^2 = 2y'. \tag{11}$$

包含微分方程的所有面元的完全积分由

$$u = ax + \frac{1}{2a}y + b \tag{12}$$

给出, 由 (12) 得到依赖于一个任意函数 $w(a)$ 的解族

$$\begin{aligned} u &= ax + \frac{1}{2a}y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{1}{2a^2}y + w'(a). \end{aligned} \tag{13}$$

最后, 如果使用

$$0 = \frac{1}{a^3}y + w''(a), \tag{13a}$$

就得到关于焦线的不含积分的、依赖于任意函数 $w$ 的表达式.

特征线的全体由含三个参数 $a, b, c$ 的且以 $x$ 为自变量的方程

$$u = ax + \frac{1}{2a}y + b,$$

$$0 = x - \frac{1}{2a^2}y + c$$

来表示. 特征方程是

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u : \mathrm{d}p : \mathrm{d}q = q : p : 1 : 0 : 0. \tag{14}$$

因此特征线也是直线, 且相应的切平面沿着各条直线保持不变. 所以特征线的方程是

$$y = \frac{p_0}{q_0}x + y_0, \quad u = \frac{1}{q_0}x + u_0. \tag{15}$$

最后, 对于任意给定的初始值 $u(0, y_0) = u_0 = v(y_0)$ 解出初值问题. 可立即得到

$$q(0, y_0) = v'(y_0), \quad p(0, y_0) = \frac{1}{2v'(y_0)}.$$

因此, 如果将方程

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{v'(y_0)}x + v(y_0), \\ y &= \frac{1}{2v'(y_0)^2}x + y_0 \end{aligned} \tag{16}$$

中的第二个解出 $y_0$ 为 $x, y$ 的函数并代入第一个, 则得到初值问题的解. 将 (16) 与由 (13) 给出的解

$$u = 2ax + aw'(a) + w(a),$$
$$y = 2a^2x + 2a^2w'(a)$$

相比较, 得知这两种解可用下法互相转换：用方程 $y_0 = 2a^2w'(a)$ 引入新参数 $y_0$ 代替 $a$, 则由方程

$$v(y_0) = (aw(a))' = aw'(a) + w(a)$$

得到 $w(a)$ 的一个新的函数 $v(y_0)$. 根据关系式

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}a} = 2a[2w'(a) + aw''(a)] = 2a(aw(a))''.$$

$$v'(y_0) = \frac{\mathrm{d}v(y_0)}{\mathrm{d}y_0} = (aw(a))''\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y_0} = \frac{1}{2a},$$

以上两种表达式就可互相转换.

上面两个例子是一般微分方程

$$F(u_x, u_y) = 0 \tag{17}$$

的特殊情形, 对于 (17), 类似的关系式都成立. 像上面一样, 由特征方程

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u : \mathrm{d}p : \mathrm{d}q = F_p : F_q : (pF_p + qF_q) : 0 : 0 \tag{18}$$

得知, 特征带是由具有唯一的相应切平面的直线组成的, 并且可推出, 方程的解是可展曲面. 如果注意到, 能够做出一个完全由平面组成的完全积分, 这就变得更清楚了. 为此目的, 设有二函数 $p(a)$ 及 $q(a)$ 满足方程 $F(p, q) = 0$, 这里 $a$ 是参数. 得到完全解

$$u = p(a)x + q(a)y + b.$$

它完全是由平面组成的.

### 2.6.3 Clairaut 微分方程[①]

再来考虑 Clairaut 微分方程

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \tag{19}$$

在第 1 章 1.4 中, 求出的平面族

$$u = ax + by + f(a, b) \tag{20}$$

① 参考第 1 章 1.4 及 1.6.

是一个完全积分. 由完全积分求包络得

$$\begin{aligned} u &= ax + w(a)y + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + w'(a)y + f_a + f_b w'. \end{aligned} \tag{21}$$

(21) 就给出了方程 (19) 的解. 这些解都是可展曲面. 仿此可知, 由特征曲线族所形成的一切积分曲面都是可展的. 根据特征方程

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u : \mathrm{d}p : \mathrm{d}q = (x + f_p) : (y + f_q) : (px + qy + pf_p + qf_q) : 0 : 0, \tag{22}$$

像上面一样 (参考 2.6.1, 2.6.2 小节), 可推知特征带是由直线组成的, 每条直线只有一张相应的切平面.

微分方程 (19) 的奇异解已经讨论过了 (参考第 1 章 1.4、1.6). 假定 $f_{aa}f_{bb} - f_{ab}^2 \neq 0$, 由方程

$$x = -f_\omega, \quad y = f_b$$

解出 $a$ 及 $b$ 并代入

$$u = ax + by + f(a, b)$$

就得到它. 若用切平面坐标 $\xi, \eta, \omega$, 则此解可简单地用支持函数

$$\omega = -f(\xi, \eta) \tag{23}$$

表示出来.

现在所有的解都能够和奇异解联系起来. 要注意, 完全积分的平面就是奇异解的切平面, 而特征线是切线. 因此, Clairaut 微分方程的解的全体是由那些切于奇异解的可展曲面组成的. 所以, 初值问题是容易解出的, 只要选取既切于初始曲线又切于奇异解的平面, 并做出它们的包络就得到了.

由微分方程已经直接证明了经过点 $P$ 的 Monge 锥就是以 $P$ 为顶点且切于奇异解的锥. 再者, Monge 锥也是积分锥面.

### 2.6.4 管状曲面的微分方程

以第 1 章 1.4 中曾经提过的管状曲面的微分方程

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \tag{24}$$

为例子. 球面族

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1 \tag{25}$$

是方程 (24) 的一个完全积分. 几何上明显地看出, 特征曲线是球面上平行于 $u$ 轴的大圆.

从解析方面来看, 这个事实可由特征微分方程

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u : \mathrm{d}p : \mathrm{d}q = u^2p : u^2q : (1-u^2) : -\frac{p}{u} : -\frac{q}{u} \tag{26}$$

得出. 由此方程求出

$$\mathrm{d}(x+up) = \mathrm{d}(y+uq) = \mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right) = 0.$$

立即得到方程

$$x-a=-up, \quad y-b=-uq, \quad p=cq,$$

这里 $a, b, c$ 是积分常数. 由这几个方程以及关系式 (24) 得到方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1$$

及

$$(x-a)/(y-b)=c;$$

因此, 特征曲线是上面所说的那种圆. 再由关系式

$$(x-a):(y-b):u=p:q:-1$$

得知, 在圆上一点处的切平面的法线指向圆心.

积分曲面是半径为 1 的单参数球面族的包络, 球心沿着 $x, y$ 平面上的一条曲线移动. 如果这条曲线 —— 管状曲面的轴 —— 的曲率小于单位圆的曲率, 那么积分曲面确实是管状的. 这时它的特征圆没有包络. 不过, 若轴的曲率半径小于 1, 则特征圆有包络, 它们在积分曲面上形成一条脊线. 这些脊线就是微分方程 (24) 的焦线. 这些焦线在 $x, y$ 面上的投影是 “管” 芯的渐曲线. 这些关系用具体的例子或模型就能够很容易地看出来.

### 2.6.5　齐性关系式

像上一个例题一样, 来考虑齐性关系式

$$px+qy=hu, \tag{27}$$

其中 $h$ 是常数. 将特征微分方程

$$\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}u = x : y : hu \tag{28}$$

积分, 就得到方程

$$\frac{u}{x^h}=a \quad 及 \quad \frac{x}{y}=b. \tag{29}$$

因此, 微分方程的一般解用 $u = x^h V\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 给出, 这里 $V$ 是任意函数, 或用 $u = y^h v\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 给出, $v$ 是任意函数, 也就是用一个 $x, y$ 的 $h$ 次齐次函数给出.

由完全积分

$$u = ax^h + by^h$$

和方程

$$u = ax^h + w(a)y^h,$$

$$0 = x^h + w'(a)y^h$$

得出一般解的另一种表达式. 由第二个方程得到 $a$ 是商式 $\dfrac{x}{y}$ 的函数, 因此仍然得到 $u$ 是一个 $h$ 次的一般齐次函数.

## 2.7 $n$ 个自变量的一般微分方程

关于 $n$ 个自变量的一般一阶偏微分方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

的理论与 $n = 2$ 的情形相似. 所以不再重复它的几何说明而主要是论述特征带的作用.

仿照 2.3, 伴随微分方程 $F = 0$ 而来的是参数 $s$ 的 $2n + 1$ 个函数 $x_i, u, p_i$ 的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = F_{p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -(F_u p_i + F_{x_i}) \tag{2}$$

方程组 (2) 叫做偏微分方程 (1) 的 特征方程组.

$F(x_i, u, p_i)$ 是这方程组的一个积分, 因为对于 (2) 的每个解有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} + \sum_{i=1}^{n} F_{pi} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} + F_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 0.$$

凡 (2) 的解同时又满足条件 $F = 0$ 的就叫做特征带. 这些带形成一个 $(2n - 1)$ 参数族. 再有, 和两个变量的情形一样, 在微分方程 $F = 0$ 的每个积分曲面

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

上有无穷多条特征带. 每条特征带若与积分曲面有一个公共元素, 即一组公共值 $x_i$, $u, p_i$, 则此带全部位于积分曲面上.

像 2.3 中一样, 有如下的初值问题：设由参数 $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{n-1}$ 的连续可微函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ 给出一个 $(n-1)$ 维初始流形 $C$, 并且导数 $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_t}$ 的矩阵的秩为 $n-1$. 设再指定参数 $t_i$ 的 $n$ 个函数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 而将流形 $C$ 扩展成带流形 $C_1$, 函数 $p_i$ 对于 $t_\nu$ 恒满足成带条件

$$u_{t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{3}$$

再设带的量对于 $t_\nu$ 恒满足方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0.$$

目的是要求出一个积分流形

$$u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

即要求出微分方程 $F = 0$ 的一个解, 它含有给定的初始流形 $C_1$.

为了解出这个问题, 考虑以 $s$ 为参数的这种特征带族, 当 $s = 0$ 时, 它的初始元素与给定的初始带流形 $C_1$ 相合, 即考虑特征微分方程的那个解组

$$\left.\begin{array}{l} x_i(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}), \\ u(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}), \\ p_i(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}), \end{array}\right\}$$

当 $s = 0$ 时, 它变为 $t_\nu$ 的已给函数. 如果 Jacobi 式

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})}, \tag{4}$$

根据 (2), 也就是

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} & \cdots & F_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

沿着初始流形 $C_1$ (对于 $s = 0$) 不为 0, 并且在 $C_1$ 的邻域内不为 0, 那么量 $s, t_1, \cdots, t_{n-1}$ 在此邻域内就可用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示出来; 把这些表达式代入

$$u(s, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$$

就得到唯一确定的曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 它包含初始流形 $C_1$. 现在需要证明这个函数 $u$ 是初值问题的解. 如果对于 $x_i,u,p_i$ 用特征微分方程的解代入, 则量 $F(x_i,u,p_i)$ 在曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上恒为零. 因此只需证明在此曲面上处处有

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

与两个自变量的情形相似地可验证这个事实 (参考 2.3.2), 这里从略.

下面讨论特殊情形：在 $C_1$ 上恒有 $\Delta=0$, 与在 2.2 中一样, 由关系式 $\Delta=0$ 仍可归结出有 $n-1$ 个函数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 使得沿着 $C_1$ 线性关系

$$F_{p_i}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \tag{5}$$

成立.

要找出在哪些附加条件下, 初值问题在此情形是可解的. 这里仍然要用特征流形的概念来说明情况. 即将定义特征流形并加以分析. 与拟线性的情形 (见 2.2) 相对照, 在 2.2 中特征流形是 $(n+1)$ 维 $x,u$ 空间的一个 $(n-1)$ 维流形 $C$. 而这里必须考虑用 $2n+1$ 个量 $x_i,u,p_i$ 描绘出来的 $(n-1)$ 维带流形 $C_1$, 因而它应在 $(2n+1)$ 维的 $x,u,p$ 空间来解释.

随着 $(2n+1)$ 维 $x,u,p$ 空间的每个点 (或随着 $(n+1)$ 维 $x,u$ 空间的每个面元) 而来的有 $2n+1$ 个量

$$\begin{aligned}&a_i=F_p,\\&b_i=-p_iF_u-F_x,\\&a=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu F_{p_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu a_\nu,\end{aligned}\qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

这组量可作为特征带矢量的分量. 更进一步, 采用如下的定义：使得关系式 $F(x_i,u,p_i)=0$ 恒成立的 $(n-1)$ 维带流形 $C_1$ 称为特征带流形, 如果特征带矢量在其的每个点与其相切的话. 这个需在 $(2n+1)$ 维空间解释的几何定义, 可用矢量 $(a_i,a,b_i)$ 线性地依赖于 $n-1$ 个独立矢量 $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_\nu},\dfrac{\partial u}{\partial t_\nu},\dfrac{\partial p_i}{\partial t_\nu}(\nu=1,2,\cdots,n-1)$ 的条件解析地叙述出来, 这 $n-1$ 个矢量根据定义是切于 $C_1$ 的. 对于用参数 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ 的函数 $x_i,u,p_i$ 给出的 $n-1$ 维流形 $C_1$, 设关系式

$$F(x_i,u,p_i)=0 \tag{7}$$

及成带关系式

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{8}$$

二者对 $t_\nu$ 恒成立, 则带流形称为特征流形, 如果存在 $n-1$ 个函数 $\lambda_\nu(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 使得满足线性关系①.

$$X_i \equiv a_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = 0, \tag{9}$$

$$U \equiv a - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = 0, \tag{10}$$

$$P_i \equiv b_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = 0. \tag{11}$$

下列两个定理仍成立：

每个特征带流形 $C_1$ 是由一个 $(n-2)$ 参数的完全位于 $C_1$ 内的特征带族所形成的.

每条特征带若与特征带流形有一公共的初始元素, 则完全位于该流形上.

为了证明上面两个定理, 仍然像在 2.2 中一样, 在 $(n-1)$ 维 $t_i$ 流形上用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}t_\nu}{\mathrm{d}s} = \lambda_\nu(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{12}$$

定出曲线 $t_i(s)$. 这些曲线形成一个 $(n-2)$ 参数族, 它就是构成 $t_i$ 流形的曲线族. 沿着这些曲线用 $x_i(t_\nu), u(t_\nu), p_i(t_\nu)$ 定出一条位于 $C_1$ 上的一维带, 用 $t_\nu = t_\nu(s)$ 代入后, 这带的方程变为 $x_i(s), u(s), p_i(s)$; 现在要证明这条带是原来的偏微分方程的

① 这 $2n+1$ 个 $x_i, u, p_i$ 间的关系式, 不是彼此无关的, 因为很容易验证

$$U = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i,$$

并且还有

$$\frac{\partial F}{\partial t_\rho} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \left( \frac{\partial U_\nu}{\partial t_\nu} - \frac{\partial U_\rho}{\partial t_\nu} \right) + F_\nu U + \sum_{i=1}^{n} \left( X_i \frac{\partial p_t}{\partial t_\rho} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\rho} \right) \quad (\rho = 1, 2, \cdots, n-1),$$

这里

$$U_\nu = \frac{\partial u}{\partial t_\nu} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}.$$

于是可知, 加上 $F = 0$ 及由它得出的关系式 $\dfrac{\partial F}{\partial t_\rho} = 0$, 再加上成带条件 (8) 以及条件 (9), (11) 的 $n$ 个条件中只需提出一个就能肯定 (10) 及 (11) 的其他 $n-1$ 个条件成立. 不过, 无论在几何上或在分析上, 常常是为了对称起见而保留上面一组互相依赖的关系式.

特征带. 回看一下关系式 (9), (10), (11), 就得到

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}\lambda_\nu=a_i=F_{p_i},\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial t_\nu}\lambda_\nu=a=\sum_{i=1}^{n}p_iF_{p_i},$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial p_i}{\partial t_\nu}\lambda_\nu=b_i=-F_{x_i}-p_iF_u.$$

因此函数 $x_i(s),u(s),p_i(s)$ 是特征方程 (2) 的解, 又因 $F=0$, 所以它们定出一条特征带. 这种带所形成的 $(n-2)$ 参数族覆盖了 $C_1$.

根据完全相似对拟线性方程的讨论 (见 2.2), 第二个定理可由下列事实得出：即特征微分方程组的解是由初始值唯一确定的.

在对特征流形作了这样的分析之后, 可叙述并证明下面的这个完整的结论, 像在拟线性的情形中所做过的一样：

对于给定的初始流形 $C_1$ 的初值问题, 如果 $\Delta$ 在 $C_1$ 上处处不为 0, 则有一个且只有一个解. 不过, 如果关系式 $\Delta=0$ 沿着 $C_1$ 成立, 则初值问题可解的必要且充分的条件是 $C_1$ 是特征流形. 在这种情形下有无穷多个解.

只需证明 $\Delta=0$ 的情形下的结论. 在此情形下, 可立即推出有 $n-1$ 个函数

$$\lambda_\nu(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$

存在, 使得关系式 (9) 成立. 现在若设 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示通过 $C_1$ 具有 $p_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 的积分曲面, 则立即得出所需的关系式 (10) 和 (11), 这些关系式肯定了 $C_1$ 是特征流形. 因 $p_i=u_x$ 且因 (9) 成立, 故有

$$a=\sum_{i=1}^{n}p_iF_{p_i}=\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial u}{\partial t_\nu};$$

因此关系式 (10) 成立. 现在利用 $u$ 必须对 $x_i$ 恒满足关系式

$$\sum_{i=1}^{n}F_p\frac{\partial p_k}{\partial x_i}+F_up_k+F_{x_k}=0\tag{13}$$

这个事实, 考虑到 $\dfrac{\partial p_k}{\partial x_i}=\dfrac{\partial p_i}{\partial x_k}$, 则 (13) 显然是偏微分方程 (1) 对 $x_k$ 微分的结果. 应用 (12) 得

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial p_k}{\partial t_\nu}=-F_up_k-F_{x_k}=b_k,$$

这就是所需的方程 (11).

于是若对 $C_1$ 的初值问题可解, 则 $C_1$ 是特征带流形.

这个性质也是可解的充分条件, 这一点可像拟线性情形中所做的那样得出. 设任做一个不切于 $C_1$ 的流形 $C_1'$, 使它与 $C_1$ 有一个公共的 $(n-2)$ 维流形 $S$, 并且对于 $C_1'$ 条件 $\Delta \neq 0$ 处处满足, 则对 $C_1'$ 的初值问题可解出唯一的积分曲面 $J'$. 所有通过 $S$ 的特征带以及流形 $C_1$ 是由位于 $J'$ 上的那些带产生的. 因 $C_1'$ 是任意选取的, 所以对 $C_1$ 的初值问题有无穷多个解.

再次强调指出, 以上的论述是只针对小范围的. 在第 6 章中将考虑把解作充分的拓展, 包含奇异性和多值性. 这种在大范围里的讨论将比局部的分析更加繁琐.

## 2.8　完全积分及 Hamilton-Jacobi 理论

### 2.8.1　包络和特征曲线的造法

考虑偏微分方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0, \tag{1}$$

其中 $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, 且有 $\sum\limits_i F_{p_i}^2 \neq 0$. 对于依赖于 $n$ 个参数 $a_i$ 的特定解

$$u = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

(完全积分), 假定行列式条件

$$D = |\phi_{x_i, a_k}| \neq 0 \tag{3}$$

在 $x, u$ 空间所考虑的部分成立①. 那么这些解的一个任意 $(n-1)$ 参数族的包络也是解. 要证明这件事, 令

$$a_i = \omega_i(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

这里 $\omega_i$ 是 $(n-1)$ 个参数 $t_k$ 的任意函数. 由方程

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \phi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{4}$$

① 可像前面一样 (参考第 1 章 1.4.2), 提出更一般的条件, 即 $n$ 行矩阵

$$\begin{pmatrix} \phi_2 & \phi_{x_1 a_1} & \cdots & \phi_{x_n a_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{a_n} & \phi_{x_1 a_n} & \cdots & \phi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

的秩为 $n$.

求出 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数, 并将这些函数 $t_\nu$ 代入

$$u = \phi(x_1, \cdots, x_n, \omega_1(t_1, \cdots, t_{n-1}), \cdots, \omega_n(t_1, \cdots, t_{n-1}))$$

即得包络.

下面证明, 由完全积分给出的曲面与包络相接触的切点所成的曲线 (称为接触曲线) 是特征曲线. 这种接触曲线对应于量 $t_\nu, \dfrac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu}$, 和 $a_i$ 的一组定值; 同时沿着曲线关系式 (4) 成立, 这就意味着 $\phi_{a_i}$ 与某组常数值 $b_i$ 成比例, 以 $\lambda$ 表示公共比例因子, 则有

$$\phi_{a_i} = \lambda b_i. \tag{5}$$

利用这个方程可定出对应于给定值 $x_i$ 和 $a_i$ 的值 $\lambda b_i$; 再根据条件 (3), 可在给定值组的邻域由 (5) 唯一地解出 $x_i$ 而得到函数

$$x_i(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, \lambda).$$

将这些函数代入

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

就得到用参数 $\lambda$ 表示的曲线. 因为在所考虑的邻域内, 只要适当选取函数 $\omega_i$ 就能给出 $a_i$ 和 $b_i$ 的任何所需要的值, 所以包络与完全积分的接触曲线是一个 $2n$ 参数族. 这些曲线是偏微分方程 (1) 的特征曲线, 再加上

$$p_i = \phi_{x_i}(x_k(a_\nu, b_\nu, \lambda), a_k),$$

就得到特征带. 这是由接触带的几何意义而推得的.

要用解析的方法证明这个结论, 先将方程 (5) 对曲线参数 $\lambda$ 微分：

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{a_i x_k} x_k' = b_i, \tag{6}$$

这里用一撇 ($'$) 表示对 $\lambda$ 微分. 另一方面, 微分方程 (1) 用 $u = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 代入时对 $x_i$ 及 $a_i$ 恒满足; 如果把它对 $a_i$ 微分并利用 (5), 就得到

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{x_k a_i} F_{p_k} + F_u \lambda b_i = 0. \tag{7}$$

因此, 量 $-(F_{p_k}/\lambda F_u)$ 满足 $x_k'$ 的非齐次方程组 (6); 又因这方程组的行列式不为零, 故得

$$x_k' = -\frac{F_{p_k}}{\lambda F_u}.$$

若令表达式 $-\dfrac{1}{\lambda F_u}$ (它不等于 0) 等于 $\rho$, 则

$$x_k' = \rho F_{p_k}. \tag{8}$$

再者, 若将 (1) 对 $x_k$ 微分, 则有

$$F_{up_k} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + F_{x_k} = 0,$$

由于 (8),

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial x_k}x_i' = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}x_i' = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}x_i' = \frac{1}{\rho}p_k',$$

故得

$$p_k' = -\rho(F_u p_k + F_{x_k}).$$

最后, 由 (8) 得到

$$u' = \sum_{i=1}^{n} u_x, \quad x_i' = \rho\sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}.$$

可选取曲线参数 $\lambda$ 使得 $\rho = 1$, 于是所考虑的曲线就满足 2.7 中的特征方程 (2) 了①.

### 2.8.2　特征微分方程的典范形式

对于一阶偏微分方程的理论还可以给予一种更加简洁的形式, 而且当因变量 $u$ 不明显地出现在微分方程中时, 2.8.1 的计算可以简化. 任何一个微分方程经过人为地增加一个自变量后总能够变成这种特殊的形式.

为此目的只需引入 (参考第 1 章 1.5) $u = x_{n+1}$ 作为自变量, 并将解族

$$u = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, c)$$

表示为隐形式

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = c.$$

如果用 $-\dfrac{\phi_x}{\phi_{x_{n+1}}}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 替换 $u_{x_i}$, 那么就得到关于新未知函数 $\phi$ 的微分方程, 这方程不明显地依赖 $\phi$.

① 注意, 有时也可从依赖于任意个参数的解 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 做出包络. 例如, 可以作出 $n$ 参数族 (2) 的包络, 这样做, 也和 $n = 2$ 的情形一样, 用微分法和消去法由关系式 $F = F_{p_i} = 0$ 仍然得出奇异解. 或者, 可用任意个函数由 $n$ 参数族中选取 $m$ 参数族 $(m < n)$ 且做出它的包络. 在这种情形下, 接触流形是 $n - m$ 维的特征流形.

对于这种微分方程, 我们挑出一个变量, 例如 $x_{n+1}=x$, 并假定这微分方程已就 $\phi$ 对这个变量的导数解出. 如果仍将 $\phi$ 写作 $u$, 那么不失一般性, 可考虑 $n+1$ 个变量 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数 $u$ 的如下形式的微分方程：

$$\begin{gathered} p+H(x_1, x_2, \cdots, x_n, x, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0, \\ p=u_x, \quad p_i=u_{x_i} \quad (i=1,2,\cdots,n). \end{gathered} \tag{9}$$

于是, 特征微分方程组, 其中之一 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=1$ (或 $x=s$), 就变成方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x}=H_{p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-H_{x_i} \quad (i=1,2,\cdots,n); \tag{10}$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sum_{i=1}^{n} p_i H_{pi}-H, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-H_x, \tag{11}$$

成立. 光是方程 (10) 就形成一个关于 $2n$ 个量 $x_i, p_i$ 的 $2n$ 个方程的组. 如果函数 $x_i(x)$ 和 $p_i(x)$ 是 (10) 的解, 那么经过简单积分就可从 (11) 得出 $p(x)$ 和 $u(x)$.

在力学和变分学中 (参考卷 I 第 4 章 4.9 及本章 2.9), 时常引出形如 (10) 的微分方程. 关联着 $2n+1$ 个变量的函数 $H(x_1, x_2, \cdots, x_n, x, p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的常微分方程组 (10)

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x}=H_{p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-H_{xi}$$

叫做**典则微分方程组**.

本小节的结果说明偏微分方程 (9) 的积分可化为具有同一函数 $H$ 的典范组的积分.

### 2.8.3　Hamilton-Jacobi 理论

Hamilton 和 Jacobi 成功地证实了这种关系是可逆的. 肯定地说, 偏微分方程的积分问题要比常微分方程组的积分问题难得多. 然而, 在数学物理中, 常常给出一个典范形式的常微分方程组, 这些方程用普通的方法可能难于积出, 而它的对应偏微分方程反倒容易处理; 特别地, 有时会很容易地得到一个完全积分, 例如借助于分离变量法 (参考第 1 章 1.3). 知道了完全积分之后, 就可用微分法和消去法求出相应的特征常微分方程组的解. 这个事实已经包括在前面 2.4 和 2.8.1 的结果中了. 对于典范微分方程的情形, 这个事实可以特别简单地叙述出来, 并且能够解析地验证, 用不着做出包络.

先重述一下关于微分方程 (9) 的“完全积分”的概念：要注意对于这微分方程的每个解 $u$ 来说, $u+a$($a$ 为任意常数) 也是一个解. 如果 $u=\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是依赖于 $n$ 个参数 $a_i$ 的解, 且行列式

$$|\phi_{x_i a_k}| \tag{12}$$

不为 0, 那么依赖于 $n+1$ 个参数的表达式

$$u=\phi+a$$

就叫做完全积分. 现在要讲的理论的主要内容用如下的定理叙述出来, 这定理类似于 2.8.1 中所证明过的结论:

如果知道了偏微分方程 (9)

$$u_x+H(x_1,x_2,\cdots,x_n,x,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})=0$$

的一个完全积分 $u=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n,x,a_1,a_2,\cdots,a_n)+a$, 那么, 可从带有 $2n$ 个任意参数 $a_i$ 和 $b_i$ 的方程

$$\phi_{a_i}=b_i,\quad \phi_{x_i}=p_i\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{13}$$

(隐式地)得到典范微分方程组 (10)

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x}=H_{p_i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-H_{x_i}.$$

的 $2n$ 参数解族.

设由 (13) 的首 $n$ 个方程将量 $x_i$ 表示为 $x$ 及 $2n$ 个参数 $a_i,b_i$ 的函数 (这是可能的, 因为根据假设, $|\phi_{x_ia_k}|\neq 0$), 再设想这些 $x_i$ 值已被代入 (13) 的第二组方程中; 这样就得到函数 $x_i(x)$ 和 $p_i(x)$, 它们仍旧依赖于 $2n$ 个参数, 并且表示典范微分方程组的一般解. 于是方程组 (10) 的解就化为寻求相应的偏微分方程的完全积分的问题.

这段陈述的最简短的证明类似于 2.8.1 中所用过的简单验证[①]. 为了证明这样定出的函数 $x_i(x)$ 和 $p_i(x)$ 满足方程 (10), 将方程 $\phi_{a_i}=b_i$ 对 $x$ 微分并将方程

$$\phi_x+H(x_i,x,\phi_{x_i})=0$$

对 $a_i$ 微分, 就得到 $2n$ 个方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial a_i}\frac{\partial x_k}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}H_{pk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial a_i}=0.$$

① 这个证明与 2.8.1 给出的证明之间的区别是这里保留了不对称的记号.

因为行列式 $|\phi_{a_k x_i}|$ 不为零, 所以从这 $2n$ 个方程可得到 (10) 中第一个关系式. 为了证实第二个关系式, 将方程 $\phi_{x_i}=p_i$ 对 $x$ 微分并将方程 $\phi_x+H(x_i,x,\phi_{x_i})=0$ 对 $x_i$ 微分, 就得到方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x},\\ 0&=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}H_{pk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_i}+H_{x_i}.\end{aligned}\tag{14}$$

因为已经证明了 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x}=H_{p_i}$, 所以 (10) 中第二个关系式也就立即得到了.

### 2.8.4 例. 二体问题

互相吸引的两个质点 $P_1$ 和 $P_2$ 的运动, 按牛顿万有引力定律用微分方程

$$\begin{aligned}&m_1\ddot{x}_1=U_{x_1},\quad m_1\ddot{y}_1=U_{y_1},\quad m_1\ddot{z}_1=U_{z_1},\\ &m_2\ddot{x}_2=U_{x_2},\quad m_2\ddot{y}_2=U_{y_2},\quad m_2\ddot{z}_2=U_{z_2}\end{aligned}\tag{15}$$

来描述, 这里

$$U=\frac{\kappa^2m_1m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}.$$

容易看出, 运动总保持在一个平面内, 所以可以选取运动所在的平面作为坐标系的 $x,y$ 平面, 并将 $P_2$ 置于原点. 于是对于质点 $P_1$ 的位置 $(x,y)$ 得到运动方程

$$m_1\ddot{x}=U_x,\quad m_1\ddot{y}=U_y,\quad U=\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{16}$$

这里 $k^2=\kappa^2m_1m_2$.

如果引入 Hamilton 函数

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{17}$$

则方程组 (16) 变成量 $x,y,p=\dot{x},q=\dot{y}$ 的典范微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}=H_p,\quad \dot{p}=-H_x,\\ \dot{y}=H_q,\quad \dot{q}=-H_y.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

这方程组的求积问题等价于寻求偏微分方程[①]

$$\phi_t+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2)=\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\tag{19}$$

① 参考第 1 章 1.3.1 例 4.

的完全积分的问题. 如果引入极坐标 $r, \theta$, 则由 (19) 得到

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\phi_\theta^2\right) = \frac{k^2}{r}; \tag{20}$$

这方程显然具有解族

$$\phi = -\alpha t - \beta\theta - \int_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho, \tag{21}$$

它依赖于参数 $\alpha, \beta$. 根据 2.8.3 的主要定理得到 (18) 的通解为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = -t_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\beta} = -\theta_0,$$

或用显式表示为

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}, \\ \theta - \theta_0 &= \beta\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}. \end{aligned} \tag{22}$$

第二个方程给出轨线 (质点路线); 第一个方程定出质点在此路线上的运动为时间 $t$ 的函数.

如果引入积分变量 $\rho' = \frac{1}{\rho}$, 则可算出轨线的显式为

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin\frac{\frac{\beta^2}{k^2}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}},$$

或者, 若令

$$p = \frac{\beta^2}{k^2}, \quad \epsilon^2 = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}},$$

则为

$$\theta - \theta_0 = -\arcsin\frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon^2},$$

即

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon^2\sin(\theta - \theta_0)},$$

路线为椭圆、抛物线或双曲线, 取决于 $\epsilon < 1, \epsilon = 1$ 或 $\epsilon > 1$①.

① 对于方程 (22) 的一般讨论, 参考 R. Courant [1] 422 页至 428 页.

### 2.8.5 例. 椭球面上的短程线

曲面

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

的短程线 $u = u(s)$, $v = v(s)$ 的微分方程, 根据卷 I 第 4 章 4.9, 可写作如下的典范形式:

$$\begin{aligned} u_s = H_p, \quad p_s = -H_u, \\ v_s = H_q, \quad q_s = -H_v, \end{aligned} \tag{23}$$

这里

$$\begin{aligned} p = Eu_s + Fv_s, \\ q = Fu_s + Gv_s, \end{aligned}$$

且

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{EG - F^2}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2)$$

及

$$\begin{gathered} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{gathered}$$

如 2.8.3, 考虑对应于 (23) 的偏微分方程

$$\phi_s + \frac{1}{2}\frac{1}{EG - F^2}(G\phi_u^2 - 2F\phi_u\phi_v + E\phi_v^2) = 0; \tag{24}$$

目的是要得出这个方程的完全积分. 现在若令

$$\phi = -\frac{1}{2}s + \psi(u,v),$$

则 $\psi$ 满足方程 ①

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \tag{25}$$

问题的关键是解的曲线, 而不在于这些曲线的特殊参数表达式. 所以只要求出 (25) 的一个单参数解族 $\psi(u,v,\alpha)$ 就行了. 根据 2.8.3 的主要定理, 由这个解族得到二参数的短程线族, 其形式为

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = c. \tag{26}$$

在椭球面

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad (a,b,c > 0)$$

① 参考 2.9.3.

的特殊情形下, 容易验证, 下列参数式 (参考卷 I) 成立:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\
y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}}, \\
z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
E &= (u-v)A(u), \\
F &= 0, \\
G &= (v-u)A(v),
\end{aligned} \tag{28}
$$

这里为了简便起见, 已令

$$A(u) = \frac{1}{4}\frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

因此对于 $\psi(u,v)$ 可以得到微分方程

$$A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)A(u)A(v), \tag{29}$$

并且, 若将 $\psi(u,v)$ 写作 $\psi(u,v) = f(u) + g(v)$, 则立即得出依赖于参数 $\alpha$ 的解族

$$\psi(u,v,\alpha) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{A(u')(u'+\alpha)}\mathrm{d}u' + \int_{v_0}^{v} \sqrt{A(v')(v'+\alpha)}\mathrm{d}v'. \tag{30}$$

由 (26) 求出椭球面上短程线的方程为

$$\int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{A(u')}{u'+\alpha}}\mathrm{d}u' + \int_{v_0}^{v} \sqrt{\frac{A(v')}{v'+\alpha}}\mathrm{d}v' = 2c. \tag{31}$$

## 2.9 Hamilton-Jacobi 理论及变分法

一阶偏微分方程的 Hamilton-Jacobi 理论是和古典变分法[①]密切相联的. 未知函数不明显出现的一阶偏微分方程, 它的理论等价于选择函数 $u_i(s)$ 使得积分

$$J \equiv \int_{\tau}^{t} F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \cdots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \cdots, u_n, s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

① 参考 C. Carathéodory 的著作 [1].

的变分为零的问题. 这里 $u_1(s), u_2(s), \cdots, u_n(s)$ 是参数 $s$ 的 $n$ 个函数, $u_i$ 上面的点表示对 $s$ 微分, 而 $F(\dot{u}_i, u_i, s)$ 在所论域上是 $2n+1$ 个变元的二阶连续可微函数①. 下面将简单地解释一下这种关系, 从而再一次得到 2.8 中的结果, 同时也对它们有更深刻的了解.

### 2.9.1 典范形式的 Euler 微分方程

变分问题 (1) 的极值曲线 (参考卷 I 第 4 章) 由函数 $u_\nu(s)$ 的 $n$ 个二阶 Euler 微分方程的组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

给出. 现在可以 (参考卷 I 第 4 章 4.9) 把这个变分问题用一个等价的典范变分问题来替换, 这样就得到极值曲线的 $2n$ 个一阶典范微分方程的组. 为此目的, 用 Legendre 变换 引入 “矩量”

$$F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

假定在变量 $\dot{u}_i, u_i, s$ 的适当的域内, 量 $u_i$ 可由方程 (3) 求出为变量 $v_i, u_i, s$ 的函数, 假定

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| \neq 0, \tag{4}$$

这里 $|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}|$ 表示以 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}_\nu \partial \nu_\mu}$ 为元素的 $n$ 阶行列式. 于是方程组

$$\left.\begin{aligned} &F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu, \quad L_{\dot{u}_\nu} = \dot{u}_\nu, \\ &F(\dot{u}_i, u_i, s) + L(v_i, u_i, s) = \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

就表示 Lengendre 变换及逆变换, 其中 $u_i$ 及 $s$ 是不受变换的参数 (参考第 1 章 1.6); 得到进一步的关系式

$$L_{u_\nu} + F_{u_\nu} = 0. \tag{6}$$

Euler 微分方程就变为带有 Legendre 函数 $L(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n, s)$ 的典范组

$$\begin{aligned} \dot{v}_\nu &= -L_{u_\nu}, \\ \dot{u}_\nu &= L_{v_\nu}, \end{aligned} \tag{7}$$

函数 $L$ 是属于变分问题的. 这些典范微分方程是变分问题的 Euler 方程, 即变分问题的典则形式, 它们等价于原来的方程

$$\delta \int_\tau^t \left( \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_i, u_i, s) \right) \mathrm{d}s = 0$$

① 对于这些概念和记号参考卷 I 第 4 章 4.3.

或

$$\delta\int_{\tau}^{t}\left(\sum_{\nu=1}^{n}u_{\nu}\dot{v}_{\nu}+L(v_i,u_i,s)\right)\mathrm{d}s=0,$$

其中 $2n$ 个变元 $u_i, v_i$ 都是参数 $s$ 的函数. 变量 $u_i$ 和 $\nu_i$ 称做是典范共轭的.

注意, 若函数 $F$ 是 $\dot{u}_i$ 的一次齐次式, 则典范变换不存在①, 例如, $F=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_{\nu}^2}$, 这将见于 2.9.3 中. 必须看到, 如果条件 (4) 成立, 那么公式 (5) 就能够把从极值曲线的 Euler 方程到典范表达式的程序倒过来; 也就是, 对于每个求变分的被积函数 $F(\dot{u}_i,u_i,s)$ 都相应地有一个 Legendre 函数 $L(v_i,u_i,s)$, 反之亦然.

Euler 微分方程的典范组 (7) 是和未知函数 $J(u_1,u_2,\cdots,u_n,s)$ 的一阶偏微分方程

$$J_s+L(J_{u_i},u_i,s)=0 \tag{8}$$

的特征微分方程组完全一样的. 在 2.9.2 及 2.9.4 中, 我们将看到方程 (8) 对变分问题有直接的意义.

### 2.9.2 短程距离或短时距及其导数. Hamilton-Jacobi 偏微分方程

现在增加一个假设, 就是在变量 $u_i, s$ 的 $(n+1)$ 维空间的适当域内, 每对点 $A(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n,\tau)$ 和 $B(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$ 可用一条唯一确定的极值曲线连接起来. (见图 2-1). 那么, 这些极值曲线和相应的矩量就可用 $\kappa_i,\tau_i,q_i,t$ 为参数而表示为如下的形式:

$$u_{\nu}=f_{\nu}(s,\kappa_i,\tau,q_i,t), \tag{9}$$

$$v_{\nu}=g_{\nu}(s,\kappa_i,\tau,q_i,t). \tag{9a}$$

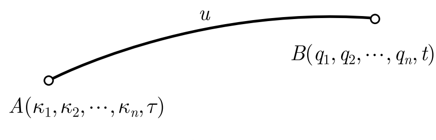



图 2-1

特别是, 对于点 $A$ 和 $B$, 有

$$\left.\begin{aligned}\kappa_{\nu}&=f_{\nu}(\tau,\kappa_i,\tau,q_i,t),\\ q_{\nu}&=f_{\nu}(t,\kappa_i,\tau,q_i,t).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

① 这时行列式 (4) 恒等于 0.

在这二点处极值曲线的方向由

$$\begin{aligned}\dot{\kappa}_\nu &\equiv \dot{u}_\nu(A) = \dot{f}_\nu(\tau, \kappa_i, \tau, q_i, t), \\ \dot{q}_\nu &\equiv \dot{u}_\nu(B) = \dot{f}_\nu(t, \kappa_i, \tau, q_i, t)\end{aligned} \tag{11}$$

给出, 这里字母上面的点表示对第一个变元 $s$ 微分 (沿着极值曲线微分). (11) 同所谓场函数 (端点的矩量 $v_\nu$)

$$\begin{aligned}\pi_\nu &= g_\nu(\tau, \kappa_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{\kappa}_\nu}(\dot{\kappa}_i, \kappa_i, \tau), \\ p_\nu &= g_\nu(t, \kappa_i, \tau, q_i, t) = F_{\dot{q}_\nu}(\dot{q}_i, q_i, t),\end{aligned} \tag{12}$$

一样是 $2n+2$ 个量 $\kappa_i, \tau, q_i, t$ 的函数.

若将函数 (9) 和 (9a) 引入变分积分

$$J = \int_\tau^t F(\dot{u}_i, u_i, s)\mathrm{d}s = \int_\tau^t \left(\sum_{\nu=1}^n v_\nu \dot{u}_\nu - L(\nu_i, u_i, s)\right)\mathrm{d}s$$

中, 则此积分变为 $2n+2$ 个变量 $\kappa_i, \tau, q_i, t$ 的函数

$$J(\kappa_i, \tau, q_i, t).$$

鉴于变分问题可理解为寻求空间二点间最短曲线问题的推广, 所以函数 $J$ 称为点 $A$ 与 $B$ 间的短程距离. 函数 $J(\kappa_i, \tau, q_i, t)$ 还有一个光学上的解释. 把 $s$ 看做时间变量, 并令

$$F = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=1}^n \dot{u}_\nu^2}}{V(\dot{u}_i, u_i, s)},$$

这里 $V$ 理解为 $u_i$ 空间中依赖于位置、方向和时间的光速. 根据 Fermat 的最短时间原理 (参考卷 I 第 4 章 4.1), 如果假定光线是我们的变分问题的极值曲线, 那么函数 $J$ 就测定了光线由 $A$ 到 $B$ 的路程上越过的距离所需的时间. 因此又称 $J$ 为短时距.

理论的要点是将短时距 $J$ 对于它的 $2n+2$ 个自变量的导数用函数 $F$ 表示出来.

短时距的偏导数用公式

$$\begin{aligned}J_t &= -L(p_i, q_i, t) = F(\dot{q}_i, q_i, t) - \sum_{\nu=1}^n \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu}, \\ J_{q_\nu} &= p_\nu = F_{\dot{q}_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)\end{aligned} \tag{13}$$

和

$$J_\tau = L(\pi_i, \kappa_i, \tau) = -F(\dot{\kappa}_i, \kappa_i, \tau) + \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\kappa}_\nu F_{\dot{\kappa}_\nu},$$
$$J_{\kappa_\nu} = -\pi_\nu = -F_{\dot{\kappa}_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

给出, 它们可合并为

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t)\delta t + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \delta q_\nu + L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\delta\tau - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta\kappa_\nu, \tag{15}$$

这里 $\dot{q}_i, \dot{\kappa}_i, p_i, \pi_i$ 是由 (11) 及 (12) 给出的.

这些公式由变分问题的典范表达式得出最为简捷. 把起点 $A$ 和终点 $B$ 的 $2n+2$ 个坐标看做是连续可微的然而又是以任意方式依赖于参数 $\epsilon$ 的, 再把对这个参数求导用符号 $\delta$ 来表示. 记住典范微分方程 (7) 对极值曲线是成立的, 那么就有

$$\begin{aligned}
\delta J &= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right)\delta t - \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\kappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\right)\delta\tau \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \int_\tau^t [(v_\nu \delta\dot{u}_\nu + \dot{u}_\nu \delta v_\nu) - (L_{u_\nu}\delta_{u_\nu} + L_{v_\nu}\delta v_\nu)]\mathrm{d}s \\
&= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right)\delta t - \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\kappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\right)\delta\tau \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \int_\tau^t (v_\nu \delta u_\nu)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由 (10) 立即得到

$$\begin{aligned}
\delta\kappa_\nu &= \dot{\kappa}_\nu \delta\tau + \delta u_\nu\big|_{s=\tau}, \\
\delta q_\nu &= \dot{q}_\nu \delta t + \delta u_\nu\big|_{s=t}.
\end{aligned}$$

由于

$$\delta J = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_i, q_i, t)\right)\delta t - \left(\sum_{\nu=1}^{n} \dot{\kappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\right)\delta\tau + \left[\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \delta u_\nu\right]_\tau^t,$$

故得

$$\delta J = -L(p_i, q_i, t)\delta t + L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\delta\tau + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \delta q_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta\kappa_\nu,$$

这就是所说的关系式 (15).

从方程 (13) 可立即消去矩最 $p_i$. 于是得到关于短程距离 $J$ 的 “Hamilton-Jacobi” 微分方程

$$J_t + L(J_{q_i}, q_i, t) = 0, \tag{16}$$

这里 $J$ 是看做终点 $B$ 的函数的. 这方程也叫做短时距方程. 它和 2.9.1 中的 (8) 是相同的, 与在那里声明的一样, (16) 的特征方程和典范微分方程相同; 因此, Hamilton-Jacobi 方程 (16) 的特征是典范变分问题的极值曲线.

### 2.9.3 齐次被积函数

在 $F$ 为量 $\dot{u}_\nu$ 的一次齐次式的特殊情形下, 仍可作出相应的论证. 这时有

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| = 0, \quad \text{还有} \quad L = -F + \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu F_{\dot{u}_\nu} = 0,$$

而且化为典范形式的 Legendre 变换不能使用. 不过, 在这种情况下, 与 2.9.2 中一样, 方程 $J_t = -L = 0, J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu}$ 是成立的, 并且, 表达式 $F_{\dot{q}_\nu}$ 是 $\dot{q}_\nu$ 的零次齐次式. 因此, 可将数 $\dot{q}_\nu$ 的比值用导数 $J_{q_\nu}$ 表示出来, 并且齐性关系式

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = F$$

可用来代替 Hamilton-Jacobi 偏微分方程.

作为例子, 考虑由

$$F = \sqrt{Q}, \quad Q = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \dot{u}_\nu \dot{u}_\mu$$

给出的短程线的情形, 这里二次型 $Q$ 的系数 $a_{\nu\mu}$ 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的函数. 于是, 可以得到

$$J_t = 0, \quad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\nu\mu} \dot{q}_\mu}{F}$$

或

$$\frac{\dot{q}_\nu}{F} = \sum_{u=1}^{n} A_{\nu\mu} J_{q_\mu},$$

其中, 数 $A_{\nu\mu}$ 构成矩阵 $a_{\nu\mu}$ 的逆矩阵. 由于齐性关系式, 把上面的式子用 $F_{\dot{q}_\nu} = J_{q_\nu}$ 相乘并加起来, 就得到方程

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} J_{q_\nu} J_{q_\mu} = 1, \tag{17}$$

这就是关于短程距离 $J$ 的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程, 并且由此得出关于量 $\Gamma = J^2$ 的偏微分方程

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} \Gamma_{q_\nu} \Gamma_{q\mu} = 4\Gamma. \tag{17a}$$

例如, 在 Euclid 情形下, $F=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_\nu^2}$, 就得到微分方程

$$1=\sum_{\nu=1}^{n}J_{q_\nu}^2.$$

因为 $s$ 不明显出现于 $F$ 中, 所以对于短程线问题只要适当地选择 $s$ 使得 $Q=F^2=1$, 就能得到同样一般的结果 (17). 于是由 Euler 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_{\dot{u}_\nu}-F_{u_\nu}=0,\quad F=\sqrt{Q}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{Q_{\dot{u}_\nu}}{\sqrt{Q}}-\frac{1}{\sqrt{Q}}Q_{u_\nu}=0, \tag{18}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Q_{\dot{u}_\nu}-Q_{u_\nu}=0. \tag{18a}$$

$Q$ 总是这个方程组的一个积分[①], 因此可以放入 $Q=1$ 这样一个补充限制而不会产生矛盾. 现在可将新的微分方程 (18) 变换为典范形式, 因为它们是属于二次被积函数 $Q$ 的, 而不是属于一次齐次被积函数 $\sqrt{Q}$ 的. 由于 $Q$ 的齐性, 典范变换用 $H$ 代替 $L$ 而得出

$$\begin{gathered}-Q+\sum_{\nu=1}^{n}Q_{\dot{u}_\nu}\dot{u}_\nu=Q=H(p_i,u_i),\\ \dot{u}_\nu=H_{p_\nu}\quad(\nu=1,2,\cdots,n),\\ \dot{p}_\nu=-H_{u_\nu}.\end{gathered} \tag{19}$$

由补充条件 $Q=1$ 立即得到

$$H(J_{u_i},u_i)=1,$$

这方程等价于方程 (17).

① 证明: 沿着极值曲线, $Q$ 变为 $s$ 的函数并具有导数

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=\sum_{\nu=1}^{n}Q_{\dot{u}_\nu}\ddot{u}_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}Q_{u_\nu}\dot{u}_\nu.$$

由齐性关系式知, 上式右边等于

$$2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}+\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_\nu\left[Q_{u_\nu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Q_{\dot{u}_\nu}\right].$$

由 (18a) 得到

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s},\quad 因此\quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=0.$$

### 2.9.4 极值曲线场. Hamilton-Jacobi 微分方程

回到 2.9.2 所考虑的距离函数 $J$. 若令起点 $A$ 固定, 则 $J$ 变为只是终点 $B$ 的 $n+1$ 个坐标 $q_\nu$, $t$ 的函数, 且满足 Hamilton-Jacobi 微分方程 (16). 像前面强调过的, 假定终点 $B$ 是在这样一个域内移动, 在此域内极值曲线 $AB$ 以及由公式 (11) 和 (12) 引入的场函数都是唯一确定的. 这种域加上相应的极值曲线族叫做场.

场的概念以及伴随而来的、满足 Hamilton-Jacobi 方程的、$n+1$ 个变量的距离函数的概念都可以推广. 仅定义由出一个定点为起点的短程距离而且也定义由一个固定的初始曲面

$$T(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n, \tau) = 0$$

上的点为起点的短程距离. 这种短程距离的概念是依如下方式产生的: 假定极值曲线的终点 $B$ 是固定的, 而在给定的曲面

$$T(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n, \tau) = 0 \tag{20}$$

上找出的起点 $A$ 使得短程距离 $J(A, B)$ 在点 $A$ 变动之下保持不变. 因此必须在公式 (15) 中对于终点 $B$ 的变分 $\delta q_\nu, \delta t$ 给予零值, 且因 $\delta J = 0$, 故对起点 $A$ 得到条件

$$L(\pi_i, \kappa_i, \tau)\delta\tau - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta\kappa_\nu = 0. \tag{21}$$

不管起点在给定曲面 $T = 0$ 上的变化方式如何, 这个条件总得满足; 即 (21) 必须是方程 (20) 或其微分形式

$$\delta T = \sum_{\nu=1}^{n} T_{\kappa_\nu} \delta\kappa_\nu + T_\tau \delta\tau = 0$$

的必然结果. 这个要求等价于如下的条件, 就是所谓横截条件(参考卷 I 第 4 章 4.5)

$$-L : \pi_\nu = T_\tau : T_{\kappa_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n), \tag{22}$$

其中 $L = L(\pi_i, \kappa_i, \tau)$, 或等价于

$$\left[F - \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\kappa}_\mu F_{\dot{\kappa}_\mu}\right] : F_{\dot{\kappa}_\tau} = T_\tau : T_{\kappa_\nu}, \tag{22a}$$

其中 $F = F(\dot{\kappa}_i, \kappa_i, \tau)$. 横截条件是曲面 $T = 0$ 上点的坐标和极值曲线的导数 $\dot{\kappa}_\nu$ 或典范共轭数 $\pi_\nu$ 之间的关系. 在 $A$ 处满足条件 (22) 的极值曲线叫做对曲面 $T = 0$ 的横截极值线或横截线. 如果对这种曲面的每一点指定一条横截线, 那么这些曲线形成一个 $n$ 参数族.

再假定对于曲面 $T$ 的一部分上的每个点能做出这样一条横截极值线, 并假定这个极值曲线族填满了包含曲面这部分的某个域, 换句话说, 就是形成了一个极值曲线场, 也就是经过这域的每个点恰有一条极值曲线. 那么对于这个场的每个点 $B$ 对应着曲面上的唯一点 $A$. 在场内量 $\dot{q}_i$, 特别是, 对于极值曲线的量 $\dot{q}_i$ 是唯一确定的、位置的函数. 因此介于 $A$ 与 $B$ 之间的矩时距的值可看做是终点 $B$ 的坐标 $q_i, t$ 的函数. 这个短时距测出由点 $B$ 到曲面 $T=0$ 上的点的驻定短程距离, 简言之, 就是点 $B$ 离开曲面的矩程距离.

最初所考虑的固定起点 $A$ 的情形, 是当初始曲面 (例如球面) 收缩为一点时而引起的极限情形.

容易看出, 在被积函数为 $F=\sqrt{1+\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu^2}$ 的特殊情形下, 短程距离和 Euclid 直线距离是一样的. 这里极值曲线场是由正交于曲面 $T=0$ 的直线族组成的, 这个直线族是 $n$ 参数直线族的特殊类型. 因此极值曲线场的一般概念只不过是这一初等概念的推广, 其中将 Euclid 距离换为变分问题所规定的短程距离而将两点间的直线换为相应的极值曲线.

曲面 $J=$ 常数的集合叫做变分问题的平行曲面族.

根据横截条件 (22), (22a), 关系式 (21) 对于上述短程距离是成立的. 所以, 对于到曲面的短程距离与对固定起点 $A$ 的情形一样, 由 (15) 立即得出同样的关系式：

$$\delta J=-L(p_i,q_i,t)\delta t+\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\delta q_\nu. \tag{23}$$

因此, 得到下列一般结果：若

$$\dot{q}_\nu=\dot{q}_\nu(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)\quad(\text{或 } p_\nu=p_\nu(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)),$$

属于一个横截于连续可微曲面 $T=0$ 的极值曲线场, 则在此场内, 到达曲面 $T=0$ 的短程距离 $J=J(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$ 的偏导数由公式 (13)

$$J_t=F(\dot{q}_i,q_i,t)-\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu}=-L(p_i,q_i,t),$$

$$J_{q_\nu}=F_{\dot{q}_\nu}=p_\nu\quad(\nu=1,2,\cdots,n)$$

给出. 短程距离本身满足 Hamilton-Jacobi 偏微分方程 (短时距方程)(16)

$$J_t+L(J_{q_i},q_i,t)=0.$$

这个结论建立在作为基础的场能够造出的假定之下. 当初始曲面是由横截于它的极值曲线所构成时 (如果曲面是“特征”的话), 即当极值曲线完全位于初始曲

面上时, 就出现了例外的情形. 不过, 可能出现这种情形, 就是横截线切于曲面但不位于其上, 这时它们仍然构成一个场, 这场与初始曲面邻接于一侧. 这种初始曲面叫做焦聚曲面, 上述结果在此情形下仍成立.

下面给出上面定理的逆定理：

若 $J(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ 是方程 (16) 的解, 则存在一个极值曲线场, 它的极值曲线横截曲面族 $J =$ 常数的所有曲线, 当然, 穿过初始曲面 $J = 0$. 在此情形下, $J$ 表示在此极值曲线场内到达初始曲面的短程距离.

要证明这个逆定理, 从微分方程 (16) 的一个给定的解 $J$ 出发, 并用方程

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

在适当的域内定出 $n$ 个场量 $p_\nu$. 由 (16) 得

$$J_t = -L(p_i, q_i, t).$$

用常微分方程组

$$\dot{q}_\nu = L_{p_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

来定出一个 $n$ 参数曲线族, 各方程右边的变量 $p_\nu$ 是用量

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

代入的. 沿着这微分方程组的积分曲线, 量 $p_\nu$ 变成参数 $t$ 的函数, 对这参数求导, 得到

$$\dot{p}_\nu = \sum_{u=1}^{n} J_{q_\nu q_\mu} \dot{q}_\mu + J_{q_\nu t}.$$

另一方面, 若将微分方程 (16) 对 $q_\nu$ 求导, 则得恒等式

$$J_{q_\nu t} + L_{q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n} L_{p_\mu} J_{q_\nu q_\mu} = 0,$$

因此

$$\dot{p}_\nu = -L_{q_\nu}.$$

这些方程和 $\dot{q}_\nu = L_{p_\nu}$ 一起, 确定出曲线族, 它是 $n$ 参数的极值曲线族. 如果在横截条件 (22) 中, 用 $J_{q_\nu}$ 替换 $\pi_\nu$, 用 $q_i, t$ 替换 $\kappa_i, \tau$, 并且 $J(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ 替换 $T$, 则立即得知这个极值曲线族是曲面族 $J =$ 常数 的所有曲面的横截线.

### 2.9.5 射线锥面. Huygens 构造法

在上小节中已经解出了变分问题, 并因此作出了 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的解, 这解尚依赖于一个任意函数, 也就是, 作出了在给定曲面 $T=0$ 上等于零的解. 也进一步证明了已经得到偏微分方程的一切可能的解. 当初始曲面收缩为一点, 即当 $J$ 变为到一个固定点的短程距离的特殊情形下, 偏微分方程的解是以前说过的积分劈锥面, 或射线锥面. 相应的曲面 $J=$ 常数 $=c$ 自然叫做短程球面.

应该注意到, 做出平行于任意给定曲面 $T=0$ 的曲面 $J=c$ 实质上等价于从 (16) 的一个含有 $n$ 个参数的解做出它的完全积分的包络. 因为曲面 $J=c$ 是与初始曲面上诸点 $A$ 相距为 $c$ 的平行曲面族的包络. 这种做法与 Huygens 的想法相合, Huygens 是把在时刻 $t=0$ 由 $T=0$ 发出的光线在时刻 $t=c$ 的 "波前" 看做是由 $T=0$ 的各个点发出的球面波前的包络.

再强调一次, 上述作法是指 "在小范围内" 的, 也就是, 只针对射线的足够小的邻域的. "在大范围内" 考虑时需作进一步的研究, 这将在后面看到.

### 2.9.6 短时距的表示式的 Hilbert 不变积分

对于 $J$ 的导数的上述表示法可以把短时距本身看做是与积分路线无关的全微分的曲线积分. 在 $u_i, s$ 空间的场中, 用一条任意的分段光滑曲线 $C$ 连接点 $A$ 和可变终点 $B$, 曲线 $C$ 由以 $s$ 为参数且具有导数 $u_i'(s)$ 的函数 $u_i(s)$ 给出. 属于场上各点且对应着场中极值曲线的导数和矩量是 $u_i, s$ 的函数, 与 2.9.1 中一样, 用 $\dot{u}_i, v_i$ 来表示它们.

对于位置 $B$ 的任意函数 $J$, 方程

$$J(B)-J(A)=\int_A^B\left(\sum_{\nu=1}^n J_{u_\nu}\mathrm{d}u_\nu+J_s\mathrm{d}s\right) \tag{24}$$

成立, 这里点 $A$ 与 $B$ 间的积分路线 $C$ 是任意的. 在场内考虑由初始曲面 $T=0$ 到点 $B$ 的短程距离 $J$ (若 $A$ 位于曲面 $T=0$ 上, 则 $J(A)=0$). 将由 (13) 得到的 $J$ 的偏导数代入, 就得到对于 $A:(\kappa_i,\tau)$ 与 $B:(q_i,t)$ 间的短时距的下列积分表达式,

$$J(q_i,t)-J(\kappa_i,\tau)=\int_A^B\left(F(\dot{u}_i,u_i,s)+\sum_{\nu=1}^n(u_\nu'-\dot{u}_\nu)F_{\dot{u}_\nu}\right)\mathrm{d}s \tag{25}$$

或

$$J(q_i,t)-J(\kappa_i,\tau)=\int_A^B\left(\sum_{\nu=1}^n v_\nu u_\nu'-L(v_i,u_i,s)\right)\mathrm{d}s.$$

记号 $u_\nu'$ 仍表示沿着 $C$ 的导数, 而记号 $\dot{u}_\nu$ 及 $v_\nu$ 仍表示前面所规定的场量, 即在场内各点处是通过这些点的极值曲线的导数和矩量. 这些场量在这里是看做场中坐标的已知函数.

反之, “Hilbert 不变积分” (25) 有如下的性质：若在 $(n+1)$ 维 $u_i, s$ 空间的一个给定域内, $v_\nu(u_1, u_2, \cdots, u_n, s)$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, 是给定的函数. 函数 $v_\nu$ 使得展布在这空间的连续两点 $A$ 和 $B$ 的曲线上的积分

$$\int_A^B \left( \sum_{\nu=1}^n v_\nu u'_\nu - L(v_i, u_i, s) \right) \mathrm{d}s$$

与路径无关, 则函数 $v_\nu(u_1, u_2, \cdots, u_n, s)$ 是一个极值曲线场的场量; 而作为终点 $B$ 的函数的积分值是这个极值曲线场的距离函数 $J(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$.

可立即证明, 只要对于这种不依赖于路线的积分, 在终点 $B$ 有关系式

$$J_{q_\nu} = p_\nu, \quad J_t = -L$$

成立. 又因积分是其上限的函数, 所以这种积分满足 Hamilton-Jacobi 微分方程 (16), 而结论可由 2.9.4 的定理得出, 这定理说明 Hamilton-Jacobi 微分方程的每个解是极值曲线场中的一个距离函数.

因此, 十分清楚, Hamilton-Jacobi 偏微分方程、极值曲线场和相应的距离函数的构成以及对于类型 (25) 的积分与路线的无关性都是同一状况的等价表示法.

### 2.9.7 Hamilton-Jacobi 定理

从 Hilbert 积分得到对 Jacobi 定理 (参考 2.8) 得到一个新的理解. 如果 $J(q_1, q_2, \cdots, q_n, t, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的解, 对于行列式 $|J_{a_\nu q_\mu}|$ 不为零, 那么方程 $J_{a_\nu} = b_\nu$ 和 $J_{q_\nu} = p_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 形成典范方程的一个 $2n$ 参数解族.

前面的结论指出：函数 $J$ 确定一个依赖于参数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 的极值曲线场, $J$ 在此极值曲线场内可用 Hilbert 积分 (25) 表示出来, 再在积分号下微分就得到积分式

$$J_{a_\mu} = \int_A^B \sum_{\nu=1}^n (u'_\nu - \dot{u}_\nu) F_{\dot{u}_\nu a_\mu} \mathrm{d}s, \tag{26}$$

它自然也不依赖于路线 $C$. 现在, 如果点 $B$ 从一个初始位置 $B_0$ 沿着数组 $a_i$ 的场内一条极值曲线移动, 也就是, 如果 $C$ 上所用到的一段弧是极值曲线, 并因而 $u'_\nu = \dot{u}_\nu$, 那么 (26) 中被积函数为零, 并且得到

$$J_{a_\nu} = b_\nu. \tag{27}$$

这里 $b_\nu$ 是常数, 就是积分介于 $A$ 与 $B_0$ 之间的值. 反之, 如果曲线族 $q_\nu(t, a_\nu, b_\nu)$ 是由方程 $J_{a_\nu} = b_\nu$ 定出的 (由于在所考虑的数组 $a_i, b_i$ 的某个邻域内有 $|J_{a_\nu a_\mu}| \neq 0$ 的限制, 这个曲线族的确定只能有一种方式), 那么这些曲线必定是极值曲线. 因

为 (26) 中的被积函数必定在此曲线族的一段弧 $C$ 上为零, 于是得到差式 $u'_\nu - \dot{u}_\nu$ 的线性齐次方程组, 它的行列式是 $|F_{\dot{u}_\nu a_\mu}|$. 另一方面, 根据 2.9.4 得知, 场量由 $v_\nu = F_{\dot{u}_\nu} = J_{u_\nu}$ 给出. 因此行列式 $|F_{\dot{u}_\nu a_\mu}|$ 与 $|J_{u_\nu u_\mu}|$ 恒同, 所以根据假设, 它不等于 0, 于是有 $u'_\nu - \dot{u}_\nu = 0$, 这就证明了曲线 $C$ 是极值曲线.

在下一节中, 将给出 Hamilton-Jacobi 定理的另一种证明.

## 2.10 典范变换和应用

### 2.10.1 典范变换

变分问题的特征微分方程的典范表达式或一阶偏微分方程的典范表达式是**典范变换理论**的起点, 典范变换是有重要应用的.

设函数 $L(v_\nu, u_\nu, s)$ 及相应的典范微分方程组

$$\dot{u}_\nu = L_{v_\nu}, \quad \dot{v}_\nu = -L_{u_\nu} \tag{1}$$

已经给定. 问能否并依何种方式将典范共轭变量 $v_\nu, u_\nu$ 变换为新变量

$$\begin{aligned} \eta_\nu &= \eta_\nu(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n), \\ \omega_\nu &= \omega_\nu(u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n), \end{aligned} \tag{2}$$

并因此由函数 $L(v_\nu, u_\nu, s)$ 得到新的函数 $\varLambda(\eta_\nu, \omega_\nu, t)$, 使得新的典范微分方程

$$\dot{\omega}_\nu = \varLambda_{\eta_\nu}, \quad \dot{\eta}_\nu = -\varLambda_{\omega_\nu} \tag{3}$$

的解对应着原来的典范微分方程 (1) 的解. 这样的变量变换法或典范微分方程组的变换法叫做**典范变换**. 由变分问题容易得出典范变换. 事实上, 若在变换 (2) 下, 一个典范变分问题的被积函数变成另一个典范变分问题的被积函数再加上一个不影响 Euler 微分方程的散度式 (参考卷 I 第 4 章 4.3.5), 那么要求就满足了. 这是可以达到的, 只要选取变换 (2), 使得关系式

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_i, u_i, s) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\omega}_\nu n_\nu - \varLambda(\eta_i, \omega_i, s) + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}, \tag{4}$$

对于量 $u_i, \omega_i, \dot{u}_i, \dot{\omega}_i$ 恒成立就可以, 这里

$$W = W(\omega_i, u_i, s)$$

是任意选取的可微函数, 具有导数

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s} = \sum_{\nu=1}^{n} W_{\omega_\nu} \dot{\omega}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} W_{u_\nu} \dot{u}_\nu + W_s.$$

方程 (4) 可变为

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu (v_\nu - W_{u_\nu}) - \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\omega}_\nu (\eta_\nu + W_{\omega_\nu}) - L + \Lambda - W_s = 0,$$

又因它对 $\dot{u}_\nu, \dot{\omega}_\nu, u_\nu, \omega_\nu$ 恒成立, 所以立即得出如下的定理: 用一个依赖于任意函数 $W(\omega_\nu, u_\nu, s)$ 并由关系式

$$v_\nu = W_{u_\nu}, \eta_\nu = -W_{\omega_\nu}, \Lambda = L + W_s \tag{5}$$

得出的典范变换就将方程 (1) 变成方程 (3). 然后需用 $\eta_\nu$ 和 $\omega_\nu$ 替换 $v_\nu$ 和 $u_\nu$ 而将函数 $\Lambda$ 表示成变量 $\eta_\nu$ 和 $\omega_\nu$ 的函数.

类似地, 如果选取其他变量, 并且相应地从 2.9.1 给出的典范变分问题的第二种形式出发, 就能得到产生典范变换的另一种表达式. 例如, 令 $L$ 为 $v_\nu, \omega_\nu, s$ 的任意函数. 那么方程

$$\begin{gathered} u_\nu = W_{v_\nu}, \quad \eta_\nu = -W_{\omega_\nu}, \\ \Lambda = L - W_s \end{gathered} \tag{6}$$

就给出一个典范变换, 只要在变换后把量 $\omega_\nu, \eta_\nu$, 代入 $\Lambda$ 作为变量就行. 同样地, 对于典范变换还有两个相应的形式可借助于任意函数

$$W(u_\nu, \eta_\nu, s) \quad \text{和} \quad W(v_\nu, \omega_\nu, s)$$

得到. 这两个任意函数总是这样表现出来, 就是它们依赖于一组旧的典范变量和一组新的典范变量.

### 2.10.2 Hamilton-Jacobi 定理的新证明

上面的结果导出了 Hamilton-Jacobi 定理的一个简单的新的证明. 用函数 $\Lambda$ 定出一个典范变换来解已给的典范微分方程 (1), 函数 $\Lambda$ 要恒等于 0, 并使得两个新的共轭变量沿着每条轨线都是常数.

寻找这种函数 $\Lambda$ 要假定 Hamilton-Jacobi 微分方程 $J_s + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) = 0$ 有一个解 $J(u_1, u_2, \cdots, u_n, s, a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 这解不仅依赖于自变量, 而且也依赖于 $n$ 个参数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 且对于它来说, $|J_{u_\nu a_\mu}|$ 在所论域内不为零. 要做出典范变换, 取函数 $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ 作为 $W(u_\nu, \omega_\nu, s)$ 由 (5) 就得到典范变换

$$v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}, \quad \eta_\nu = -\frac{\partial J}{\partial \omega_\nu}, \quad \Lambda = L(v_\nu, u_\nu, s) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

因为方程 $J_s + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) = 0$ 对于 $v_\nu = \dfrac{\partial J}{\partial u_\nu}$, $u_\nu$ 和 $s$ 恒成立, 故有 $\Lambda \equiv 0$. 新的

典范微分方程是

$$\dot{\omega}_\nu = 0, \quad \dot{\eta}_\nu = 0,$$

它们的解是

$$\omega_\nu = a_\nu = \text{常数},$$
$$\eta_\nu = J_{a_\nu} = b_\nu = \text{常数};$$

这就是 Hamilton-Jacobi 定理的结论.

### 2.10.3　常数的变易 (典范扰动理论)

典范变换的另一个应用是典范扰动理论, 这理论对于天文学及物理学是很有意义的. 假定函数 $L$ 表现为和式

$$L = L_1(v_\nu, u_\nu, s) + L_2(v_\nu, u_\nu, s), \tag{7}$$

并假定具有函数 $L_1$ 的典范微分方程的积分已经做出, 也就是已经得到偏微分方程

$$J_s + L_1\left(\frac{\partial J}{\partial u_\nu}, u_\nu, s\right) = 0$$

的完全积分 $J(u_\nu, a_\nu, s)$. 然后将对应于函数 $L$ 的典范微分方程作变换, 选取 $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ 代替 $W$ 作为这典范变换中的母函数. 换句话说：用

$$v_\nu = J_{u_\nu}, \quad \eta_\nu = -J_{\omega_\nu}$$

引入典范共轭变量并引入新的 Legendre 函数

$$\Lambda = L + J_s = L - L_1 = L_2,$$

如果 "扰动项"$L_2$ 不出现, 就是说, 如果 $L_2$ 等于零, 那么, 根据 2.10.2, 对于微分方程组的每条轨线, 新的典范共轭变量将为常数. 由于有扰动项 $L_2$ 的缘故, 它们变成满足典范 "扰动方程"

$$\dot{\omega}_\nu = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_\nu}, \quad \dot{\eta}_\nu = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_\nu} \tag{8}$$

的新变量.

在某些情形下, 用这种积分问题的分解法可将问题大大简化.

# 第 2 章附录 I

## 2′.1　特征流形的进一步讨论

下面将采取稍微不同的路线并用一种可推广到高阶微分方程的方法引入特征.

### 2′.1.1　关于在 $n$ 维空间中求导的一些注释

在自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的域中, 考虑具有连续导数的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 在坐标为 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 的点 $P$ 处, 所给出的表示矢量 $a$ 的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 应使得

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0.$$

经过点 $P$, 做一条直线, 它上面各点的坐标用参数 $s$ 表示为

$$x_1^0 + a_1 s, x_2^0 + a_2 s, \cdots, x_n^0 + a_n s.$$

那么

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}$$

就定义为函数 $u$ 关于 $s$ 的导数, 或 $u$ 在矢量 $a$ 所给出的 "方向" 上的导数. 所以, 在每个点处, 符号

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

就表示沿矢量 $a$ 的方向求导[①].

---

① 如果量 $a_i$ 是位置的连续可微函数

$$a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

那么在空间的每一点由 $a_i$ 所规定的方向就形成一个方向场, 这个场的轨线由常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

唯一地定出. 因此 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 表示关于参数 $s$ 的导数. 这里 $s$ 不必是轨线的弧长, 不过, 如果弧长用 $\sigma$ 表示的话, 那么 $\sigma$ 与 $s$ 就由方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 联系着. 函数 $u$ 在曲线上关于弧长 $\sigma$ 的导数由下式给出:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

在 $n$ 维空间考虑 $(n-1)$ 维曲面 $B:\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 及函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 该函数的导数在 $B$ 的某邻域内是连续的. 再设 $P$ 是 $B$ 上一点, 在此点处

$$\sum_{i=1}^{n}\phi_{x_i}^2\neq 0,$$

并设 $a$ 是不为 0 的任意矢量. 现在考虑 $u$ 在 $B$ 上沿 $a$ 所给定的方向的导数:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}a_i u_{x_i}. \tag{1}$$

如果方程

$$a_i=\lambda\phi_x\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

成立, 那么 (1) 就叫做“沿法线方向”的导数; 特殊情形, 如果 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$, 因而

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_{x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\phi_{x_i}^2}}u_{x_i},$$

那么就叫做 $a$ 在 $P$ 处的“法向”导数.

如果矢量 $a$ 在 $P$ 处切于 $B$, 且垂直于 $P$ 处的法线 —— 就是说, 如果

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\phi_{x_i}=0$$

—— 那么, $\frac{\partial u}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}a_i u_x$ 就叫做“切向”导数, 或 $B$ 上的“内”导数, 并说是“位于曲面 $B$ 上”的; 另一方面, 如果 $\sum_{i=1}^{n}a_i\phi_{x_i}\neq 0, \frac{\partial u}{\partial s}$ 就叫做“外”导数, 并说是“引向 $B$ 外”的.

例如, 表达式

$$\phi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}-\phi_{x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2}$$

对于每对 $i\neq k$ 的下标表示在曲面内的导数; 可将 (2) 解释为沿如下的方向求导, 这方向是由通过 $P$ 而沿 $x_i$ 方向及 $x_k$ 方向延伸出来的二维平面切割曲面 $\phi=0$ 而得到的.

$u$ 在曲面上的内导数只依赖于 $u$ 在该曲面上的数值的分布; 所以, 只要知道了 $u$ 在曲面 $B$ 上的数值, 也就知道了这些内导数. 因为, 如果在 $B$ 的邻域上引入新的

独立变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 来代替 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 并使得 $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ 是 $B$ 内的 $n-1$ 个独立参数且 $\xi_1 = \phi$, 那么有 $u_x = u_\phi \phi_{x_i} + \cdots$, 后面几个点表示只包含 $u$ 关于内参数 $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ 的导数的那些式子. 所以, 在条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{x_i} = 0$ 下, 只要给定了 $u$ 在 $B$ 上的值 $u(0, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$, 就得知了表达式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = u_\phi \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{x_i} + \sum_{k=2}^{n} u_{\xi_k} \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_{k_{x_i}}.$$

显然, 由 $u$ 在 $B$ 上的 $n-1$ 个互相独立的内导数 $\left(\text{例如}, \phi_{x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_n} - \phi_{x_n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \phi_{x_n} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n-1\right)$ 和一个外导数 (例如 $u_\phi$), 通过线性组合, 就能得到 $u$ 的所有导数. 因此, 只要在 $B$ 上给出了函数 $u$ 和 $u$ 的一个外导数, 那么 $u$ 的所有导数就都知道了.

特殊情形, 如果 $n = 2$, 且 $x_1 = x, x_2 = y$, 那么 $B$ 就是 $x, y$ 平面上的一条曲线, 它可以用参数 $\tau$ 的两个函数 $x(\tau)$, $y(\tau)$ 表示出来. 在这种情形下, 能 $B$ 上求内导数的条件就是 $a_1 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} - a_2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = 0$, 或者, 选择一个适当的参数 $t$ 取代 $\tau$ 之后, 就是

$$a_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

### $2'.1.2$ 初值问题. 特征流形

现在把给出初值问题的叙述法 (参考 2.7) 修改一下, 变为 $n$ 维 $x$ 空间的说法. 设在这个空间内用关系式

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{3}$$

给出了一个 $(n-1)$ 维的基流形 $B$. 首先 (参考 2.7), 这流形是由作为 $n-1$ 个独立参数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 的函数的 $n$ 个坐标 $x_i$ 表示出来的. 在这个流形 $B$ 的各点处指定函数值 $u = u(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ 而将 $B$ 扩大为 $x, u$ 流形 $C$. 同样, 再增加变数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 的 $n$ 个函数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 它们在 $B$ 上满足成带条件

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}x_i \tag{3a}$$

或写成参数形式

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu},$$

就能将 $B$ 扩大为带流形 $C_1$.

我们提出下列问题而不再研究初值问题的解本身：考虑具有给定的 $u$ 值, 或具有给定的 $u$ 值和 $p_i$ 值的初始流形 $B$. 假定微分方程 $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$ 在 $B$ 的某个任意小邻域内, 被带有给定初始值的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所满足. 问：沿着初始流形 $B$, 微分方程对函数 $u$ 和它的各个导数肯定了什么?

首先, 拟线性微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a \tag{4}$$

在给定了初始函数 $u$ 的流形 $B$ 上某点处, 由关系式 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = a_i$ 在 $n$ 维 $x$ 空间规定了沿一个特殊方向的求导法 $\dfrac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. 在这点处的求导法和它的方向叫做特征求导法和特征方向. 这样一来, 微分方程就表示

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = a; \tag{5}$$

也就是, 它给出了 $u$ 沿着 $B$ 的特征导数的值, 因为右边在 $B$ 上是已知的.

下列两岐命题 (二种情形之一必定出现)：在 $B$ 的所论点处, 或者等式

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{x_i} \neq 0 \tag{6}$$

成立, 或者等式

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{x_i} = 0 \tag{7}$$

成立.

如果等式 (6) 成立, 那么特征方向在此点处引向流形 $B$ 处. 方程 (5), 从而微分方程 (4) 就产生 $u$ 的一个外导数. 因此, $u$ 在 $B$ 上或在 $B$ 的所讨论点处的所有一阶导数, 只由 $u$ 在 $B$ 上的值以及微分方程而确定. 若将此结果应用于对自变量微分后的微分方程, 例如对 $x_k$ 微分后的微分方程, 就得知 $u$ 沿着 $B$ 的高阶导数也是唯一确定的.

如果称为特征条件 的等式 (7) 成立, 那么 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ 就是 $B$ 上的内导数, 并且由于 $u$ 指定在 $B$ 上而得知了 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$. 因此, 关系式 (5) 表示 $u$ 指定在 $B$ 上的条件; 如果偏微分方程的解 $u$ 在 $B$ 的邻域存在且在 $B$ 上取得给定的初始值的话, 那么这个约束条件应当满足. 如果在 $B$ 的每个点 $P$ 处, (5) 和 (7) 两个关系式都满足, 那它们和 $u$ 一起描绘出 $B$ 是 特征(基)流形①.

① 容易看出, 表达式 $\gamma$ 和 2.7 中讨论过的行列式只差一个非零的因子; 因此上面对特征流形的描述和前面的定义是等价的.

换句话说：在给定的基流形 $\phi=0$ (在其上 $u$ 的值是任意指定的) 的点 $P$ 处，微分方程或者以唯一的方式定出 $u$ 的相应的导数，或者对已知的初始值 $u$ 给予一个限制①.

对于 2.7 的一般微分方程 (1)：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0$$

有类似的论述. 将这个方程对自变量微分②并引用 $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial x_i}=\dfrac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$, 得到对导数 $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial x_i}$ 是线性的微分方程组：

$$\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}+F_u p_i+F_{x_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{8}$$

用这个 (拟线性) 方程组来代替 2.7 的 (1). 仍取基流形 $B:\phi=0$ 作为初始流形. 假定在 $B$ 上已给的函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\cdots$, $p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都服从条件 $F=0$ 和成带条件 (3a)

$$\mathrm{d}u=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\mathrm{d}x_\nu.$$

在 $B$ 的各点处仍用

$$\frac{\partial}{\partial s}=\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{9}$$

规定特征求导. 于是在 $B$ 上关系式 (8) 变为

$$\frac{\partial p_i}{\partial s}=-F_{x_i}-p_iF_u. \tag{10}$$

在 $B$ 的某点处它们导致如下的两岐命题：或者方程

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}\phi_{x_i}F_{p_i}\neq 0 \tag{11}$$

成立, 或者方程

$$\sum_{i=1}^{n}\phi_{x_i}F_{p_i}=0 \tag{12}$$

成立.

如果方程 (11) 成立, 那么求导 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 引向 $B$ 的外面, 而关系式 (10) 给出 $p_i$ 沿着

① 这里的两岐命题是与线性方程组的两岐命题相似的 (参考卷 I 第 1 章).

② 这种线性化的方法常常起着重要的作用.

$B$ 的外导数, 因为根据初始数据右边是已知的. 这样一来, $u$ 的所有二阶导数就由微分方程和初始数据沿着 $B$ 而唯一地确定.

如果在 $B$ 的各点满足特征条件 (12), 那么 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 是内求导. 这回, 根据已知数据, 左边也可得到, 所以关系式 (10) 说明 $B$ 上的数据除了应满足 (3a) 之外, 还应满足进一步的条件

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

如果在 $B$ 上处处有 $\gamma = 0$, 并且附加的特征条件 (10) 及成带条件 (3a) 满足的话, 那么 $B$ 就叫做属于带流形的特征基流形, 这个带流形是将数值 $u$ 和 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 赋予 $B$ 而形成的. 容易看出, 这个新定义和 2.7 中给出的定义是等价的.

特征条件还可以用其他方法形式地得出. 例如, 可从下列事实出发: 在 $B$ 上处处有 $\phi_{x_n} \neq 0$ 时, 表达式

$$p_i \phi_x - p_n \phi_{x_i} = A_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{13}$$

是 $u$ 的内导数, 并因此, 只要 $u$ 预先指定时, 它们就立即得知了. 所以可从 $n-1$ 个表达式 (13) 和方程

$$F(x_i, u, p_i) = 0$$

来算一算 $p_i$ 沿着 $B$ 的值. 如果这 $n$ 个关于 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的方程的 Jacobi 式:

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & \cdots & F_{p_{n-1}} & F_{p_n} \\ \phi_{x_n} & 0 & \cdots & 0 & -\phi_{x_1} \\ 0 & \phi_{x_n} & \cdots & 0 & -\phi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{x_n} & -\phi_{x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \left( \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \phi_{x_i} \right) \phi_{x_n}^{n-2}.$$

等于 0 的话, 这种算法就不是唯一可能的. 所以, 量 $p_i$ 不能唯一确定的条件等价于特征条件 (12).

最后一个关于特征条件的注解是在非线性的情况下, 只要将 $u$ 和 $p_i$ 用适当的函数替换后, 这个方程就变成有意义的了. 例如, 在已给的积分曲面 $J : u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 上考虑特征流形时就是这样. 如果将 $F_{p_i}$ 中的 $u$ 和量 $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 表示成自变量 $x_i$ 的函数, 那么关系式 (12)

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \phi_{x_i} = 0$$

—— 假定它满足的话 (不需要对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒成立, 只需假定 $\phi = 0$ 时成立) —— 就说明定义在 $J$ 上的流形是特征流形. 如果这关系式不仅对 $\phi = 0$ 满足, 而

且对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒满足, 那么它就变成对函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的齐次线性微分方程. 于是它就规定了一个单参数的特征流形族 $\phi = c =$ 常数, 这个流形族产生 $J$ (参考第 1 章 1.5.2). 如果把关系式 (12) 写成偏微分方程, 假定只限于对一个流形 $\phi = 0$, 就把流形看做如下的形式：

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) - x_n = 0,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 是自变量. 如果在 (12) 中处处以函数 $\psi$ 代替 $x_n$ 并记

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \psi_x, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \psi_{x_2}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x-1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = -1,$$

那么就得到对于 $\psi$ 的只含 $n-1$ 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的真正的偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i} \psi_{x_i} - F_{p_n} = 0. \tag{14}$$

最后要注意到, 偏微分方程 (7), (12) 或 (14) 的特征曲线是和原来方程的特征曲线一样的.

## 2′.2 具有相同主要部分的拟线性微分方程组. 理论的新推演

由于对拟线性微分方程组

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\kappa} = b_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, m) \tag{1}$$

的研究, 指出了一条与第 2 章 2.7 的讲法稍有不同的通往特征理论的路径.

系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_\mu$ 一样都依赖于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_m$, 它们在 (1) 的所有方程中是相同的. 称这样一组微分方程是有相同主要部分的.

先证明下面的定理 (参考第 1 章 1.5.2)：具有相同主要部分的 (形如 (1) 的) $n$ 个自变量的 $m$ 个拟线性微分方程的组等价于一个 $m+n$ 元函数的齐次线性微分方程.

设用隐形式给出 (1) 的依赖于参数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 的一个解组 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 如下

$$\begin{gathered} \phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_m) = c_1, \\ \cdots\cdots \\ \phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_m) = c_m. \end{gathered} \tag{2}$$

为了肯定能够算出函数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$, 设 Jacobi 式

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_m)}$$

处处不为零. 对 (2) 中各方程求导, 得到

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\kappa}+\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa}=0 \quad \begin{pmatrix}\mu=1,2,\cdots,m\\ \kappa=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}.$$

乘以 $a_\kappa$ 并从 $\kappa=1$ 到 $\kappa=n$ 加起来, 得到

$$\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\kappa}+\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}\left(\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa}\right)=0;$$

于是, 根据 (1) 得

$$\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\kappa}+\sum_{\lambda=1}^{m}b_\lambda\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}=0. \tag{3}$$

因为 (2) 中的诸函数 $\phi=\phi_\mu$ 对于 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_m$ 恒满足 (3); 也就是, 它们对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_m$ 都恒满足同一个线性微分方程

$$\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa}+\sum_{\lambda=1}^{m}b_\lambda\frac{\partial \phi}{\partial u_\lambda}=0. \tag{3a}$$

若引入记号

$$b_\lambda=a_{n+\lambda},\quad u_\lambda=x_{n+\lambda},\quad r=m+n,$$

则 (3a) 变成对于函数 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 的微分方程

$$\sum_{\kappa=1}^{r}a_\kappa\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa}=0; \tag{3b}$$

因此, 定理的第一部分证完.

反之, 设已知微分方程 (3b) 的 $m$ 个解 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$, 它的 Jacobi 式

$$\frac{\partial(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m)}{\partial(x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_r)}$$

无处为零. 首先, 证明由方程

$$\phi_\mu(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)=c_\mu$$

算出的函数 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 满足方程组 (1). 先将诸函数微分得到方程

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\kappa}+\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa}=0.$$

再乘以 $a_\kappa$ 并从 $\kappa=1$ 到 $\kappa=n$ 加起来, 利用 (3), 就得到

$$\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda} = \sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{m} a_\kappa \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa}$$

或

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda}\left(b_\lambda - \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa}\right) = 0.$$

因为量 $\dfrac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda}$ 的行列式不为零, 所以方程

$$b_\lambda - \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} = 0$$

成立, 即满足了方程组 (1).

根据第 2 章 2.2, 线性微分方程 (3c) 的积分等价于特征微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_\kappa}{\mathrm{d}s} = a_\kappa \quad (\kappa = 1,2,\cdots,r)$$

的积分. 于是得知, 具有相同主要部分的偏微分方程组 (1) 等价于 $m+n$ 个常微分方程的组, 即方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x_\kappa}{\mathrm{d}s} = a_\kappa \quad (\kappa = 1,2,\cdots,n),\\ &\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}s} = b_\lambda \quad (\lambda = 1,2,\cdots,m). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

利用这些结果再去发展一般的一阶微分方程的特征理论. 考察微分方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n}) = 0, \tag{5}$$

并用如下的由函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 作成的、具有相同主要部分的、对 $u,p_1,\cdots,p_n$ 的 $n+1$ 个拟线性微分方程的组来代替它:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu} + F_u p_i + F_x = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} p_\nu = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

这些方程中的前 $n$ 个可由 (5) 对 $x_i$ 微分并用 $p_i$ 代 $u_{x_i}$, 用 $\dfrac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$ 代 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\nu}$ 而形式地得到. 用这种代换就使最后一个方程变成当然的了.

从这个具有相同主要部分的拟线性微分方程组 (6) 出发, 就能推出对于 $n+1$ 个未知函数 $u, p_i$ 的微分方程 (5) 的理论. 首先由前面的注解得知 (6) 的积分等价于常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = F_{p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -F_x - p_i F_u, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F_{p_\nu} \tag{7}$$

的积分, 即等价于对 $F$ 用不同于第 2 章 2.7 的方法导出的特征微分方程的积分. 进一步证明, 方程组 (6) 的一个适当特殊化了的初值问题等价于微分方程 (5) 的一个初值问题; 这就给第 2 章 2.7 中用特征微分方程 (7) 所提出的初值问题的解准备了新的基础.

显然, 首先对于微分方程 (5) 的每个解来说, 函数 $u$ 和 $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 是 (6) 的一个解. 现在反过来考虑微分方程组 (6) 的满足如下初始条件的一个解组 $u, p_i$: 设 $C$ 是 $x, u$ 空间的一个无处为特征的 $(n-1)$ 维初始流形. 设在 $C$ 上给定了 $p_i$ 的初始值使得在 $C$ 上处处有 $F=0$, 并使得在 $C$ 上有

$$\mathrm{d}u - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \mathrm{d}x_\nu = 0. \tag{7a}$$

再设微分方程组 (6) 的经过 $C$ 上各点且符合 $p_i$ 的相应初始值的那些解构成一个 $n$ 维曲面 $S$, 这曲面包含 $C$ 并用

$$u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

给出. 那么这个函数 $u$, 连同相应的函数 $p_i$ 一起, 的确是 (6) 的相应初值问题的解.

现在证明它也解决了 $F=0$ 的初值问题. 为解决这个问题, 只需证明在曲面 $S$ 上处处满足关系式

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = R(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

$$p_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - u_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

已知关系式

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial P_\kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial P_\kappa}{\partial x_i} \tag{8}$$

对于函数 $P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 成立, 并且有

$$R_{x_1} = \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i},$$

所以, 在 (6) 的前 $n$ 个微分方程和方程 (8) 的基础上, 有

$$R_{x_i}=\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i}-\frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}\right)-F_uP_i. \tag{9}$$

另一方面, (6) 中末一个微分方程可写成

$$0=\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}P_\nu. \tag{10}$$

因此得到

$$\sum_{i=1}^{n}R_{x_i}F_{p_i}=0,$$

采用简写符号

$$F_{p_i}=a_i,$$

函数 $a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 看做是已知的系数, 则得

$$\sum_{i=1}^{n}a_iR_{x_i}=0. \tag{10a}$$

现在在积分曲面 $S$ 上, 考虑由 (7) 所规定的形成这个曲面的那些曲线. 方程 (10a) 断定, 在这些曲线的每一条上,

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=0;$$

也就是, 因为在 $C$ 上初始点处 $R$ 为零, 所以在 $S$ 上有

$$R\equiv 0. \tag{11}$$

再由方程 (9) 得到

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i}+P_iF_u=0, \tag{12}$$

而方程 (10)

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu P_\nu=0$$

对 $x_i$ 微分后就得到关系式

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{n}b_{i\nu}P_\nu=0, \tag{13}$$

这里 $b_{i\nu}=\dfrac{\partial a_\nu}{\partial x_i}$ 仍然是变量

$$x_1,x_2,\cdots,x_n$$

的已知函数. 将 (12) 和 (13) 加起来, 得到如下的方程

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

这里量 $c_{i\nu}$ 也是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的已知函数. 在特征曲线 $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ 的每一条上, 这些方程变为

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}s} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} P_\nu = 0,$$

这是函数 $P_i$ 的齐次线性常微分方程组. 不过, 由 (10) 和初始条件 (7), 得到如下的结果：因 $C$ 不是特征, 所以在 2.7 中定义的行列式 $\Delta$ 不为零. $P_i$ 的初始值在 $C$ 上为零, 因此这些函数恒等于零. 这样, 关于 (6) 和 (5) 的初值问题的等价性就完全证明了.

## $2'.3$ Haar 的唯一性的证明

本章 2.7 中所推演的单个的非线性一阶方程的解以特征带的概念为基础, 必须假定解的一阶导数 $p$ 和 $q$ 是可微的. 不过, 微分方程解的概念预先只假定一阶导数是连续的. 前面解的存在性的证明在这种较弱然而是自然的条件下是不成立的. 因此, 至少对两个自变量来说, Haar 所建立的唯一性是值得注意的①：如果只假定了一阶导数的连续性, 那么初值问题至多有一个解.

现在就方程 $u_y = G(x, y, u, u_x)$ 来考察一下, 其中假定 $G$ 关于 $u$ 和 $p$ 满足 Lipschitz 条件. 设 $u$ 和 $v$ 是在区间 $y = 0, x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上相同的两个解, 则它们在整个三角形 $T: y \geqslant 0, y \leqslant \frac{x - x_1}{k}, y \leqslant \frac{x_2 - x}{k}$ 内是重合的, 这里 $k$ 是 $G$ 关于 $p$ 的 Lipschitz 常数.

证明：用 $w$ 表示 $u$ 与 $v$ 的差, $u$ 和 $v$ 是已给的微分方程的解. 将 $u_y = G(x, y, u, u_x)$ 和 $v_y = G(x, y, v, v_x)$ 相减并记住 $G$ 满足 Lipschitz 条件, 就得到一个关于 $w$ 的微分不等式：

$$|w_y| \leqslant \alpha |w| + k |w_x|,$$

其中 $\alpha$ 及 $k$ 是 $G$ 的 Lipschitz 常数. 注意到 $w$ 为正的那些点处这个不等式可写作

$$|w_y| \leqslant \alpha w + k |w_x|.$$

如果把常数 $\alpha$ 换成稍微大一点的 $\beta$, 就得到严格的不等式

$$|w_y| < \beta w + k |w_x|. \tag{1}$$

① 参考 A. Haar [1].

定义 $W = \mathrm{e}^{-\beta y w}$, 要求 $W$—— 因而 $w$ 也 —— 在 $T$ 内恒等于 0. 如果 $W$ 不恒为零, 那么它将取得正的或负的数值. 假定它取得正值, 并设它在 $T$ 内点 $P$ 处出现极大. $P$ 不能在 $T$ 的底边上, 因为此时 $W$ 等于零. 所以在 $P$ 点引出的方向 $(-k,-1)$ 和 $(k,-1)$ 必定在 $T$ 内, 而且这两个方向的导数是非正的:

$$-kW_x - W_y \leqslant 0, \quad kW_x - W_y \leqslant 0;$$

因此, 在 $P$ 处

$$W_y \geqslant k|W_x|.$$

把这个式子写成原来的变量 $w$, 得

$$w_y \geqslant \beta w + k|w_x|,$$

这与 (1) 矛盾.

若假定 $W$ 在 $T$ 内取负值, 同样可得出矛盾. 因此, 必像前面所说的在 $T$ 内 $u = v$.

再者, Plis 曾经证明, 对于两个自变量的方程来说, 每个只具有连续一阶导数的解可由特征带做成①.

① 参考 A. Plis [2].

# 第 2 章附录 II　守恒定理的理论[①]

在第 2 章中, 已经对于单个的一阶拟线性方程解出了非特征的初值问题. 所得到的存在定理是局部的, 即它只证明了在初始曲线的某个邻域内解的存在性. 进而在 2.1 中作出了具有一条脊线的积分曲面, 这表明在大范围内光滑解不一定存在.

在本附录中, 将进一步研究出现间断性限制着存在域的问题. 然后指出微分方程的解总是可以越过它们的奇异点而延拓出去的, 只要把微分方程解释为 "守恒定律".

考虑形如

$$u_t = au_x \tag{1}$$

的拟线性方程, $a = a(u)$ 是 $u$ 的函数. 这种方程的解的奇异性可能由在直线 $t = 0$ 上的初始值依如下的方式产生:

根据特征理论, 每个解沿着每条特征曲线保持为常数. 特征曲线的斜率是 $-\dfrac{1}{a(u)}$, 既然 $u$ 沿着特征曲线是常数, 所以这斜率也是常数, 并且得知所有的特征曲线都是直线.

由初始直线 $t = 0$ 上每一点出发有一条特征线, 它的斜率由 $u$ 在 $x_1$ 处的值确定. 假定在初始线上有一对点 $x_1$ 和 $x_2$, 例如, $x_1 < x_2$, 这里 $u$ 的预先给定的值 $u_1$ 和 $u_2$ 使得

$$a(u_1) < a(u_2).$$

那么由 $x_1$ 及 $x_2$ 出发的特征线就在时刻 $t = (x_1 - x_2)/(a(u_1) - a(u_2))$ 相交. 因为 $u$ 沿着这两条特征线有不同的数值, 这表明超出这个时刻以外, $u$ 不能定义为连续的解.

由下列关于方程 (1) 的具有初始值 $u(x, 0) = \phi(x)$ 的解的隐性公式:

$$u - \phi(x + ta(u)) = 0$$

也可得知奇异性出现或不出现. 根据隐函数定理, 当

$$u - \phi(x + ta(u))$$

关于 $u$ 的导数不为零时, 即

$$ta'\phi' \neq 1$$

① 对于这个重要课题的更一般的讨论见第 5 章 5.9 及第 6 章 6.4.9.

时, $u$ 是 $x$ 和 $t$ 的正则函数. 对于足够小的 $t$, 这个条件是满足的, 但当 $t$ 变大时, 这个条件将受到破坏 (若 $a'$ 与 $\phi'$ 有相同的正负号, 则这个 $t$ 值是正的, 否则 $t$ 是负的). 在条件遭到破坏的点处可以期望 $u$ 变成奇异的.

前面的一些例子表明拟线性方程的解一般在大范围内不存在. 但是有一个在大范围内对于守恒定律的解的理论.

对于单独一个函数的守恒定律是形如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} u\mathrm{d}x = f(u(x_2), x_2, t) - f(u(x_1), x_1, t) \tag{2}$$

的一个方程, 其中 $f$ 是 $u, x$ 和 $t$ 的已知函数. 这个方程说明：由函数 $u$ 所表示的且包含于区间 $(x_1, x_2)$ 内的总量的变化率等于 $u$ 通过区间端点的流量 $f$. 这是物理中忽略消耗的机械作用的那些定律的形式, 因此表示一种守恒现象.

如果 $u$ 是守恒定律 (2) 的可微分解, 那么守恒定律 (2) 可用拟线性微分方程

$$u_t = f_u u_x + f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(u, x, t) \tag{2a}$$

来表示, 这方程是将 (2) 对 $x_1$ 微分后令 $x_1 = x_2 = x$ 而得到的. 不过, 下面将证实, (2) 也有间断解. 加入了间断解之后, 将证明在间断的函数类中守恒定律 (2) 在大范围上有解, 而微分方程 (2a) 是没有的.

在第 5 章和第 6 章中将对任意维数的守恒定律组进行 “激波” 间断性的研究, 并且单个的守恒定律的间断解的定性性质和物理上更有趣的守恒定律组的性质是一样的.

假定 $f$ 不明显依赖于 $x$ 和 $t$, 并且将 $f_u$ 缩写为 $a = a(u)$. 设 $u(x,t)$ 是分段可微的函数, 它是积分方程 (2a) 的一个解. 那么 $u$ 必定是微分方程

$$u_t = au_x$$

的解, 因而 $u$ 总是可微分的. 令 $x_1$ 及 $x_2$ 从相反的两侧趋向间断点, 得到 (详见第 5 章 5.9) “跳跃关系”

$$[f] = -U[u], \tag{3}$$

其中 $U$ 是间断性的传播速率, 而符号 $[g]$ 表示跨过量 $g$ 的间断性的跃度. 在小的间断的情形下, 有

$$U = -\frac{[f]}{[u]} \approx -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = -a.$$

因为 $-a$ 是对应于特征线方向的速率, 所以得知小的间断接近特征的速率传播.

考虑例子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u = \frac{1}{2}u^2(x_2) - \frac{1}{2}u^2(x_1). \tag{4}$$

微分后得到

$$u_t = uu_x.$$

用 $u$ 除后得到

$$\frac{u_t}{u} = (\log u)_t = u_x. \tag{5}$$

用 $v$ 表示 $\log u$, 可把 (5) 改写为守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int v = \exp v(x_2) - \exp v(x_1), \tag{5a}$$

对于守恒定律 (4) 的跳跃关系 (3) 是

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = -U. \tag{6}$$

其中 $u_1$ 和 $u_2$ 表示 $u$ 在间断线两侧的值. 对于 (5a) 跳跃关系是

$$\frac{\mathrm{e}^{v_1} - \mathrm{e}^{v_2}}{v_1 - v_2} = -U.$$

由这两个间断条件可得结论：若 $u$ 是 (4) 的间断解, 则 $v = \log u$ 不是 (5a) 的解. 可以说跳跃关系在因变量改变下不是不变的, 像 (4) 和 (5a) 这两个守恒定律, 对于光滑解来说对应着同样的微分方程, 但作为守恒定律对于间断解来说, 它们不一定是等价的.

下面用一个例子来说明守恒定律的解不能由它们的初始数据而唯一地确定. 仍旧采用守恒定律 (4). 函数

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 2x < -t, \\ 0, & \text{当 } -t < 2x \end{cases}$$

是 (4) 的间断解, 因为在直线 $2x = -t$ 的任一侧, $u$ 是常数, 因而是方程 (4) 的光滑解, 而且跨过间断线 $2x = t$ 时, 跳跃条件 (6) 得到满足. 另一方面, 函数

$$u'(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < -t, \\ \dfrac{-x}{t}, & \text{当 } -t < x < 0, \\ 0, & \text{当 } 0 < x \end{cases}$$

对于正的 $t$ 是连续的, 而且除了在直线 $x = 0$ 及 $x = -t$ 上外, 处处都满足微分方程. 由此利用积分容易证明 $u'$ 是 (4) 的连续解. $u$ 和 $u'$ 这两个解在 $t = 0$ 时有相同的值. 更一般地, 可以证明, 对于任意指定的初始数据, 存在无穷多个间断解, 它们具有同一指定的初始数据.

在所有这些具有相同初始值的解中, 只有一个有物理意义. 这个解称为可容许的解.

现在所需要的是描绘可容许解的一个数学原理. 这个原理已经在前面推导越过特征线出现间断性的讨论中给出了. 如果一种间断性阻止特征线交叉, 那么它便是可容许的. 因此有如下的法则: 如果从每条间断线的任一侧出发向前引出的特征线与该各间断线是交叉的, 那么这间断解就是可容许的. 这条件的解析意义是, 对于可容许的间断性有

$$-a(u_L) \geqslant U \geqslant -a(u_R).$$

其中 $u_L$ 和 $u_R$ 各表示 $u$ 在间断线的左侧和右侧的值, 而 $U$ 表示间断性的传播速度.

P. Germain 和 R. Bader[①] 曾经证明在 $t = 0$ 时相同的两个可容许的间断解是恒等的. 可容许性的更一般的定义和更一般的唯一性定理是由 O. A. Oleinik[②] 给出的.

对于守恒定律组的解的间断性可写出一个类似的可容许性的条件. 把这个条件运用于可压缩流体流动的方程时, 这个条件就等价于如下的论点: 越过间断处流动的熵是增加的.

现在对守恒定律的具有任意指定的初始值的可容许解给出一个显式. 这个公式是由 E. Hopf[③], O. A. Oleinik[④] 和 P. D. Lax[⑤] 给出的. 假定 $a(u)$ 是 $u$ 的单调函数, 这就是说 $f(u)$ 是凸的或者凹的.

用公式

$$g(s) = \underset{u}{\mathrm{Max}}(\mathrm{Min})\{us + f(u)\}$$

定义 $g(s)$ 为凸 (或凹) 函数 $f(u)$ 的共轭函数; 定义 $b(s)$ 为 $g$ 对 $s$ 的导数. 设 $\phi(x)$ 是指定的初始值

$$u(x, 0) = \phi(x).$$

定义 $\Phi(y)$ 为 $\phi$ 的积分, 即

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y} = \phi(y).$$

考虑函数

$$\Phi(y) + tg\left(\frac{x - y}{t}\right),$$

① 参考 P. Germain 和 R. Bader [1.]

② 参考 O. A. Oleinik [2] 和 [3].

③ 参考 E. Hopf [3].

④ 参考 O. A. Oleinik [1].

⑤ 见 P. D. Lax [3].

对于固定的 $x$ 和 $t$, 它是 $y$ 的连续函数. 容易证明, 当 $t$ 固定时, 除去 $x$ 值的一个可数集外, 这函数对 $y$ 来说有唯一的极大 (或极小), 用 $y_0(x,t)$ 表示它的位置. 定义

$$u(x,t) = b\left(\frac{x-y_0}{t}\right), \tag{7}$$

并且断定：

由公式 (7) 所规定的函数 $a$ 是 (1) 的具有初始值 $\phi$ 的可容许解.

对于这个结论的验证问题以及由此公式所带来的解的更深入的属性, 见 P. D. Lax[1]. 对于守恒定律中 $f$ 的更少限制的存在定理已由 A.S.Kalashnikov[2]给出.

① 参考 P. D. Lax [2].
② 参考 A. S. Kalashnikov [1].

# 第 3 章　高阶微分方程

高于一阶的偏微分方程的问题形色繁多, 以致不可能建立统一的一般理论 (如第 2 章). 在所谓 "椭圆型"、"双曲型" 和 "抛物型" 几种类型的微分方程之间存在着根本的差异, 它们的解的构造和性质各有其迥然不同的特点[①].

在本章中, 将以物理学上有趣的例子为引导, 来介绍此种分类. 此外, 还将初步讨论引向解决有关问题的方法. 以后各章将主要论述椭圆型和双曲型问题的系统理论[②].

下列关于函数 $u(x, y, z)$ 的几个古典的二阶微分方程可以作为各种类型的代表:

$$\begin{aligned}
&\text{Laplace方程 (椭圆型):} \quad && u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,\\
&\text{波动方程 (双曲型):} && u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0,\\
&\text{传热方程 (抛物型):} && u_z = u_{xx} + u_{yy}.
\end{aligned}$$

## 3.1　两个自变量的二阶线性和拟线性微分算子的标准形式

对于两个自变量的二阶线性或拟线性微分方程 (或由两个一阶微分方程构成的相应的方程组) 来说, 可以通过明显的初等运算来进行分类而无需求诸一般理论. 此种分类源于试图化至简单的标准形式.

### 3.1.1　椭圆型、双曲型和抛物型的标准形式. 混合型

函数 $u(x, y)$ 的一个二阶线性微分算子是

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}, \tag{1}$$

其中系数 $a, b, c$ 是 $x$ 和 $y$ 的函数, 并假定它们在所论的区域 $G$ 上是连续可微的而且不同时为零. 考虑

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \cdots, \tag{2}$$

其中微分表达式 $g(x, y, u, u_x, u_y)$ 不一定是线性的, 但不包含二阶导数. 现在的目的是通过引入新的自变量

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{3}$$

---

① 关于更一般的抽象的探讨, 参考 L. Hörmander[4], B. Malgrange[1] 和 L. Ehrenpreis[1]. 关于最新问题的概述, 参考 I. G. Petrovskii[2].

② 也可参考 G. Hellwig[1] 的最新著述.

而把微分算子 (2) 或者相应的微分方程

$$L[u] + \cdots = 0 \tag{4}$$

化成简单的形式. 用 $u(\xi, \eta)$ 表示 $u(x, y)$ 被变换后的函数, 有下列关系式

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \phi_x + u_\eta \psi_x, \quad u_y = u_\xi \phi_y + u_\eta \psi_y, \\
&u_{xx} = u_{\xi\xi} \phi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \phi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + \cdots, \\
&u_{xy} = u_{\xi\xi} \phi_x \phi_y + u_{\xi\eta} (\phi_x \psi_y + \phi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + \cdots, \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi} \phi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \phi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

(各式后的三个点仍表示不包含 $u$ 的二阶导数的项.) 于是微分算子 (1) 具有下列形式

$$\Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\alpha = a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2, \\
&\beta = a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y, \\
&\gamma = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

此外, $a, b, c$ 和 $\alpha, \beta, \gamma$ 还适合

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^2, \tag{7}$$

和“特征二次型”的恒等式

$$Q(l, m) = al^2 + 2blm + cm^2 = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2,$$

其中变量 $l, m$ 和 $\lambda, \mu$ 在定点 $x, y$ 由下列线性变换联系着:

$$l = \lambda\phi_x + \mu\psi_x, \quad m = \lambda\phi_y + \mu\psi_y.$$

在变换 (3) 中, 可以任选函数 $\phi$ 和 $\psi$, 所以可对变换后的系数 $\alpha, \beta, \gamma$ 提出两个条件, 以使变换后的微分方程 (5) 取得简单的标准形式.

考虑下列条件组:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & \alpha = \gamma, \qquad \beta = 0, \\
\text{II.} & \alpha = -\gamma, \quad \beta = 0 \ \ (\text{或 } \alpha = \gamma = 0), \\
\text{III.} & \beta = \gamma = 0.
\end{array}\right\}$$

变换 (3)—— 当然假定它总是实的变换 —— 能满足这些条件之中的哪一个, 这要看二次型 $Q(l,m)$ 的代数性质如何, 或者用几何的语言来说, 对于一定的点 $(x,y)$, 取决于 $l,m$ 平面上的二次曲线 $Q(l,m)=1$ 的性质. 这曲线可以是一个椭圆, 一个双曲线, 或者一个抛物线. 相应地称算子 $L[u]$ 在点 $(x,y)$ 为

I. 椭圆型的, 当 $ac-b^2>0$,
II. 双曲型的, 当 $ac-b^2<0$,
III. 抛物型的, 当 $ac-b^2=0$.

微分算子的相应的标准形式是

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad \Lambda[u]=\alpha(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})+\cdots,\\
&\text{II.}\ \begin{cases}\Lambda[u]=\alpha(u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta})+\cdots, \text{ 或}\\ \Lambda[u]=2\beta u_{\xi\eta}+\cdots,\end{cases}\\
&\text{III.}\ \Lambda[u]=\alpha u_{\xi\xi}+\cdots,
\end{aligned}$$

而微分方程的标准形式是

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=0,\\
&\text{II.}\ \begin{cases}u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\cdots=0, \text{ 或}\\ u_{\xi\eta}+\cdots=0,\end{cases}\\
&\text{III.}\ u_{\xi\xi}+\cdots=0.
\end{aligned}$$

当取定 $x,y$ 时, 恒可用化 $Q$ 为标准形式的线性变换把微分方程化为相应的标准形式. 不过, 假定算子 $L$ 在区域 $G$ 的每一点上是属于同一个类型的, 希望找出函数 $\phi$ 和 $\psi$. 它们在 $G$ 的每一点上都把 $L[u]$ 化为标准形式, 能否办到这一步, 取决于某个一阶线性偏微分方程组是否可解.

不失一般性, 假定 $a\neq 0$ 在区域 $G$ 内处处成立[①] 或者等价的假定 $c\neq 0$ 成立, 或者所论的式子已经就是第 II 种标准形, 式之一.

为了确定在整个区域 $G$ 上的变换关系 $\phi$ 和 $\psi$, 先假定 $L[u]$ 在 $G$ 上是双曲型的, 因而新的系数应适合条件 $\alpha=\gamma=0$. 于是 (6) 给出关于导数之比 $\phi_x/\phi_y$ 和 $\psi_x/\psi_y$ 的值 $\lambda/\mu$ 的二次方程

$$Q=a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2=0. \tag{8}$$

若 $L[u]$ 在 $G$ 上是双曲型的, 则 $ac-b^2<0$, 所以方程 (8) 有两个不同的实根 $\lambda_1/\mu_1$ 和 $\lambda_2/\mu_2$. 因为 $a\neq 0$. 假定

$$\mu_1=\mu_2=1;$$

① 俄文本注：此处假定 $G$ 是某个定点的充分小的邻域.

于是 (8) 在 $G$ 上确定了 $x$ 和 $y$ 的连续可微函数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$. 所以在双曲型的情况下由微分方程

$$\phi_x - \lambda_1\phi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2\psi_y = 0 \tag{9}$$

确定了变换关系 $\phi$ 和 $\psi$, 从而得到标准形式

$$\beta u_{\xi\eta} + \cdots = 0. \tag{10}$$

上边的两个一阶线性齐次偏微分方程实际上给出两族曲线 $\phi$=常数和 $\psi$=常数. 它们也可以作为常微分方程

$$y' + \lambda_1 = 0, \quad y' + \lambda_2 = 0$$

或

$$ay'^2 - 2by' + c = 0$$

的解族而确定之, 沿着族中的曲线, 这里 $y$ 被看成是 $x$ 的函数.

等式

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

表明分别属于这两个族中的任二曲线在 $G$ 中的任一点上不能相切, 并且 $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x \neq 0$. 如果 $\alpha = \gamma = 0$, 由方程 (7) 推出 $\beta \neq 0$.

曲线 $\xi = \phi(x,y)$=常数 和 $\eta = \psi(x,y)$ =常数 称为线性双曲型微分算子 $L[u]$ 的特征线.

由于可以用 $\beta$ 除 (10), 所以可以断言：若$L[u]$是双曲型的, 即 $ac - b^2 < 0$, 则可借助于引入特征曲线族 $\xi$=常数 和 $\eta$=常数 作为坐标曲线而将二阶线性方程(4)化为标准形式

$$u_{\xi\eta} + \cdots = 0. \tag{11}$$

其次假定 $ac - b^2 > 0$, 那么算子 (2) 在 $G$ 上是椭圆型的. 在这种情况下, 二次方程 (8) 没有实的解, 但是它有两个共轭的复根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$. 它们是实变量 $x, y$ 的连续的复值函数. 任何实的曲线族 $\phi$=常数 皆不适合方程 $\alpha = \gamma = 0$; 换句话说, 没有特征线. 但是, 如果 $a, b, c$ 是 $x, y$ 的解析函数, 并且假定 $\phi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 也是解析的, 那么考虑复变量 $x$ 和 $y$ 的微分方程 (9), 并且和前边一样把它们变换到新变量 $\xi$ 和 $\eta$(它们现在是共轭的复数). 再利用方程组

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho, \quad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma \tag{12}$$

引入实自变量 $\rho$ 和 $\sigma$, 则

$$4u_{\xi\eta} = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho}.$$

于是得到椭圆型方程的标准形式

$$\Delta u + \cdots = u_{\sigma\sigma} + u_{\rho\rho} + \cdots = 0. \tag{13}$$

在上述含有复数的变换中, 必须对这些系数提出解析性条件, 这条件是很苛刻的, 而且实质上与问题的性质不合. 为了避免这种限制, 可以利用下边的不涉及复数的步骤将椭圆型方程化为标准形式：在方程 (3) 和 (4) 中把 $\xi$ 和 $\eta$ 改写成 $\rho$ 和 $\sigma$, 并假定

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = 0$$

或者

$$a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2,$$

$$a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y = 0.$$

通过初等代数演算, 可以把这些微分方程化为下列一阶线性偏微分方程组：

$$\sigma_x = \frac{b\rho_x + c\rho_y}{W}, \quad \sigma_y = -\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W}, \tag{14}$$

其中

$$W^2 = ac - b^2,$$

$W$ 可以取正号或负号. 从这些所谓 Beltrami 微分方程中消去未知函数之一 (如 $\sigma$), 立即得到下列关于另一未知函数的二阶微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\rho_x + b\rho_y}{W} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{b\rho_x + c\rho_y}{W} = 0. \tag{15}$$

满足 (14) 且具有不等于零的 Jacobi 式

$$\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x = \frac{1}{W}(a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2)$$

的任一对函数 $\rho, \sigma$ 给出在一点的邻域上化微分方程至标准形式 (13) 的变换. 一旦有了 (15) 的一个梯度不为零的解, 这些函数就被确定了. 在第 4 章 4.7 中将看到, 在关于系数的某些光滑性的假定之下 (例如 $a, b, c$ 具有直到二阶的连续偏导数), 这样的解恒存在 —— 至少局部地存在 —— 并且因而可在任一点的邻域上引入一个标准化参数组[①].

① 作为 $\rho, \sigma$ 的性质的推论, 现在可以导出同一个标准化参数组 $\rho(x, y), \sigma(x, y)$在大范围即在整个区域 $G$上的存在性. 利用下述事实：如果在某个充分小的邻域上确定了 (14) 的两组解 $\rho, \sigma$ 和 $\rho_1, \sigma_1$ 并且 $W < 0$, 那么 $\rho_1 + \mathrm{i}\sigma_1$ 是 $\rho + \mathrm{i}\sigma$ 的一个复变解析函数; 事实上, 进行简单的计算即可证明 Cauchy-Riemann 方程组成立. 所以, 确定在任何两个邻域上的局部标准化参数组所给出的变换在这二邻域的交集上是共形的. 因此, $G$ 和定义在遮盖着 $G$ 的邻域系上的那些参数组构成一个 Riemann 曲面 (Riemann 曲面的概念是 H. Weyl 在 [2] 中提出的; 又见 R. Courant[2]), 在其上定义了标准化参数组的解析函数. 于是寻求在整个区域 $G$ 上的同一个一致标准化参数组 $\rho, \sigma$ 的问题和寻求将 $G$ 一对一地映射为 $\rho, \sigma$ 平面上的一个区域的按上述意义为解析的复函数 $\rho + \mathrm{i}\sigma$ 是等价的. 这正是关于平面区域的一般的单值化定理 (参考上列参考书) 所解决的问题, 由此可断言这种映射的存在性.

第三种情况是抛物型的情况：$ac-b^2=0$. 这时二次方程 (8) 有一个实根, 相应地可引入一族曲线 $\xi=\phi(x,y)$ 使 $\alpha=0$ 成立; 同时, 根据 (7) 有 $\beta=0$, 而且 $\gamma=a\neq 0$(例如可在 $G$ 上取 $\psi=x$). 在抛物型的情况下可以得到标准形式

$$u_{\eta\eta}+\cdots=0.$$

于是完全证明了本节开始所叙述的定理.

注意化至标准形式的变换绝不是唯一的. 例如, 在椭圆型的情况, 将 $\rho,\sigma$ 区域作任何共形映射时标准形式是不变的.

### 3.1.2 例

在第 1 章 1.1 中已经讨论过了各种类型的微分方程的一些例子. 最简单的双曲型方程 (弦振动方程)$u_{xx}-u_{tt}=0$ 已经完全解决了. 椭圆型方程的原型是位势方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$(见第 1 章 1.1). 传热的抛物型方程 $u_t-u_{xx}=0$ 也在第 1 章 1.3 里讨论过了.

从方程的“型”将推出重要的性质, 它们不仅提供解法而且也为确定某些问题的提法是否合理提供判据.

有时, 一个微分方程可以在不同的区域上属于不同的类型 (混合型的); 例如, 方程

$$u_{xx}+yu_{yy}=0, \tag{16}$$

在 $y>0$ 上是椭圆型的, 而在 $y<0$ 上是双曲型的, 因为 $ac-b^2=y$.

在区域 $y<0$ 上, 方程 (8) 即

$$\lambda^2+y\mu^2=0,$$

它具有两个实根 $\lambda/\mu=\pm\sqrt{-y}$; 所以得到关于 $\phi$ 和 $\psi$ 的两个微分方程

$$\phi_x+\sqrt{-y}\phi_y=0,\quad \psi_x-\sqrt{-y}\psi_y=0. \tag{17}$$

它们有解

$$\phi=x+2\sqrt{-y},$$
$$\psi=x-2\sqrt{-y}.$$

当 $y<0$ 时, 变换

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x+2\sqrt{-y},\\ \eta&=x-2\sqrt{-y}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

将 (16) 化为双曲型的标准形式

$$u_{xx} + yu_{yy} = 4u_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0. \tag{19}$$

特征曲线族是抛物线族

$$y = -\frac{1}{4}(x - c)^2;$$

特别是, 曲线 $\phi$=常数都是抛物线的斜率为正的那些分支, 曲线 $\psi$=常数都是斜率为负的那些分支 (见图 3-1).

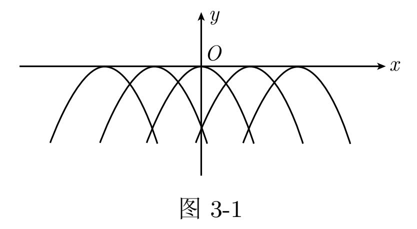



图 3-1

当 $y > 0$ 时, 取

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= 2\sqrt{y}; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

利用这个变换, 可以把方程 (16) 化为椭圆型的标准形式

$$u_{xx} + yu_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0. \tag{21}$$

相仿地, 熟知的“Tricomi 方程”①

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \tag{22}$$

在 $x > 0$ 上是椭圆型的, 在 $x < 0$ 上是双曲型的, 因为 $ac - b^2 = x$.

在半平面 $x < 0$ 上, 方程

$$\left.\begin{aligned} \xi = \phi(x, y) = \frac{3}{2}y + (\sqrt{-x})^3, \\ \eta = \psi(x, y) = \frac{3}{2}y - (\sqrt{-x})^3 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将 (22) 化为标准形式

$$u_{xx} + xu_{yy} = 9x\left[u_\xi\eta - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta)\right] = 0 \quad (\xi > \eta). \tag{24}$$

① 这个方程在空气动力学中有特殊的兴趣. Tricomi 的重要工作 [1] 最近推动了广泛的研究. 例如 L. Bers[5] 和 P. Germain[1].

特征曲线是半三次抛物线

$$y-c=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{-x})^3;$$

向下延伸的分支给出曲线 $\phi$=常数, 向上延伸的分支给出曲线 $\psi$=常数(见图 3-2).

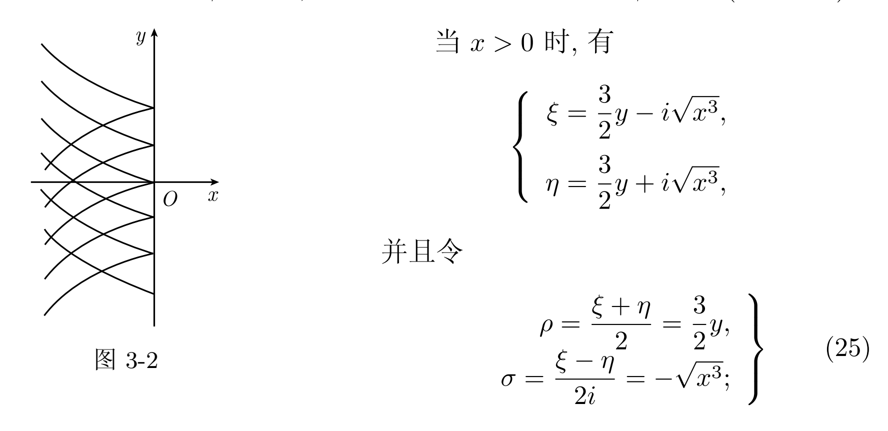



图 3-2

当 $x>0$ 时, 有

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{3}{2}y-i\sqrt{x^3},\\ \eta=\dfrac{3}{2}y+i\sqrt{x^3},\end{cases}$$

并且令

$$\left.\begin{aligned}\rho=\frac{\xi+\eta}{2}=\frac{3}{2}y,\\ \sigma=\frac{\xi-\eta}{2i}=-\sqrt{x^3};\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

利用这个变换, 得到标准形式

$$u_{xx}+xu_{yy}=\frac{9}{4}x\left[(u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma})+\frac{1}{3\sigma}u_\sigma\right]=0.\tag{26}$$

函数组 (25) 满足 Beltrami 微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x=-\sqrt{x}\rho_y,\\ \sigma_y=\frac{1}{\sqrt{x}}\rho_x.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

### 3.1.3　两个自变量的二阶拟线性微分方程的标准形式

现在要把化至标准形式的变换推广到包括非线性的微分方程, 特别是拟线性微分方程. 用方便的缩写记号

$$p=u_x,\quad q=u_y,\quad r=u_{xx},\quad s=u_{xy},\quad t=u_{yy},$$

可将拟线性微分算子写成下列形式

$$L[u]=ar+2bs+ct+d,\tag{28}$$

其中 $a,b,c,d$ 都是 $x,y,u,p,q$ 的已知函数, 也称这样的算子当 $ac-b^2>0$ 时为**椭圆型的**, 当 $ac-b^2<0$ 时为**双曲型的**, 当 $ac-b^2=0$ 时为**抛物型的**. 不过, 由于 $a,b,c$ 依赖于特定的函数 $u(x,y)$, 算子 $L$ 在一点 $(x,y)$ 处的性质也依赖于 $u$ 而且依赖于偏导数 $p,q$(它们是 $x,y$ 的函数). 例如, 微分算子 $uu_{xx}+u_{yy}$ 在 $u(x,y)>0$ 的区域上是椭圆型的, 在 $u(x,y)<0$ 的区域上是双曲型的. 同理, 由于两个特征线族

的微分方程也依赖于 $u$, 所以不能对于一切的函数 $u$ 同时预先引入两族固定的特征曲线作为坐标曲线. 当把一个特定的函数 $u(x,y)$ 和它的导函数 $p$, $q$ 代入 $L$ 之后, 就可以像对于二阶线性算子一样地处理它了. 如果 $L$ 对于这个函数 $u$ 来说是双曲型的, 就能引入满足方程 (9)

$$\phi_x - \lambda_1 \phi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0$$

的特征参数组 $\xi = \phi(x,y), \eta = \psi(x,y)$.

相仿地, 在椭圆型的情况下, $\rho$ 和 $\sigma$ 为特征参数的条件是

$$\left.\begin{aligned} &a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ &a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

要想在方程 (9) 或 (29) 中避免涉及一个特定函数 $u$, 关键是把 $u, x$ 和 $y$ 同时看成 $\xi$ 和 $\eta$ 的函数而不把 $u$ 看成 $x$ 和 $y$ 的函数. 如果引入 $\xi$ 和 $\eta$ 作为新的坐标变量, 那么 $L[u] = 0$ 和 (9) 或 (29) 就过渡为 $\xi$ 和 $\eta$ 的函数 $u, x$ 和 $y$ 的微分方程组. 为了得出这些方程, 要利用反函数的微分公式将对 $x$、$y$ 的导数表示为对 $\xi$、$\eta$ 的导数:

$$\left.\begin{aligned} &Dx_\xi = \eta_y, \quad Dx_\eta = -\xi_y, \quad p = u_x = D(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi), \\ &Dy_\xi = -\eta_x, \quad Dy_\eta = \xi_x, \quad q = u_y = D(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

其中

$$D = \phi_x\psi_y - \psi_x\phi_y = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$$

是变换的 Jacobi 式. 于是方程 (9) 和 (29) 化为

$$y_n + \lambda_1 x_\eta = 0, \quad y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \tag{9a}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 = ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ &ay_\rho y_\sigma - b(x_\rho y_\sigma + y_\rho x_\sigma) + cx_\rho x_\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{29a}$$

在双曲型的情况 (9a) 中, 函数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 依赖于 $u, p, q$, 也依赖于 $x$ 和 $y$. 如果借助于 (30) 把 $p$ 和 $q$ 换成它们的用对 $\xi, \eta$ 的导数表达的式子, 那么 (9a) 就表示量 $x, y, u$ 和它们的关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的一阶偏导数之间的两个关系. 如前所说, 和线性的情况相反, 如果不知道 $u(x,y)$, 这两个方程就不足以确定曲线族 $\xi$=常数和 $\eta$ =常数. 它们此刻是关于三个函数 $u(\xi,\eta), x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$ 的两个一阶偏微分方程构成的方程组, 换句话说, 是一个欠定组.

把原来的二阶方程 $L[u] = 0$ 和这两个“特征”方程共同联立, 从而得到关于 $\xi, \eta$ 的三个函数 $u, x, y$ 的三个微分方程的一个方程组. 从几何的观点来看, 这样做

就意味着要寻求用特征参数 $\xi, \eta$ 表示的积分曲面的参数表达式而不是用 $x, y$ 表示的非对称形式 $u(x, y)$.

从微分式 (28) 的变换, 在双曲型的情况下得到下列形式的方程

$$\begin{aligned}&x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)\\ =&(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}},\end{aligned} \tag{31}$$

即

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}, \tag{32}$$

其中只出现关于 $\xi$ 和 $\eta$ 的混合二阶导数. 或者把 $x, y, u$ 看成矢量 $\boldsymbol{x}$ 的支量而写成

$$\boldsymbol{x}_{\xi\eta}(\boldsymbol{x}_\xi \times \boldsymbol{x}_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}. \tag{33}$$

在 $d = 0$ 的特殊情况下, 得到一个值得注意的结果：双曲型方程的二阶标准形式 (31)与 $a, b, c$ 无关.

还要注意, 应该用表达式 (30) 代替了微分方程中一切的 $p$ 和 $q$. 关于矢量 $\boldsymbol{x}$ 的偏微分方程 (9a), (31) 就是在双曲型的情况下所要找的一般标准形式.

假定在一个曲面 $u$ 上 (因而在其某个邻域上) 方程是椭圆型的, 即 $b^2 - ac < 0$, 则标准形式是另一个样子. 可以直接由方程 (29a) 得到相应的变换, 也可以借助于变换

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho, \quad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma$$

形式地利用上述结果而得到它. 结论：在椭圆型的情况下, 微分方程 (28) 等价于下列关于量 $x, y, u$ (或者关于参数 $\rho$ 和 $\sigma$ 的矢量函数 $\boldsymbol{x}$) 的三个微分方程的方程组：

$$\left.\begin{aligned}&a y_\rho^2 - 2b y_\rho x_\rho + c x_\rho^2 = a y_\sigma^2 - 2b y_\sigma x_\sigma + c x_\sigma^2,\\ &a y_\rho y_\sigma - b(y_\rho x_\sigma + y_\sigma x_\rho) + c x_\rho x_\sigma = 0,\\ &\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\rho & y_\rho & u_\rho \\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = (x_\rho y_\sigma - x_\sigma y_\rho)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

最后这个方程可写为矢量形式：

$$\Delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_\rho \times \boldsymbol{x}_\sigma) = (x_\rho y_\sigma - x_\sigma y_\rho)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}, \tag{34a}$$

其中矢量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 表示矢量 $\boldsymbol{x}$ 上的 Laplace 算子.

在 $d=0$ 的特殊情况下, 二阶微分方程与 $a, b, c$ 无关而具有下列形式

$$\Delta \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_\rho \times \boldsymbol{x}_\sigma) = 0,$$

其中 $\times$ 表示有向积.

### 3.1.4 例. 极小曲面[①]

考虑极小曲面的微分方程

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0; \tag{35}$$

因为 $ac - b^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0$, 所以这个微分方程处处是椭圆型的, 并且可以化为形如 (34) 的标准方程组. 事实上, 简短的计算给出下列诸方程:

$$\left.\begin{aligned} &x_\rho^2 + y_\rho^2 + u_\rho^2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + u_\sigma^2 \quad \text{或 } \boldsymbol{x}_\rho^2 = \boldsymbol{x}_\sigma^2, \\ &x_\rho x_\sigma + y_\rho y_\sigma + u_\rho u_\sigma = 0 \quad \text{或 } \boldsymbol{x}_\rho \boldsymbol{x}_\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_\rho \times \boldsymbol{x}_\sigma) = 0, \quad \text{其中} \quad \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\rho\rho} + \boldsymbol{x}_{\sigma\sigma} \tag{37}$$

可以把这个方程组化为更简单的形状: 将方程组 (36) 微分而得

$$\boldsymbol{x}_{\rho\rho}\boldsymbol{x}_\rho = \boldsymbol{x}_{\rho\sigma}\boldsymbol{x}_\sigma \quad \text{和} \quad \boldsymbol{x}_{\sigma\sigma}\boldsymbol{x}_\rho = -\boldsymbol{x}_{\rho\sigma}\boldsymbol{x}_\sigma;$$

从而有

$$\boldsymbol{x}_\rho \Delta \boldsymbol{x} = 0 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{x}_\sigma \Delta \boldsymbol{x} = 0.$$

另一方面, 由方程 (37) 推出 $\Delta \boldsymbol{x}$ 是矢量 $\boldsymbol{x}_\rho$ 和 $\boldsymbol{x}_\sigma$ 的一个线性组合 $\Delta \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_\rho + \beta \boldsymbol{x}_\sigma$. 所以 $\alpha = \beta = 0$, 因而 $\Delta \boldsymbol{x} = 0$. 所以, 选用适当的参数 $\rho$ 和 $\sigma$ 时, 以参数式表达的极小曲面可由下列条件刻画之: 三个坐标 $u, x, y$ 中的每一个皆适合位势方程, 即

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta u = 0. \tag{38}$$

此外, 它们还满足下列条件

$$\left.\begin{aligned} A &= \boldsymbol{x}_\sigma^2 - \boldsymbol{x}_\rho^2 = 0, \\ B &= 2\boldsymbol{x}_\rho \boldsymbol{x}_\sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

利用微分几何学中的常用记号

$$E = \boldsymbol{x}_\rho^2, \quad F = \boldsymbol{x}_\rho \boldsymbol{x}_\sigma, \quad G = \boldsymbol{x}_\sigma^2,$$

① 参考 R. Courant[2].

则 (39) 即是关于曲面的第一基本形式的条件

$$E-G=0,\quad F=0.$$

这些条件似乎给方程组 (38) 增加了两个新的微分方程; 然而, 它们仅仅表示一种边界条件. 不需要在整个二维的 $\rho,\sigma$ 区域上提出附加限制 (39) 而只需沿着 $\rho,\sigma$ 平面上的某条闭曲线提出它. 因为由方程组 (38) 立即可推出

$$A_\rho=B_\sigma,\quad A_\sigma=-B_\rho$$

它们表明 $A+\mathrm{i}B$ 是复变量 $\rho+\mathrm{i}\sigma$ 的一个解析函数; 所以, 只要实部 $A$ 在任一闭曲线 (例如, 边界曲线) 上恒等于零且 $B$ 在某一点处等于零, 那么 $A+\mathrm{i}B$ 就恒等于零.

有两个直接推论对于极小曲面的理论是重要的：

1) 由 $\rho,\sigma$ 平面到极小曲面的映射是共形的.

2) 极小曲面的调和函数表达式和用复变数

$$\rho+\mathrm{i}\sigma=\omega$$

的解析函数表示的古典的 Weierstrass 表达式是等价的.

为了得到 Weierstrass 公式, 把 $\rho,\sigma$ 的函数 $x,y,u$ 看成是解析函数 $f_1(\omega),f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$ 的实部. 假定 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u}$ 是共轭的势函数, 则有

$$x+\mathrm{i}\tilde{x}=f_1(\omega),\quad y+\mathrm{i}\tilde{y}=f_2(\omega),\quad u+\mathrm{i}\tilde{u}=f_3(\omega).$$

因为由 Cauchy-Riemann 微分方程组

$$x_\sigma=-\tilde{x}_\rho,\quad y_\sigma=-\tilde{y}_\rho,\quad u_\sigma=-\tilde{u}_\rho$$

有

$$x_\rho-\mathrm{i}x_\sigma=f_1'(\omega),\quad y_\rho-\mathrm{i}y_\sigma=f_2'(\omega),\quad u_\rho-\mathrm{i}u_\sigma=f_3'(\omega),$$

所以条件 (39) 化为

$$\phi(\omega)=E-G-2\mathrm{i}F=\sum_{\nu=1}^{3}f_\nu'(\omega)^2=0.$$

因此, 一切极小曲面都可以用下列公式表示：

$$x=\mathrm{Re}(f_1(\omega)),\quad y=\mathrm{Re}(f_2(\omega)),\quad u=\mathrm{Re}(f_3(\omega)),$$

其中解析函数 $f_\nu(\omega)$ 除了受条件

$$\sum_{\nu=1}^{3}f_\nu'(\omega)^2=0$$

限制之外是任意的.

代替 $\omega$, 还可将函数 $f_\nu$ 之一 (如 $f_3(\omega)$) 作为独立变量. 所以, 一切极小曲面的集合实质上仅仅依赖于一个任意的一元复变解析函数.

### 3.1.5　两个一阶微分方程的方程组

首先, 对两个函数 $u, v$ 的两个一阶方程的方程组作一些注记, 因为它们有重要的应用, 特别是在流体动力学中 (在第 5 章中将阐述其简要理论).

在线性的情况下, 仿照 3.1.2, 可以用特征坐标 $\xi, \eta$ 作为自变量而把双曲型的方程组化至典范标准形式:

$$\begin{cases} au_\xi + bv_\xi + \cdots = 0, \\ a'u_\eta + b'v_\eta + \cdots = 0, \end{cases}$$

其中 $a, b, a', b'$ 是 $\xi$ 和 $\eta$ 的已知函数. 引入新的因变量

$$\begin{cases} U = au + bv, \\ V = a'u + b'v, \end{cases}$$

最后得到标准形式

$$\begin{cases} U_\xi + \cdots = 0, \\ V_\eta + \cdots = 0, \end{cases}$$

其中三个点表示 $U, V, \xi, \eta$ 的已知函数.

在两个特征线族重合的情况, 即 $\xi = \eta$ 时, 选用不同于 $\xi$ 的另一个自变量 $\zeta$, 可以把方程组化为下列形式

$$\begin{cases} U_\xi + \cdots = 0, \\ V_\xi + \cdots = 0. \end{cases}$$

于是这方程组等价于以 $\zeta$ 为参数的两个常微分方程的方程组.

利用和 3.1.1 中相仿的步骤, 在椭圆型的情况下得到标准形式

$$\begin{cases} P_\rho + Q_\sigma + \cdots = 0, \\ Q_\rho - P_\sigma + \cdots = 0, \end{cases}$$

其中 $P, Q$ 是未知函数而 $\rho$ 和 $\sigma$ 是自变量.

## 3.2　一般的分类和特征

现在要转向极为一般而深入的探讨.

### 3.2.1 记号

特征的概念对于一阶方程组是最明确的, 推广到拟线性的或一般的方程组时并不发生严重的困难 (见第 5 章和第 6 章 6.3), 但为简明计, 主要限于讨论线性方程.

有时候, 为了免写求和记号, 在不致发生混淆的情况下, 将用熟知的简便缩写 $p_\nu q_\nu$ 表示 $\Sigma_\nu p_\nu q_\nu$, 像在下边方程 (1) 中那样. 此外, 采用矢量和矩阵记号也是方便的.

我们还回忆一下函数 $f(x,y)$ 沿着一条曲线 $\phi(x,y)=0$ (它满足 $\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$, 比如说, 满足 $\phi_x\neq 0$) 的内导数的概念. 若 $\alpha\phi_x+\beta\phi_y=0$, 则导数 $\alpha f_x+\beta f_y$ 是内导数; 特别是,

$$\phi_y f_x-\phi_x f_y$$

就是 $f$ 的一个这样的内导数. 相仿地, $n$ 个自变量 $x_1,\cdots,x_n$ (或矢量 $x$) 的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 沿流形 $\phi(x_1,\cdots,x_n)=0$(假定 $\mathrm{grad}\phi\neq 0$) 的内导数的定义是以满足条件

$$\alpha_\nu\phi_{x_\nu}=\alpha_\nu\phi_\nu=0$$

的 $\alpha_\nu$ 为系数所作的线性组合

$$\alpha_\nu f_{x_\nu}=\alpha_\nu f_\nu.$$

在这里和以后都把 $f_{x_\nu},\phi_{x_\nu},u_{x_\nu}$ 相应地简写为 $f_\nu,\phi_\nu,u_\nu$(有时也写成 $D_\nu f, D_\nu\phi$, 等等). 只要知道了 $f$ 本身在 $\phi=0$ 上的值, 也就知道了它的内导数 (见第 2 章附录 I).

### 3.2.2 两个自变量的一阶方程组. 特征

在两个自变量 $x$ 和 $y$ 的情况下, 可以把关于以 $u^1,\cdots,u^k$ 为支量的矢量函数的一组 $k$ 个方程写成下列形式

$$L_j[u]=a^{ij}u_x^i+b^{ij}u_y^i+d^j=0 \tag{1}$$

$$(j=1,2,\cdots,k),$$

其中元素 $a^{ij},b^{ij}$ 构成相应的 $k$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$.

假定至少二者之一 (如 $B$) 是非奇异的, 即 $||b^{ij}||\neq 0$, 并且这些系数都具有连续的导函数. 项 $d^j$ 可以是未知函数的线性或非线性函数; 在后一情况下称方程组是*半线性的*.

采用矩阵记号, 可以将 (1) 写成

$$L[u]=Au_x+Bu_y+d, \tag{1a}$$

其中 $L, d$ 和 $u$ 都是矢量.

现在考虑方程 $L[u]=0$ 并提出作为 Cauchy 初值问题的基础的问题：由矢量 $u$ 的给定在一曲线 $C:\phi(x,y)=0$ (满足条件 $\phi_x^2+\phi_y^2\neq 0$) 上的初始值去确定 $C$ 上的一阶偏导数 $u_x^i$ 的值, 条件是它们满足方程 $L[u]=0$.

首先注意在 $C$ 上的内导数 $u_y\phi_x-u_x\phi_y$ 是已知的. 由此得到 $u_x$ 和 $u_y$ 在 $C$ 上的一个如下的关系①

$$u_y=-\tau u_x+\cdots,$$

其中 $\tau=-\phi_y/\phi_x$, 三个点表示 $C$ 上的已知量 (以下同此). 代入微分方程, 在 $C$ 上得到一组关于 $k$ 个导数 $u_x^i$ 的线性方程：

$$L_j[u]=(a^{ij}-\tau b^{ij})u_x^i+\cdots=0 \quad (j=1\cdots,k).$$

所以, 为了唯一地确定一切一阶导数沿着 $C$ 的值, 必要而充分的条件是

$$Q=||a^{ij}-\tau b^{ij}||=|A-\tau B|\neq 0. \tag{2}$$

称 $Q$ 为方程组 (1) 的特征行列式.

若沿曲线 $\phi$=常数恒有 $Q\neq 0$, 则称这些曲线为自由的. 这些曲线中的每一条都可以扩充为满足 (1) 的一条"带". 初始值的选取是任意的.

若 $\tau(x,y)$ 是 $\tau$ 的 $k$ 次代数方程 $Q=0$ 的一个实根, 则称由常微分方程

$$\mathrm{d}x:\mathrm{d}y=\tau \quad 或 \quad Q\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=0 \tag{3}$$

所确定的积分曲线 $C$ 为特征曲线. 下面将看到, 对于特征曲线来说, 初始值一般地不能扩展成带.

若方程 $Q=0$ 无实根, 则一切曲线都是自由的, 恒可将初始值扩展成带, 且其结果是唯一的. 这时称方程组为椭圆型的. 在相反的情况下, 即当 $Q=0$ 有 $k$ 个彼此不同的实根时, 称方程组为完全双曲型的. 在第 5 章中将系统地研究这样的方程组.

若 $\tau$ 是 (2) 的一个 (可以是其仅有的一个) 实根, 则可沿着 $C$ 解出以 $l^1,\cdots,l^k$ 为支量的矢量 $l$ 的线性齐次方程组：

$$l^j(a^{ij}-\tau b^{ij})=0 \quad 或 \quad l(A-\tau B)=0.$$

于是, 方程组 (1) 的"特征"线性组合 $l^jL_j[u]=lL[u]$ 可以写成特征标准形式

$$l^jL_j[u]=l^jb^{ij}(u_y^i+\tau u_x^i)+\cdots=0$$

① 不失一般性, 可以假定在 $C$ 的所论部分上 $\phi_x\neq 0$.

或

$$lL[u] = lB(u_y + \tau u_x) + \cdots = 0,$$

其中一切未知函数的导数都是沿着同一个方向求导的 —— 和 $\tau$ 相应的特征曲线的方向.

所以, 在双曲型的情况下, 即当存在着 $k$ 个这样的特征曲线族时, 可以将方程组 (1) 代之以等价的方程组, 其中每一个方程只包含沿着一个特征方向的导数. 可以利用双曲型方程组的这个性质作为双曲性的较为一般的定义 (它不排斥 $\tau$ 为重根的情况).

在第 5 章中, 将利用这些定义作为彻底解决具有两个自变量的双曲型问题的基础.

微分算子 $L_j$ 的每个"特征组合"给出 $C$ 上的一个内导数. 从而 $u$ 的支量沿 $C$ 的值必须满足一定的关系, 确言之, 它们必须满足特征标准形的微分方程. 所以显然不能在特征曲线 $C$ 上任意给定 $u$ 的初始值. 这说明了为什么必须区别特征曲线和"自由"曲线.

### 3.2.3 $n$ 个自变量的一阶方程组[①]

即将扼要指出, 对于任意 $n$ 个自变量 $x$ 的一阶方程组, 可以作相仿的处理, 更系统的讨论仍须参看第 6 章. 方程组可以写成下面的形式：

$$L_j[u] = a^{ij,\nu} \quad u^i_{x_\nu} + b^j = 0 \quad (j = 1, \cdots, k), \tag{4}$$

其中 $a^{ij,\nu}$ 依赖于 $x, b^j$ 依赖于 $x$ 也可能还依赖于 $u$. 指标 $\nu$ 由 1 变到 $n$. 利用矩阵记号和缩写 $u_{x_\nu} = u_\nu$, 还可以把 (4) 写成

$$L[u] = A^\nu u_\nu + b = 0, \tag{4a}$$

其中 $A^\nu$ 为 $k$ 行 $k$ 列的矩阵 $(a^{ij,\nu})$, 算子 $L[u]$ 和 $b$ 都是矢量.

仍考虑一个曲面 $C : \phi(x) = 0$ 并假定 $\mathrm{grad}\phi \neq 0$, 譬如说 $\phi_n \neq 0$. 在 $C$ 上考虑特征矩阵

$$A = A^\nu \phi_\nu \tag{5}$$

和特征行列式或特征形式

$$Q(\phi_1, \cdots, \phi_n) = ||A||. \tag{5a}$$

矢量 $u$ 的初始值可以给定在 $C$ 上, 则有下面结论.

若在 $C$ 上 $Q \neq 0$, 则微分方程 (4) 沿着 $C$ 由任意给定的初始值唯一地确定了一切导数 $u_\nu$ 的值; 在这种情况下称曲面 $C$ 为自由的.

① 关于细节, 参考第 6 章 6.3.

若在 $C$ 上 $Q=0$, 则称 $C$ 为一特征曲面. 这时存在着微分算子 $L_j$ 的特征线性组合

$$lL[u]=l^jL_j[u]=\Lambda[u] \tag{6}$$

使 $\Lambda$ 中对矢量 $u$ 的导数在 $C$ 上是内导数; $\Lambda[u]=0$ 构成初始数据自身之间的一个关系, 因此不能任意选取这些数据.

为了证明这个论断, 先注意 $u_\nu\phi_n-u_n\phi_\nu$ 是 $u$ 在 $C$ 上的一个内导数. 因此只要知道了一个 (外) 导数 $u_n$, 就可以由数据算出 $u_\nu$ 在 $C$ 上的值 (假定了 $\phi_n\neq 0$). 用 $\phi_n$ 乘 (4), 则发现

$$\phi_nL[u]=A^\nu\phi_\nu u_n+\mathscr{J}=Au_n+\mathscr{J}=0, \tag{7a}$$

其中 $\mathscr{J}$ 是 $u$ 在 $C$ 上的一个内导数算子. 所以, 在 $||A||=Q\neq 0$ 的假定下, 矢量 $u_n$ 的线性方程组 (7a) 唯一地确定了 $u_n$.

反之, 若 $Q=||A||=0$, 则有非零矢量 $l$ 使 $lA=0$. 用 $l$ 乘 (7a) 则得方程

$$l\phi_nL[u]=l\mathscr{J}=0, \tag{7b}$$

它是由作用于沿 $C$ 的数据上的一个内导数算子表示的; 这个算子 $l\mathscr{J}$ 不包含 $u_n$. 所以 $l\mathscr{J}=0$ 是约束 $u$ 在 $C$ 上的初始值的一个导数关系.

特征方程 $Q=0$ 的形式是 $\phi(x)$ 的一个一阶偏微分方程. 如果它不只在条件 $\phi=0$ 之下成立而是关于 $x$ 的恒等式, 那么整个曲面族 $\phi$=常数都是由特征曲面组成的. 当 $n>2$ 时的特征显然比 $n=2$ 时的 $k$ 个曲线族复杂得多. 因此, 方程组的理论当 $n>2$ 时自然也比 $n=2$ 时更为复杂.

至于分类, 是这样的：若关于量 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 的齐次代数方程 $Q=0$ 没有任何实数解组 (除了 $\phi_\nu=0$ 之外), 则特征不存在, 此时称方程组为椭圆型的.

若与椭圆型的情况正好相反, 方程 $Q=0$ 对于任意给定的 $\phi_1,\cdots,\phi_{n-1}$ 的值具有 $k$ 个不同的实根 $\phi_n$ (或者经过一种适当的坐标变换后, 相应的断言成立), 则称方程组为完全双曲型的. 将在 3.6 中讨论双曲性的概念和它的意义, 并且还要在第 6 章中更详细地讨论它. 这些讨论的最重要的目的是得出这样一个定理：对于双曲型方程来说, Cauchy 问题总是可解的.

### 3.2.4 高阶微分方程. 双曲性

无论单个的高阶方程或者高阶方程组, 情况都是类似的.

详细的情节须参看第 6 章 6.3; 这里仅对单个的 $m$ 阶微分方程作一点简单注记. 用记号 $D_\nu$ 表示对 $x_\nu$ 的偏导数运算 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$, 可以把微分方程写成符号的形式：

$$L[u]=H(D_1,\cdots,D_n)u+K(D_1,\cdots,D_n)u+f(x)=0, \tag{8}$$

其中 $H$ 是 $D$ 的一个 $m$ 次的齐次多项式, $K$ 是一个低于 $m$ 次的多项式, 一切系数都是 $x$ 的连续函数.

Cauchy 数据, 即已给的初始数据, 是由函数 $u$ 和它的前 $m-1$ 阶的导数在曲面 $C: \phi(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 上的值构成的, 仍假定 $\phi_n \neq 0$. 和前边一样, 基本问题: 在什么条件下这种在 $C$ 上的任意数据唯一地确定 $u$ 在 $C$ 上的 $m$ 阶导数值? 答案: 充要条件是特征形

$$Q(\phi_1, \cdots, \phi_n) = H(\phi_1, \cdots, \phi_n)$$

在 $C$ 上不等于零. 若曲面 $C$ 是特征的, 即它满足方程 $Q = 0$, 则 $Hu + Ku$ 是 $C$ 上的一个 $m$ 阶的内导数算子. 这意味着, 方程中的 $m$ 阶导数可以组合成 $m-1$ 阶算子的一阶内导数, 因而可由数据算出它在 $C$ 上的值.

证明时, 可以引入新的坐标作为自变量. 取 $\phi$ 为这些坐标之一, $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 是取在曲面 $\phi$=常数上的内坐标. 于是不难把函数 $u$ 的一切 $m$ 阶导数表示为 $m$ 阶 "外" 导数 $(\partial^m/\partial\phi^m)u$ 和对于 $\phi$ 的不超过 $m-1$ 阶的导数的组合, 后者可由数据算出其值. 容易看出, 这时方程有下列形式

$$Q(\phi_1, \cdots, \phi_n)u_{\varphi^m} + \cdots = 0,$$

其中三个点表示由数据已知其在 $C$ 上的值的那些项. 当且仅当 $Q$ 不等于零时, 这个关于 $u_{\varphi^m}$ 的方程有唯一的解. 若在 $C$ 上 $Q = 0$, 则此方程表示关于数据本身的一个内在的条件. 至于双曲性的定义, 它仍然是按特征形 $Q$ 的性质给出的, 因而还是和 3.2.3 中一样.

### 3.2.5 补注

为了适当地推广到多个函数的情况, 不能仅仅重复 3.2.2 中的双曲性定义. 然而, 只要假定方程组有 $K$ 个线性独立的那样的组合 —— 每个组合仅含未知函数 $u$ 在 $n-1$ 维的曲面 $C$ 上的内导数 —— 就行了. 以后在第 6 章 6.3 中将详细讨论这个定义的此种重要形式.

第二个注记是关于拟线性方程组的. 本节的一切重要陈述对于拟线性方程都仍正确. 这时特征条件依赖于矢量 $u$ 在 $C$ 上的值, 所以不能不管所考虑的特定矢量 $u$ 而独立地确定特征. 这样引起的复杂性和特征的定义无关, 但是在后边第 5 章和第 6 章中构造 Cauchy 问题的解时是很重要的.

最后应当着重指出, 在上述椭圆型和双曲型之间还可以有中间的类型. 例如, 在两个自变量的情况, 可以有 $q$ 个实的特征和 $p$ 对共轭的复特征, 而 $q + 2p = k$. 由于这些中间的类型在数学物理学中不大出现, 目前关于它们的研究成果还不多. 对于多个自变量的情况, 此种中间类型的典型例子是超双曲型方程

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \cdots + u_{y_ny_n},$$

其中 $u$ 是 $2n$ 个自变量 $x$ 和 $y$ 的函数 (参考第 6 章 6.16).

### 3.2.6 例. Maxwell 方程和 Dirac 方程

读者不难鉴定波动方程是双曲型的, Laplace 方程是椭圆型的, Cauchy-Riemann 方程组 $u_x - v_y = 0,\ u_y + v_x = 0$ 是椭圆型的, $u_x - v_y = 0,\ u_y - v_x = 0$ 是一个双曲型方程组, $u_x = v,\ u_y = v_x$ 是一个抛物型方程组.

对于椭圆型的情况, 再给出下边几个例子：一个是

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} = 0,$$

其特征形是

$$Q = \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2\right)^2;$$

另一个是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0,$$

特征形是

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \phi_i^4.$$

一个“抛物型”微分方程的例子是

$$u_t = \Delta\Delta u,$$

其中有 $n+1$ 是自变量, 并且特别挑出了时间变量 $x_0 = t$. 它的特征形 $\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2\right)^2$ 是退化的, 因为它不包含变量 $\phi_0$.

算子

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta\Delta u - 3\Delta u_{tt} + 2u_{tttt}$$

是双曲型的, 因为它的特征形用变量 $\phi_1, \cdots, \phi_n,\ \phi_0 = \tau$ 表示时是

$$Q = \left(\sum_{t=1}^{n} \phi_i^2 - \tau^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2 - 2\tau^2\right),$$

它显然具有所需的性质.

另一方面, 算子

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = \Delta\Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

是一个中间类型的; 它既不是椭圆型的, 也不是抛物型的, 又不是双曲型的, 因为特征形

$$Q=\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i^2\right)^2-\tau^4$$

当固定变量 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 时仅有两个而不是四个实根 $\tau$.

一阶方程组的进一步的例子是 Beltrami 微分方程

$$\begin{aligned}Wu_x-bv_x-cv_y=0,\\Wu_y+av_x+bv_y=0,\end{aligned}$$

假定方阵

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$$

是正定的. 这里相应的特征形是

$$Q(\phi)=\begin{vmatrix}-W\phi_1&b\phi_1+c\phi_2\\W\phi_2&a\phi_1+b\phi_2\end{vmatrix}=-W(a\phi_1^2+2b\phi_1\phi_2+c\phi_2^2).$$

在 $W=1,\ a=c=1,\ b=0$ 的特殊情况 (Cauchy-Riemann 方程组) 下, 特征形是 $Q(\phi)=-(\phi_1^2+\phi_2^2)$.

Maxwell 微分方程组实质上是双曲型的. 在最简单的情况 (真空里) 下, 若将光速取为 1, 则这些方程是

$$\mathfrak{E}_t-\mathrm{curl}\mathfrak{H}=0,\quad \mathfrak{H}_t+\mathrm{curl}\mathfrak{E}=0;$$

其中 $\mathfrak{E}=(u_1,u_2,u_3)$ 是电场矢量而 $\mathfrak{H}=(u_4,u_5,u_6)$ 是磁场矢量; 将第四个自变量 (时间变量) 写成 $t$. 用坐标 $x,y,z$ 写出时, 这些方程是

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_5}{\partial z}-\frac{\partial u_6}{\partial y},\quad \frac{\partial u_4}{\partial t}=\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial y},\\-\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{\partial u_6}{\partial x}-\frac{\partial u_4}{\partial z},\quad \frac{\partial u_5}{\partial t}=\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial z},\\-\frac{\partial u_3}{\partial t}=\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_5}{\partial x},\quad \frac{\partial u_6}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

不难证明特征形是

$$Q=\tau^2(\tau^2-\phi_1^2-\phi_2^2-\phi_3^2)^2.$$

现在 $Q=0$ 实质上是波动方程的特征方程. 这一点反映了下述事实：通过消元法可以看出 $u$ 的每一个支量都满足波动方程, 并且下述定理成立：假定从特征形为

$Q$ 的给定的微分方程组由消元法得到单独一个方程; 那么这个方程的特征形必为 $Q$ 的一个因子[①]. 证明留给读者. 严格地讲, 由于具有重特征, Maxwell 方程不符合前述狭义双曲性的定义. 以后将此概念予以推广以弥补这个缺陷.

Dirac 微分方程组的特征方程和 Maxwell 方程的特征方程是相仿的. Dirac 方程组包含四个自变量 $x_1, x_2, x_3$ 和 $x_4$ (这个 $x_4 = t$) 的四个复值函数

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4).$$

为了列写简明, 引入下列矩阵:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是方程是

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_k \left( \frac{\partial}{\partial_k} - a_k \right) u - \beta b u = 0.$$

这里的矢量 $(a_1, a_2, a_3)$ 是与磁位势成比例的, $-a_4$ 是与电位势成比例的, $b$ 是与静止质量成比例的. 按照规则, 特征行列式是

$$Q(\phi) = \left| \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \phi_k \right| = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - \phi_4^2)^2,$$

它是变量 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 的一个四次型. 所以特征流形还是和波动方程的特征流形一样.

① 对于高阶方程组也有相仿的定理.

最后, 通过简短的计算来说明单独一个高阶方程的特征的定义和由它得出的一个一阶方程组的特征的定义的等价性. 如果把二阶微分方程

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \cdots = 0$$

化为一阶微分方程组

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \cdots = 0,$$

那么, 对于这个方程组来说, 特征条件是

$$\begin{vmatrix} \sum a_{1k}\phi_k & \sum a_{2k}\phi_k & \cdots & \sum a_{n-1,k}\phi_k & \sum a_{nk}\phi_k \\ \phi_n & 0 & \cdots & 0 & -\phi_1 \\ 0 & \phi_n & \cdots & 0 & -\phi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_n & -\phi_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(-1)^{n-1} \phi_n^{n-2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \phi_i \phi_k = 0,$$

它和上列单独一个二阶方程的特征条件显然相符合.

进一步的例子见于以下几节以及第 5 章和第 6 章.

## 3.3　常系数线性微分方程

对于具有常系数的线性微分方程 (以及其他可以化为这种类型的方程) 较之一般情况可作更完善的处理. 此外, 因为方程在一点 $P$ 处的分类仅仅是根据系数在当地的值, 所以, 为了区别各种类型, 就只需考虑常系数的情况. 事实上, 在一点附近可以用一个常系数线性方程组局部地近似一个线性或拟线性方程组, 这样的常系数方程组就是用原方程组的系数在 $P$ 处的值代替它们在 $P$ 的邻域上的值所得的结果.

### 3.3.1 二阶方程的分类和标准形

考虑一个二阶算子

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \cdots \tag{1}$$

或微分方程 $L[u]=0$, 其中系数 $a_{ik}=a_{ki}$ 都是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在一个区域 $G$ 上的连续可微函数, 并且式中三个点表示 $u$ 的低于二阶的式子. 称二阶的式子为此微分算子的主部.

微分算子 (1) 的分类依赖于变量代换

$$\xi_i = t_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

在某个点 $P^0(x^0)=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 处对这微分算子的形状的作用. 以 $t_{ik}$ 记 $\partial t_i/\partial x_k$, 有

$$u_{x_l} = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} u_{\xi} \quad \text{和} \quad u_{x_l x_s} = \sum_{i,k=1}^{n} t_{kl} t_{is} u_{\xi_l \xi_s} + \cdots ,$$

其中三个点仍表示函数 $u$ 的不高于一阶的式子. 变换 (2) 把算子 (1) 化为

$$\Lambda[u] = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \cdots , \tag{3}$$

其中系数 $\alpha_{ik}$ 是由下列变换确定的:

$$\alpha_{ik} = \sum_{l,s=1}^{n} t_{kl} t_{is} a_{ls}. \tag{4}$$

在点 $(x^0)$ 处, $L[u]$ 的主部的系数所受的变换和对变量 $y_i$ 作仿射线性变换

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} \eta_l \tag{5}$$

时二次型 $Q=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$(它是 (1) 的特征型) 的系数所受的变换是一样的. 恒可用仿射变换把这种二次型化为典范型

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \eta_i^2,$$

其中系数 $\kappa_i$ 仅取值 +1, −1, 或 0. 称负系数的个数为惯定指标, 等于零的系数的个数是仿射不变量. 因此, 这些数字表征着微分算子在点 $P^0$ 处的特性.

若一切的 $\kappa_i$ 皆等于 1 或皆等于 $-1$, 则称微分算子 (1) 在点 $P^0$ 处为椭圆型的. 如果一切的 $\kappa_i$ 除了一个例如 $\kappa_n$ 之外都有相同的符号, 譬如说都是正的 (那么 $\kappa_n$ 是负的), 则称 (1) 为“狭义双曲型的”或者简称之为双曲型的. 如果有些 $\kappa_i$ 的符号是正的而其余的都是负的, 则称 (1) 为超双曲型的. 如果 $Q$ 是退化的, 此时系数 $\kappa_i$ 中的一个或几个等于零, 则称 (1) 为抛物型的. 相应地也称方程 $L[u]=0$ 为椭圆型的, 双曲型的, 超双曲型的, 和抛物型的.

如果微分算子 (1) 在一点 $P^0$ 处是椭圆型的, 那么在 $P^0$ 处必可利用适当的线性变换把相应的微分方程化为 $u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}+\cdots=0$. 相仿地, 若算子 (1) 是双曲型的, 则可把方程化成

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_nx_n}+\cdots=0.$$

但是, 一般地说来, 不能在整个区域上找到同一个变换把方程化为这些标准形之一[①].

然而如果算子 (1) 的系数 $a_{ik}$ 都是常数, 那么就可以用仅仅一个由变量 $x_i$ 到变量 $\xi_i$ 的仿射变换

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k$$

在整个区域上把它化为标准形. 这个变换和 (5) 一样把特征形化为它的典范型. 如果仍旧用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 记新的自变量并且算子 (1) 是齐次的, 那么微分方程就取得下列形式：

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_iu_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu=0, \tag{6}$$

其中 $\kappa_i$ 等于 1, $-1$, 或 0.

在常系数的情况下, $b_i$ 和 $c$ 都是常数, 那么还可以利用因变量的一个变换去掉和 $\kappa_i\neq0$ 相应的关于 $x_i$ 的一阶导数项而进一步化简方程. 除抛物型的情况不论,

① 像在 3.1 中一样, 如果要把变换后的算子

$$\Lambda[u]=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}u\xi_i\xi_k+\cdots$$

的方阵 $(\alpha_{ik})$ 的主对角线以外的元素都去掉, 那么就必须要 $n$ 个函数 $t_i$ 满足 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 个条件 (参看公式 (4))

$$\sum_{l,s=1}^{n}a_{ls}t_{kl}t_{is}=0\quad(i\neq k).$$

当 $\dfrac{1}{2}n(n-1)>n$ 时, 即当 $n>3$ 时, 这方程组是超定的; 因此它一般地无解. 当 $n=3$ 时, 仍可去掉混合导数项, 但是却不能再要二阶非混合导数的系都相等了.

并令

$$u = v \ \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{b_l}{\kappa_l}x_l\right\}, \tag{7}$$

而从 $u$ 中分离出一个指数函数因子. 这时微分算子 (1) 化为

$$L[u] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{b_l}{\kappa_l}x_l\right\}\left[\sum_{i=1}^{n}\kappa_i v_{x_ix_i} + \left(c - \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\frac{b_l^2}{\kappa_l}\right)v\right]. \tag{8}$$

于是, 非抛物型的常系数线性微分方程可以化为形式如下的微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i v_{x_ix_i} + pv = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{9}$$

其中 $f$ 是自变量的一个已知函数, $p$ 是一个常数. 所以, 一切常系数的二阶线性椭圆型微分方程都可以化为

$$\Delta v + pv = f(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

一切常系数的二阶线性双曲型微分方程都可以化为

$$\Delta v - v_{tt} + pv = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

(这里考虑 $n+1$ 个自变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 令 $x_0 = t$, 并且对于 $x : (x_1, \cdots, x_n)$ 采用 Laplace 算子 $\Delta$).

### 3.3.2 二阶方程的基本解

在以后的各章中将会显出[1], 对于一切线性方程来说, 不论是椭圆型的或双曲型的, 不管它是几阶的或者它的系数怎样变化, 由某些奇异性定义的“基本解”都扮演着一个重要的角色. 这里仅插入关于常系数的二阶线性椭圆型方程的一些简明而初步的讨论. 考虑方程

$$L[u] = \Delta u + \rho u = 0,$$

并且由寻求仅依赖于由点 $x$ 至一参变点 $\xi$ 的距离 $r = \sqrt{\sum(x_i - \xi_i)^2}$ 的“基本”解开始. 将 Laplace 方程化到极坐标面上, 得到 (参看卷 I)

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r + \rho u = 0. \tag{10}$$

容易验证, 函数

$$w(r) = \frac{u_r}{r}$$

① 特别可参考第 6 章 6.15.

满足以 $n+1$ 代替 $n-1$ 时所得的方程：

$$w_{rr}+\frac{n+1}{r}w_r+\rho w=0. \tag{11}$$

于是, 再把 $w$ 改写成 $u$, 就能用递推法求得当 $n$ 取任何正整数值时的“基本解”, 因为当 $n=2$ 和 $n=3$ 时的基本解可由下列常微分方程分别求出：

$$u''+\frac{1}{r}u'+\rho u=0,$$

$$u''+\frac{2}{r}u'+\rho u=0.$$

当 $\rho=0$ 时, 即对于 Laplace 方程来说, 除了一个任意常数因子外, 基本解分别是

$$u=\log\frac{1}{r}\quad 和 \quad u=\frac{1}{r}.$$

于是当 $n\geqslant 3$ 时得到基本解

$$u=常数\cdot r^{2-n}.$$

当 $\rho\neq 0$ 时, 假定 $\rho=\omega^2$, 引用虚数记号 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 则当 $n=1$ 时, 有

$$u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}.$$

所以当 $n=3$ 时

$$u=\mathrm{i}\omega\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}}{r},$$

当 $n=5$ 时

$$u=-\omega^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\frac{1}{r^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r},$$

等等. 于是当 $n$ 为奇数时一切的解都可以用三角函数来表示 (若 $\omega^2<0$ 则为双曲函数).

对于偶数的 $n$, 有 $n=2$ 时的

$$u=\alpha J_0(\omega r)+\beta N_0(\omega r)+正则函数,$$

其中 $J_0$ 和 $N_0=(2/\pi)J_0(\omega r)\log r+\cdots$ 是零级的 Bessel 函数和 Neumann 函数, $\alpha,\beta$ 都是常数. 如果取 $\alpha$ 为零, 则可求得 $n=4$ 时的奇异解

$$u=\frac{J_0(\omega r)}{r^2}+\frac{\omega}{r}J_0'(\omega r)\log r+\cdots$$

(函数 $J_0'(\omega r)/r$ 在 $r=0$ 处是正则的), 称这个解为基本解. 一般地不难判明：当 $n$ 为大于 1 的奇数时, 奇异 (“基本”) 解是

$$u=\frac{U}{r^{n-2}}+\cdots,$$

当 $n$ 为偶数时,

$$u = \frac{U}{r^{n-2}} + W \log r + \cdots,$$

其中三个点表示正则项, $U$ 和 $W$ 是 $L[U] = L[W] = 0$ 的正则解.

当 $\rho < 0$ 时, 即 $\omega$ 为虚数时, 相应的关系也成立.

对于双曲型的方程

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u - \rho u = 0, \quad (x = x_1, \cdots, x_n) \tag{12}$$

完全相仿的讨论得出下列结果：

寻求方程 (12) 的仅依赖于由 $n+1$ 维空间中的点 $(t, x)$ 至参变点 $(\tau, \xi)$ 的“双曲距离”

$$r = \sqrt{(t-\tau)^2 - \sum_{v=1}^{n}(x_\nu - \xi_\nu)^2}$$

的奇异“基本解”. 对于 $u(r)$, 得到常微分方程

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' - \rho u = 0.$$

和前边相仿, 在锥面 $r = 0$ 上有奇异性的基本解具有和上述椭圆型的情况相同的形状. 主要的差别：此刻的奇异性是散布在整个锥面上的, 并且函数 $u$ 在锥体之外没有定义, 或者也可把它在那里定义为恒等于零; 但是在椭圆型的情况里仅仅 $x = \xi$ 是基本解的奇异点. 此种基本解 (可以乘以适当的常数或者加上 $L[u] = 0$ 的任一正则解) 的重要性在第 6 章中将变得更为明显. 在卷 I 中, 已经在 Green 函数的形式下遇见过这样的解 (见卷 I 第 5 章 5.14).

于此指出：这些基本解 $u(x, \xi)$ 作为点 $x$ 和参变点 $\xi$ 的函数具有下列基本性质：

在椭圆型的情况下, 展布在包含点 $x$ 的一个区域 $G$ 上的积分

$$v(x) = \iint_G f(\xi_1, \cdots, \xi_n) u(x, \xi) \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_n$$

满足带着一个适当的常数 $c$ 的 Poisson 方程

$$L[v] = cf(x).$$

特别是当 $n = 3$ 时, 积分

$$cv = \iiint_G f(\xi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}}{\mathrm{i}\omega r} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

满足“约化的波动方程”

$$\Delta v+\omega^2 v=0.$$

在双曲型的情况下可以证明, 若积分区域 $G$ 占满由点 $x$ 发出且指向 $\xi$ 空间的特征锥, 则 $v(x)$ 也满足所论微分方程 (见第 6 章 6.15).

### 3.3.3 平面波

转向任意 $k$ 阶的方程, 并且仍旧把 $n$ 个自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的微分方程写成符号的形式:

$$(P_kD_i+P_{k-1}D_i+\cdots+P_0)u+f=0, \tag{13}$$

其中 $P_k$ 是符号 $D_i=\partial/\partial x_i(i=1,\cdots,n)$ 的常系数 $k$ 次齐次多项式, $f$ 为自变数的已知函数. 只需考虑齐次方程①; 即假定 $f=0$. 然后, 就不难处理非齐次方程了 (参考 3.4).

基本的事实: 不论有几个自变量, 齐次方程 (13) 都具有指数函数的解 $\mathrm{e}^{(ax)}$, 其中

$$(ax)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

$a_\nu$ 为常数 (有时把 $(a,x)$ 写成 $a\cdot x$). 这样的函数为解的必要而充分的条件是 $a=(a_1,\cdots)$ 满足 $k$ 次的代数方程

$$Q^*(a)=P_k(a)+P_{k-1}(a)+\cdots+P_0=0, \tag{14}$$

它在坐标 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的空间里定义了一个 $k$ 次的代数曲面 $Q^*(a)=0$. 不过, 分类则仅仅根据齐次方程

$$Q(a)=P_k(a)=0;$$

这个“特征方程”只取决于微分方程的主部; 它确定了特征面元的法线②, 这是和 3.2 的定义相符合的.

例如, 在三维空间里对于 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=0$ 得到 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$. 所以指数 $a_\nu$ 中至少有一个 (如 $a_3$) 是虚数; 相应的解可以写成如下的形式

$$\mathrm{e}^{xa_1+y^{a_2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.$$

对于波动方程, 有解 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-a_4t)}$, 其中系数 $a_\nu$ 满足 $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2=0$; 对于“约化的”波动方程 $\Delta u+\omega^2u=0$ 有 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=\omega^2$. 对于传热方程 $u_t=\Delta u$, 有 $a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4=0$.

如果方程 $Q(a)=0$ 没有任何实数解组 $a_1,\cdots,a_n$, 则称微分方程为**椭圆型的**.

① 由系数为常数的假定可以推出: 若 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是齐次方程的一个解, $\xi_i$ 是任意的参数, 则 $u(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_n-\xi_n)$ 以及偏导数 $\partial u/\partial x_i$ 也都是解.

② 至于整个方程的意义, 参考 L. Gårding[2].

### 3.3.4 平面波 (续). 前进波. 弥散

在以下的几小节中将初步研究表示传播现象的解, 特别是发生在双曲型情况下的平面波. 除了 $n$ 个空间自变量 $x$ 而外, 还考虑一个自变量 $x_0=t$; 作 $x$ 与 $n$ 维矢量 $a:(a_1,\cdots,a_n)$ 的内积 $(ax)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n=A$ 并定义

$$B=(ax)-bt=A-bt$$

为相, 其中 $-b=a_0$ 为一常数.

先假定微分方程仅包含主部, 即仅具有 $k$ 阶的项, 换句话说, 当 $\kappa<k$ 时 $P_\kappa=0$. 这时有下述重要的事实: 不仅上述指数函数是解, 而且形状为

$$u=f(B) \tag{15}$$

的一切函数一般地说来都是解, 这里波形$f(B)$ 是相 $B=A-bt$ 的任意函数, 并且系数 $a_\nu$ 和 $b$ 满足特征方程 $Q(-b,a)=0$(参考 3.2.4).

假定实数组 $a_1,\cdots,a_n$, $b$ 满足这个方程, 则函数 $f(B)$ 表示无畸变 (波形不变的)前进波.

一个齐次线性微分方程 $L[u]=0$ 的平面前进波的意思指的就是形式为 (15) 的解.

这种平面波在 $n+1$ 维的 $x,t$ 空间里的相平面族

$$B=(ax)-bt=\text{常数}$$

中的每一个平面上的值都取一个常数值.

为了引出 “前进波” 这个名词, 考虑空间变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n$ 维空间 $\mathfrak{R}_n$, 在其中 “场” $u$ 随时间 $t$ 而变. 形式为 (15) 的一个解 $u$ 在相 $B$ 为常数的一族平行平面的每一个平面上的值都是同一个常数. 一个相为常数的平面以不变的速度的空间 $\mathfrak{R}_n$ 里保持平行于自身而运动.

若令

$$a_l=\rho\alpha_l,\quad \sum_{l=1}^n\alpha_l^2=1,\quad \rho^2=\sum_{l=1}^n a_l^2,\quad b=\rho\gamma,$$

$$B=A-bt=\rho\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i-\gamma t\right)=\rho((\alpha x)-\gamma t)=\rho E,$$

并写

$$u=f(B)=\phi(E),$$

则得解的另一表达式, 其中数 $\alpha_l$ 是平面波的法线的 “方向余弦” 而 $\gamma$ 是波传播的速率. 仍旧称 $E$ 为波的相, 函数 $\phi$ 或 $f$ 为波形.

例如, 通常 $n$ 个空间变量的波动方程 $\Delta u - u_{tt} = 0$ 有形式为

$$u = \phi((\alpha x) - t)$$

的平面波; 这里系数 $\alpha_l$ 可以是任何单位矢量 $\alpha$ (满足 $\alpha^2 = 1$) 的支量, 波形 $\phi$ 可以是任一个函数.

换句话说, 波动方程$\Delta u - u_{tt} = 0$具有任意给定的方向和波形的平面波解; 所有这些波都以速率$\gamma = 1$前进.

由于波 $f(B)$ 表示任意形状的波 (或信号) 以速率 $\gamma$ (沿相平面的法线方向 $\alpha$) 保持形状不变而迁移, 所以称为无弥散的波.

若对于任一方向 $\alpha$ 来说, 特征方程 $Q = 0$ 皆具有 $k$ 个不同的实根 $\gamma$, 即沿每一个方向上的无畸变波都有 $k$ 个不同的可能的速率, 但沿不同方向的速率不必相同, 则称微分方程 (13) 为双曲型的(以后将在某些情况下允许特征方程有重根而推广这个定义). 如果微分方程包含有低阶项, 那么仍然保留这个根据特征方程 $Q = 0$ 而下的双曲性的定义.

对于含有低阶项的 (不是当 $\kappa < k$ 时的一切多项式 $P_k$ 皆恒等于零的) 微分方程 (13) 来说, 情况和无畸变波的情况是不同的. 假定前进波存在, 那么它们不再能有任意的形式, 也不能由法线方向确定它们的速率. 事实上, 它们的形式只能限于指数函数且取决于给定的方向和给定的速率.

先考虑下边的例子:

$$\Delta u - u_{tt} + cu = 0, \tag{16}$$

其中 $c \neq 0$. 设 $u = f(B)$ 是方程 (16) 的一个平面波, 其中

$$B = (ax) - bt,$$

于是, 对于给定的 $a$ 和 $b$, 立即得到方程

$$f''(B)(a^2 - b^2) + f(B)c = 0. \tag{17}$$

就是说, $f(B)$ 必须满足一个常系数的线性微分方程, 这个方程限定了波形函数 $f(B)$ 必须是指数函数. 显然, 当速率 $\gamma = 1$ 时, 即当 $b^2 = a^2$ 时, 不再有前进波了. 然而, 对于任何别的速率和方向, 方程 (17) 决定了可能的指数函数波形. 所以, 微分方程 (16) 的波的方向和速率是可以预先任意指定的 (速率为 1 除外); 但是前进波仅能取特殊的波形.

当然, 指数函数 $f(B)$ 的形状取决于常微分方程 (17) 中系数的正负号.

从物理学的角度看, 应当除去在空间里非一致有界的解; 换句话说, 只能考虑形式为

$$f(B) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho((ax) - \gamma t)}$$

的波. 其中 $\rho$ 为"频率". 于是在本例中若 $c>0$, 则在满足 $a^2>b^2$ 的任何方向上, 即对于低于极限速率 $\gamma=1$ 的任何速率, 存在着这样的波. 对于超过这个极限的速率, 解 $f(B)$ 不属于容许的波类, 因为它们在空间里是无界的.

不管怎样, 微分方程 (17) 在下述的意义上表示一种弥散现象：假定解 $u$ 是在同一方向上的前进波的叠加, 它们的形式都满足 (17), 那么各不同的分量以不同的速率而传播, 所以一个复合波的形状必随时间而改变.

其次考虑一般的微分方程 (13), 前进波

$$u=f(B)=f\left((\sum_1^n ax)-bt\right)$$

的形状 $f(B)$ 仍旧取决于一个常微分方程：

$$f^k(B)P_k(-b,a)+f^{k-1}(B)P_{k-1}(-b,a)+\cdots+f(B)P_0=0, \tag{18}$$

当任意取定参数 $a_0=-b,\ a_1,\cdots,a_n$ 的一组值时, 它的系数都是常数. 和前边一样, 以条件

$$B=\mathrm{i}\rho(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n-\gamma t)$$

限制容许的波形, 其中 $a_\nu=\rho\alpha_\nu,\ a_{n+1}=b=-\rho\gamma$. 所以 $\rho$ 是频率, $\alpha$ 是法线方向, $\gamma$ 是波的速率, $\rho$ 和 $\alpha$ 都是实数, 而 $\gamma=p+\mathrm{i}q$ 可以是复数.

对于任意的 $\rho$ 和 $\alpha$, 方程 (18) 把速率 $\gamma$ 确定为方向 $\alpha$ 和频率 $\rho$ 的连续函数, 但要除去一个例外的情况, 即当 (18) 的系数除 $P_0$ 的系数之外皆等于零的情况①.

如果对于给定的 $\rho$ 和 $\alpha$ 来说, 速率 $\gamma$ 具有一个虚部 $q$, 那么可以把波写成下列形式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}p((ax)-pt)}\mathrm{e}^{-qt}.$$

称之为在空间一定点处的波幅随时间按指数规律递减的阻尼波 (通常弃去带有因子 $\mathrm{e}^{qt}(q>0)$ 的解, 因为当 $t$ 增大时它是无界的).

① 例如, 对于方程 (16) 若取速率为 1 而方向为任意时就没有前进波.
另一个弥散的例子是方程

$$\Delta u-u_{tt}+\sum_{i=1}^n u_{x_i}-u_i=0,$$

决定例外方向和速率的条件是

$$\sum_{i=1}^n a_i^2-b^2=0,\quad \sum_{i=1}^n a_i-b=0.$$

如果 $a_i$ 和 $b$ 满足这两个条件, 那么就可以存在任意形状的前进波. 它们的传播速率为 1 而方向属于锥 $\sum_{i\neq k}a_ia_k=0$.

这时仍然有畸变或者弥散现象：一个初始的简谐分量 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(ax)}$ 以依赖于频率的速率传播; 于是由形式为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(ax)}$ 的项的叠加所给出的 $u$ 的初始形状随时间而畸变 (除了由阻尼所致的减弱外), 因为不同的分量按不同的速率传播, 或者说, 按照它们的不同频率而“弥散”.

总之, 平面前进波系是弥散的情况还是无畸变的情况, 决定于微分方程中有无低阶项. 在弥散的情况下, 沿一个给定方向上的前进平面波的波形是指数函数, 而速率可随频率连续地变化. 在无畸变情况下, 波形可以是任意的, 但是速率只能是特征方程的几个不同的根①.

### 3.3.5　例. 电报方程. 电缆中的无畸变波

对于波动方程 $\dfrac{1}{c^2}u_{tt}=\Delta u$, 速率为 $c$ 且具有任意形状

$$\phi\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l x_l-ct\right)\quad\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l^2=1\right)$$

的定形前进平面波沿任何方向皆可能存在. 一个更一般的例子是电报方程

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+(\alpha+\beta)u_t+\alpha\beta u=0, \tag{19}$$

其中电压 (或电流) $u$ 是时间 $t$ 和沿电缆的位置 $x$ 的函数; $x$ 是由一起点量得的电缆的长度②.

除了 $\alpha=\beta=0$ 的情况之外, 这个方程表明有弥散现象. 若令 $v=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t}u$, 则得较简单的关于 $v$ 的方程

$$v_{tt}-c^2v_{xx}-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2v=0.$$

这个新的方程当且仅当

$$\alpha=\beta \tag{20}$$

① 研究一下当 $\kappa<k$ 的那些系数 $P_\kappa$ 随着一个参变数趋于零时由第一种情况到第二种情况的转化是一个有教益的练习.

② 这个微分方程是由下列关于电流 $i$ 和电压 $u$ (它们都是 $x$ 和 $t$ 的函数) 的两个一阶偏微分方程消去一个未知函数而得到的:

$$Cu_t+Gu+i_x=0,$$
$$Li_t+Ri+u_x=0.$$

这里 $L$ 是电缆的电感, $R$ 是它的电阻, $C$ 是它的分路电容, $G$ 是它的分路电导 (电压除电流). 方程 (19) 中的由消去法得出的常数的意思是

$$\frac{1}{c^2}=LC,\quad \alpha=\frac{G}{C},\quad \beta=\frac{R}{L},$$

其中 $c$ 为光速, $\alpha$ 是电容阻尼因子, $\beta$ 是电感阻尼因子.

时才表示无弥散的现象. 在这个情况下, 原来的电报方程当然不具有形状任意给定而绝对无畸变的波的解. 然而, 所得结论可以叙述如下: 若条件 (20) 成立, 则电报方程具有形状为

$$u = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\beta)t} f(x \pm ct) \tag{21}$$

的衰减的然而是"相对地"定形的前进波, 其中$f$是任意的, 前进是沿着电缆的两个方向的.

这个结果对于电报学是重要的; 它表明, 给定了电缆的电容和电感的适当的值时, 信号可以传送而其形状保持相对地不变, 虽然它的强度要随时间而衰减 (参考第 5 章附录 II).

### 3.3.6 柱面波和球面波

叠加原理对于微分方程还能引出解的其他重要形式, 特别是柱面波和球面波.

(a) 柱面波. 二维的波动方程

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{22}$$

有解

$$\exp\{\mathrm{i}\rho(x\cos\theta + y\sin\theta)\}\exp\{\mathrm{i}\rho t\},$$

这里 $\theta, \rho$ 皆可取任意的数值. 对于方向角 $\theta$ 积分这个"平面波", 则得新的解

$$u(x,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t}\int_0^{2\pi} \exp\{\mathrm{i}\rho r\ \cos\ (\theta - \varphi)\}\mathrm{d}\theta = 2\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t} J_0(\rho r),$$

其中极坐标 $r, \varphi$ 和 $x, y$ 的关系是 $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. 这个解表示一个驻波.

于是, Bessel 函数 $J_0$ 给出了波动方程 (22) 的一个旋转对称解, 即一个所谓柱面波. 这个解在原点 $r = 0$ 处是正则的.

利用平面波的叠加, 还可以构造出一个在原点有奇性的解, 它反映着位于原点的点源的辐射过程(参考 3.4). 为了造出它, 要利用广义的波. 考虑图 3-3 中所示 $Q$ 平面上的复积分路线 $L$(参考卷 I 第 7 章), 并作复积分

$$u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t}\int_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\ \cos\ \theta}\mathrm{d}\theta = \pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t} H_0^1(\rho r),$$

这里 $H_0^1$ 表示 Hankel 函数. 于是 $u$ 是波动方程的一个解.

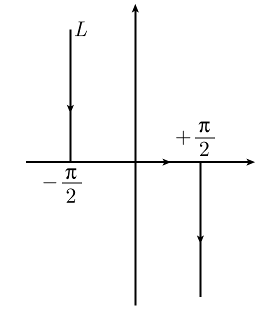



图 3-3

这两个柱面波都是 $t$ 的周期函数, 当然, 对于空间变量 $r$ 来说都是振动的但不是周期的.

(b) 球面波. 在三维空间里, 情况稍有不同. 由解

$$\exp\{\mathrm{i}\rho t\}\exp\{\mathrm{i}\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z)\}=\exp\{\mathrm{i}\rho t\}w$$

通过在 $\alpha,\beta,\gamma$ 空间里的单位球面上做 $w$ 的积分, 得到新的函数

$$v=\iint_{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是单位球面上的面元. 因为这个函数当坐标系旋转时显然是不变的, 所以在计算时可以令 $x=y=0,\ z=r$. 在 $\alpha,\beta,\gamma$ 空间里引入球坐标 $\theta,\varphi$, 则得

$$v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

或

$$v=\frac{4\pi}{\rho}\frac{\sin\rho r}{r}.$$

于是由正则的前进波平面的叠加, 得到一个旋转对称的、在原点为正则的、球面驻波

$$\exp\{\mathrm{i}\rho t\}\frac{\sin\rho r}{r}.$$

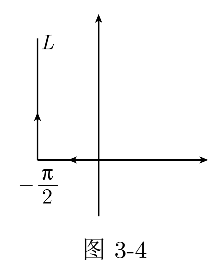


图 3-4

反映辐射现象的在原点具有奇异性的波也必须由广义的平面波造成. 按图 3-4 中的积分路线 $L$ 可得

$$v=2\pi\iint_{L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{e^{\mathrm{i}\rho r}}{\mathrm{i}\rho r}. \tag{23}$$

用实数表示时, 同时得到了两个球面波形 $(\cos\rho r)/r$ 和 $(\sin\rho r)/r$, 后一个正是刚才所得的一个正则的波形.

注意: 可以将任意点 $(x,y,z)(z>0)$ 处的平面波 $\exp\{\mathrm{i}\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z)\}$ 叠加而造成球面波形 (23), 不管这个点取在什么地方都得到

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_L\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r}}{\mathrm{i}\rho r}, \tag{24}$$

其中 $x^2+y^2+z^2=r^2$. (24) 的验证简易①, 可以略过.

由于波动方程不含有弥散项, 所以可以用任意的一个函数 $f(\lambda)$ 来造出旋转对称波

$$u=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(t-\alpha x-\beta y-\gamma z)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

① 积分 (23) 和 (24) 的等价性的证明涉及两个复变量的 Cauchy 积分定理, 因为由 $\rho\neq 0$ 变到 $\rho=0$ 仅意味着在复的 $\theta$ 平面上的积分路线的一个移动 (参考 H. Weyl[1], 其中有公式 (24) 在无线电波传播问题中的一个重要应用).

这个式子是旋转不变的, 所以在计算积分时可令 $x=y=0$. 采用球坐标, 得到

$$u=2\pi\int_0^{\pi}f(t-r\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{r}[F(t+r)-F(t-r)],$$

其中 $f$ 的不定积分 $F$ 是任意函数. 于是, 对于任意的 (两次可微的)$F$, 函数

$$\frac{F(t+r)-F(t-r)}{r}$$

是解①. 同样, 函数

$$\frac{F(t+r)}{r}\quad 和\quad \frac{F(t-r)}{r}$$

两者中的每一个也都是解, 直接验证或适当改变函数 $f$ 或 $F$ 均可证明. 这些在原点显然是奇异的解都表示在空间里不断减弱的“球面前进波”.

而且, 这些也是三维空间里的波动方程仅依赖于空间变量 $r$ 的所有的解, 因为对于函数 $u(r,t)$ 来说, 式 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ 化为

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=\frac{1}{r}(ru)_{rr}$$

(见卷 I). 所以波动方程 $\Delta u-u_{tt}=0$ 化为方程

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr}-(ru)_{tt}]=0,$$

据第 1 章 1.1.1 的 7) 可知其一般解为

$$ru=F(t+r)+G(t-r),$$

这里 $F$ 和 $G$ 都是任意函数.

## 3.4 初值问题. 波动方程的辐射问题

波动传播的线性问题常常可以借叠加微分方程的已知特解的办法而得到解决. 问题是, 在给定的 $t=0$ 时的初始条件和在一个空间区域 $G$ 的边界上的边界条件之下, 求在此区域 $G$ 上当 $t\geqslant 0$ 时的解 $u(x,t), x$ 是空间变量, $t$ 是时间变量 (混合问题). 如果 $G$ 是整个 $x$ 空间并且不提任何边界条件, 则问题化为较简单的情

① 在二维空间里, 积分

$$u=\int_0^{2\pi}f(t-r\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

不能作类似的化简. 这一点表明偶数维空间中的问题和奇数维空间中的问题的根本差异, 这是已经指出过的, 在 3.4 和第 6 章中将更加清楚.

况 —— 初值问题, 或“Cauchy 问题”. 如果 $u$ 与 $t$ 无关, 因而无初始条件, 但 $G$ 是有界的, 则问题为边值问题.

在本节中, 将讨论一些个别的例子, 更一般的理论将在后边作系统地阐述 (见 3.6).

### 3.4.1 热传导的初值问题. $\theta$ 函数的变换

对于传热方程

$$u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

考虑其初值问题：已知

$$u(x,0) = \psi(x), \quad \text{当} \quad t = 0,$$

对于变量 $x$ 的一切值和 $t > 0$, 求具有直到二阶的连续偏导数的解 $u(x,t)$. 这里假定 $\psi(x)$ 处处是连续的而且是有界的,

$$|\psi(x)| < M.$$

由前边 (第 1 章 1.3) 所得的“基本解”, 用叠加法可导出这个初值问题的解：

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4t} \mathrm{d}\xi. \tag{2}$$

它把热的流动表示为一个一个的过程的叠加, 在每一过程中初始温度除了在一点 $x = \xi$ 处外处处为零, 而在这个点处在初始时刻有和 $\psi(\xi)$ 成正比的集中于局部的热量.

下面验证这个结果. 在积分号下进行微分, 立即证明了当 $t > 0$ 时 (2) 满足传热方程. 为了验证 ($t = 0$ 时) 初始条件, 引用新的积分变量 $\sigma = (\xi - x)/2\sqrt{t}$ 以代替 $\xi$, 从而得到

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x + 2\sigma\sqrt{t}) \mathrm{e}^{-\sigma^2} \mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

将这个积分分解为三个部分：

$$J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty},$$

并且取 $T = |t|^{-\frac{1}{4}}$. 当 $t$ 充分小时, 对于任意给定的小正数 $\varepsilon$, 由于函数 $\psi$ 的连续性和显然在区间 $-T \leqslant \sigma \leqslant T$ 上成立的不等式 $|\sigma|\sqrt{t} \leqslant |t|^{\frac{1}{4}}$, 可知不等式 $|\psi(x + 2\sigma\sqrt{t}) - \psi(x)| < \varepsilon$ 在此区间上成立. 再由积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2} \mathrm{d}\sigma = \sqrt{\pi}$ 的收敛性立即可

知当 $t$ 充分小时第二个积分 $J_2$ 与函数 $\psi(x)$ 的差的绝对值是任意小的量. 对于积分 $J_1$ 和 $J_3$ 可作如下的估计：

$$|J_1| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-T} \mathrm{e}^{-\sigma^2} \mathrm{d}\sigma,$$

$$|J_3| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{T}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2} \mathrm{d}\sigma.$$

因为积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2} \mathrm{d}\sigma$ 是收敛的, 所以当 $t$ 取得充分小时这两个积分的值也都是任意小的量. 于是所给的函数确实是所论 Cauchy 问题的解.

对于二维或更高维的传热方程, 其初值问题的解有相仿的明显表达式. 例如, 考虑这样的问题：求方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0$$

当 $t > 0$ 时的解 $u(x, y, z; t)$, 要它在 $t = 0$ 时等于给定的连续函数 $\psi(x, y, z)$. 容易看出, 它的解是

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta, \zeta) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta. \tag{4}$$

传热方程的另一个初值问题是关于一个封闭的一维热导体的 (例如一个铁丝圈), 不妨设其长度为 1. 这个关于方程 $u_{xx} - u_t = 0$ 的初值问题的提法和前边是一样的; 但是多一个条件：函数 $\psi(x)$ 和解 $u(x, t)$ 对于 $x$ 来说都是周期为 1 的周期函数. 利用特解

$$\exp\{-4\pi^2\nu^2 t\}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

的叠加, 在初始函数 $\psi(x)$ 可展为一致收敛的 Fourier 级数

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

的假定下, 找到形式如下的解：

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)\mathrm{e}^{-4\pi^2\nu^2 t}.$$

用积分表示出 Fourier 系数并且交换求和与积分的次序 (当 $t > 0$ 时肯定可以这样做), 得到

$$u(x, t) = \int_0^1 \psi(\xi) \left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4\pi^2\nu^2 t} \cos 2\pi\nu(x - \xi)\right\} \mathrm{d}\xi. \tag{5}$$

另一方面, 如果想到

$$W(x-\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi-\nu)^2}{4t}\right\}. \tag{6}$$

是传热方程的周期为 1 的一个周期解, 还能以不同的方法求得所论问题的解. 由上边的讨论可知所论初值问题的解是

$$u(x,t)=\int_0^1\psi(\xi)W(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

比较这两个解并应用变分法的"基本引理"①, 由于函数 $\psi(\xi)$ 是任意的, 得到恒等式

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\nu^2t}\cos 2\pi\nu x=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi(x-\nu)^2/t}. \tag{8}$$

这个恒等式的 $x=0$ 的特殊情况已经在前边 (参考卷 I) 作为椭圆 $\theta$ 函数的变换公式推导过了, 它在这里又从传热方程得到了说明.

结论 (8) 的根据在于解 (5) 和解 (7) 是恒等的. 为了证明初值问题的解是唯一的, 下面证明初值为零的解 —— 即初值相同的两个解的差 —— 是恒等于零的. 事实上, 以 $u$ 乘方程 $u_{xx}-u_t=0$, 在所论区间上的积分并利用其周期性, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1u^2\mathrm{d}x+\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1u^2\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

因为当 $t=0$ 时 $u\equiv 0$, 所以当 $t>0$ 时 $u\equiv 0$②.

### 3.4.2 波动方程的初值问题

前面已经解决过了一维空间里的波动方程的初值问题 (见第 1 章 1.7.1). 现在进一步讨论三维的波动方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{tt} \tag{9}$$

的初值问题的重要的解. 由前边找到的解 $F(r-t)/r$($F$ 是任意函数) 出发. $r$ 由下式定义:

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

① 参考卷 I.

② 这个在形式上极为一般化了的证明唯一性的方法将在以后起重要的作用 (参考第 5 章 5.4 和第 6 章 6.8).

其中 $(\xi,\eta,\zeta)$ 是参变点.

设 $F_\epsilon(\lambda)$ 是参数 $\lambda$ 的一个非负的函数, 它在区间 $-\epsilon<\lambda<\epsilon$ 外恒等于零并且

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}F_\epsilon(\lambda)\mathrm{d}\lambda=1.$$

显然, 取 $\phi(\xi,\eta,\zeta)$ 为任何函数时, 由叠加球面波所得的函数

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\phi(\xi,\eta,\zeta)\frac{F_\epsilon(r-t)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

都是波动方程的一个解. 现在令 $\epsilon$ 趋于零并在积分号下取极限, 得到表达式

$$u(x,y,z;t)=\frac{t}{4\pi}\iint_{\Omega}\phi(x+t\alpha,y+t\beta,z+t\gamma)\mathrm{d}\omega=tM_t\{\phi\},\tag{10}$$

其中 $\mathrm{d}\omega$ 是球面 $\Omega:\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 上的面元, $M_t\{\phi\}$ 表示函数 $\phi$ 在半径为 $t$ 而以 $(x,y,z)$ 为中心的球面上的平均值.

直接验证 (10) 所表示的函数 $u$ 是波动方程的解要比证明这个极限步骤容易些. 现在略过这个验证, 因为在第 6 章 6.12 中将要更系统地推导它.

函数 $u$ 显然满足初始条件

$$u(x,y,z;0)=0,\quad u_t(x,y,z;0)=\phi(x,y,z).$$

注意到 $u_t$ 和 $u$ 同时为波动方程的解, 易知函数

$$u=tM_t\{\phi\}+\frac{\partial}{\partial t}tM_t\{\psi\}\tag{11}$$

是以

$$u(x,y,z;0)=\psi(x,y,z),\quad u_t(x,y,z;0)=\phi(x,y,z)$$

为初始条件的初值问题的解.

### 3.4.3 Duhamel 原理. 非齐次方程. 推迟势

一旦解决了像波动方程之类的齐次线性微分方程的初值问题, 则可借简单而一般的“Duhamel 原理”求得相应的非齐次方程的一切解, 这原理和常微分方程中的熟知的参数变分法或冲量法是相仿的. 先阐述这个定理 (以后在本卷中还将出现), 然后将它用于波动方程.

考虑关于函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n;t)$ 或简记为 $u(x,t)$ 的微分方程

$$u_{tt}-L[u]=g(x,t).\tag{12}$$

这里 $L$ 是任一线性微分算子, 它可以包含 $u_t$ 但不含 $u$ 对 $t$ 的更高阶的导数. 在实际应用中右端的 $g(x,t)$ 表示作用在一个系统上的外力. 要解的初值问题：求微分方程 (12a) 的一个解 $u$, 要它在 $t=0$ 时满足初始条件

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0. \tag{12a}$$

下边的启发引出解：假定对于一定的 $\tau$ 值 (12) 的右边是这样一个函数 $g_\epsilon$, 它在一个小区间 $\tau-\epsilon\leqslant t\leqslant\tau$ 上满足

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau} g_\epsilon(x,t)\mathrm{d}t=g(x,\tau),$$

此外处处为零. 将微分方程 (12) 先对 $\tau$ 由 $\tau-\epsilon$ 至 $\tau$ 积分, 然后令 $\epsilon$ 趋于零而形式上取极限. 这样一来, 就引至下列关于齐次微分方程的初值问题：给定参数 $\tau$ 的一个值, 求方程

$$u_{tt}-L[u]=0 \tag{13}$$

在 $t\geqslant\tau$ 上的一个解 $u(x,t)$, 在 $t=\tau$ 时满足条件

$$u(x,\tau)=0,\quad u_t(x,\tau)=g(x,\tau). \tag{13a}$$

补充定义这个解在 $t\leqslant\tau$ 上恒等于零, 这意味着在时间 $t\leqslant\tau$ 时为静止的系统上施加一个强度为 $g(x,\tau)$ 的瞬时冲量. 把 (13), (13a) 的这个依赖于参数 $\tau$ 的解记为 $\phi(x,t;\tau)$; 它是独立于上边的直观启发而被定义的. 现在给出结论：由叠加冲量 $\phi$ 而得的函数

$$u(x,t)=\int_0^t \phi_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

是非齐次微分方程(12)带有初始条件 (12a)的初值问题的解.

很容易证明这个论断. 因为

$$u_t=\int_0^t \phi_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$u_{tt}=\phi_t(x,t;t)+\int_0^t \phi_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$L[u]=\int_0^t L[\phi]\mathrm{d}\tau,$$

并且由于 $\phi_t(x,t;t)=g(x,t)$, 所以 $u$ 满足微分方程 (12) 以及初始条件 (12a).

现在把这个一般结论应用到三维波动方程上去. 根据 3.4.2, 有

$$\phi(x,y,z,t;\tau)=(t-\tau)M_{t-\tau}\{g(x,y,z;\tau)\}.$$

于是, 满足波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=g(x,y,z;t)$$

和初始条件

$$u(x,y,z;0)=0,\quad u_t(x,y,z;0)=0$$

的解显然是

$$\begin{aligned}u(x,y,z;t)&=\int_0^t(t-\tau)M_{t-\tau}\{g(x,y,z;\tau)\}\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t\tau M_\tau\{g(x,y,z;t-\tau)\}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\tau\mathrm{d}\tau\int_\Omega g(x+\tau\alpha,y+\tau\beta,z+\tau\gamma;t-\tau)\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 是一个单位矢量的支量. 由球坐标系再回到直角坐标系 $\xi=x+\tau\alpha,\eta=y+\tau\beta,\zeta=z+\tau\gamma$, 得到

$$u(x,y,z;t)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{r\leqslant t}\frac{g(\xi,\eta,\zeta;t-r)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\tag{15}$$

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 这个表达式 $u$ 称为推迟势. 事实上, 它的构成好像是密度 $g$ 随时间而变化的特质分布在空间里的位势 (参看第 4 章, 4.1), 不过这个密度不是取在时刻 $t$ 而是取在较早的时刻 $t-\tau$, 时差 $r$ 正是速度为 1 的信号由球心传至点 $(\xi,\eta,\zeta)$ 所需要的时间.

### 3.4.3′ 一阶方程组的 Duhamel 原理

如果对于一阶方程组 (参考 3.2.3, 方程 (4a)) 用矩阵的形式进行阐述, 则由齐次方程 Cauchy 问题的解过渡到非齐次方程的解是特别简单而且有用的.

把方程组写成矢量的形式

$$L[u]=u_t+\sum_{\nu=1}^n A^\nu u_\nu+Bu=g(x,t),\tag{13b}$$

其中 $u$ 是一个 $K$ 维的矢量, $A^\nu$ 和 $B$ 是 $K$ 行 $K$ 列的矩阵, $g$ 是一个已知矢量.

假定依赖于参数 $\tau$ 的函数 $u=\phi(x,t;\tau)$ 是齐次方程 $L[u]=0$ 在 $t>\tau$ 上的满足 $t=\tau$ 时的初始条件 $u(x,t)=g(x,\tau)$ 的一个解, 那么

$$u(x,t)=\int_0^t\phi(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

就是方程 $L[u]=g(x,t)$ 的满足初始条件 $u(x,0)=0$ 的解.

证明是显然的, 可以略去.

### 3.4.4 二维空间里的波动方程的初值问题. 降维法

二维波动方程

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{tt} \tag{16}$$

的初值问题的解可以由三维的相应问题的解用下述意义深远的方法推得, Hadamard 称之为降维法(参考第 6 章 6.12). 把方程 (16) 看成三维波动方程的一个特殊情况 —— 它的初始条件和解本身皆与第三个空间变数 $z$ 无关. 于是由三维“降”到了二维. 只要假定 3.4.2 公式 (10) 中的 $\phi$ 不依赖于 $z$:

$$\phi(x,y,z)=\phi(x,y),$$

这个论断立即给出所求的解. 在 (10) 中令 $\xi=t\alpha,\eta=t\beta,\zeta=t\gamma$, 得到

$$u(x,y;t)=\frac{t}{4\pi}\iint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1}\phi(x+\xi,y+\eta)\mathrm{d}\omega,$$

其中 $\xi,\eta$ 是积分变量. 还可以把这个积分写成半径为 $t$ 的圆盘 $\xi^2+\eta^2\leqslant t^2$ 上的积分:

$$u(x,y;t)=\frac{t}{2\pi}\iint_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant t}\frac{\phi(x+\xi,y+\eta)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{17}$$

把球面 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=t^2$ 上的面元表示为

$$t^2\mathrm{d}\omega=\frac{t}{\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

于是, 如果初始条件是 $u(x,y;0)=0,u_t(x,y;0)=\phi(x,y)$, 那么 (17) 就表示二维波动方程的初值问题的解.

比较公式 (17) 和公式 (10), 就会看出二维空间和三维空间两种情况的差别是很明显的. 在三维空间里, 解在一点处的值仅依赖于以该点为中心而以 $t$ 为半径的三维球的表面上的初始值, 但是在二维空间里, 一点的依赖区域既包括半径为 $t$ 的二维球 —— 圆 —— 的边界又包括它的内部. 以后我们将分析这个事实的深刻含意 (参考 3.4.6 和第 6 章 6.18).

此外, 3.4.3 的方法还给出非齐次方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x,y;t) \tag{18}$$

的满足初始条件

$$u(x,y;0)=0,\quad u_t(x,y;0)=0 \tag{18a}$$

的解

$$u(x,y;t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\mathrm{d}\tau\iint\frac{f(\xi,\eta;t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

还可以把它写成如下的形式

$$u(x,y;t)=\frac{1}{2\pi}\iiint_K \frac{f(\xi,\eta;\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau, \tag{19}$$

其中 $K$ 是 $(\xi,\eta,\tau)$ 空间中由下列不等式所限定的区域：

$$0\leqslant\tau\leqslant t;\quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant(t-\tau)^2.$$

### 3.4.5 辐射问题

辐射问题在物理学中具有和初值问题同等的重要性; 事实上, 可以把它们当做初值问题的极限情况去处理. 以后在第 6 章 6.18 中将要给出一种和这样的极限运算无关的提法. 在辐射问题中, 所求的函数 $u$ 和它对 $t$ 的导数的初始值都是零 ($t=0$ 时的值皆为零, 状态是静止的). 但是, 在空间中某一点处 (如在原点 $r=0$ 处) 给定解 $u$ 的奇异性, 它是时间的函数.

在三维空间里, 波动方程的在一个定点处具有奇异性的一些解：

$$\frac{F(t-r)}{r},\quad \frac{G(t+r)}{r},$$

它们分别表示膨胀波和收缩波 (暂且不管所应适合的初始条件). 一个辐射问题的解可由下述极限步骤得到. 考虑非齐次方程

$$u_{tt}-\Delta u=f(x,y,z;t), \tag{20}$$

其中 $f$ 是“外力的密度”. 以静止状态为初始条件, 相应的在 $t>0$ 上的初值问题的解是 (见方程 (15))

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint_{r\leqslant t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta;t-\tau)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

给定一个小参数 $\epsilon$, 现在假定当

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant\epsilon^2$$

时 $f=0$, 并记

$$\iiint_{\rho\leqslant\epsilon} f(\xi,\eta,\zeta;t)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=4\pi g(t).$$

若令 $t<0$ 时 $g(t)=0$, 然后取 $\varepsilon\to 0$ 时的极限, 则解化为

$$u=\frac{g(t-r)}{r}, \tag{21}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. 所以, 在辐射问题的这个解里, 函数 $4\pi g(t)$ 表示集中在原点而由 $t = 0$ 开始的激发力. 注意, 解 $u$ 在空间里一点 $(x, y, z)$ 处在时刻 $t$ 的值仅依赖于在原点处于时刻 $t - r$ 发生的一个脉冲, 它以等于 1 的速率传播至点 $(x, y, z)$.

对于二维空间里的辐射问题来说, 情况是完全不同的. 这时微分方程是

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y; t). \tag{22}$$

假定当 $r^2 = x^2 + y^2 \geqslant \epsilon^2$ 时 $f = 0$, 并记

$$\iint_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\epsilon} f(\xi, \eta; t)\mathrm{d}\xi = 2\pi g(t).$$

利用 2.4.4 的结果并令 $\epsilon \to 0$, 得到

$$u(x, y; t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t-r} \frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}}\mathrm{d}\tau, & \text{当 } r \leqslant t, \\ 0, & \text{当 } r > t \end{cases} \tag{23}$$

和三维的情况相反, 解 $u$ 在一点 $(x, y)$ 处并在时刻 $t$ 的值不仅依赖于先前的单个脉冲而且依赖于直到时刻 $t - \tau$ 的整个辐射历程.

研究一下在二维情况下的解在 $r = 0$ 处的奇异性的特点. 为此, 利用

$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \log |t - \tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}|,$$

实行分部积分, 然后按 $r$ 展开, 则得函数在奇异点附近的下列表达式:

$$\begin{aligned} u(x, y; t) = &- g(t - r) \log\ r + g(0) \log\ 2t \\ &+ \int_0^t g'(\tau) \log\ 2(t - \tau)\mathrm{d}\tau + \epsilon(t, r); \end{aligned}$$

其中

$$\epsilon(t, r) \to 0, \quad \text{当} \ \ r \to 0.$$

所以在二维空间里辐射问题的解的奇异性质比三维的情况更为复杂.

### 3.4.6 传播现象和 Huygens 原理

现在要更细致地考察传播现象的特性 (但是, 基本原理在第 6 章中阐述). 先考虑三维的齐次波动方程. 假定在 $t = 0$ 时的初始状态仅在一点的邻域 $G$ 上异于零, 不妨假定这一点就是原点. 为了计算在点 $(x, y, z)$ 处在时刻 $t$ 的 $u$ 值, 用半径为 $t$ 的

球面包围点 $(x, y, z)$ 并计算初始值在这球面上的某些积分. 于是仅当这球面与初始区域 $G$ 相交时 $u(x, y, z; t)$ 才能异于零, 即仅在长度等于点 $(x, y, z)$ 至初始区域 $G$ 的最大距离与最小距离之差的时间间隔 $t_1 < t < t_2$ 内才如此. 这个事实说明了微分方程刻画的是速率为 1 的传播现象. 在区域 $G$ 外的一点 $(x, y, z)$ 处, 当时刻 $t$ 在数值上等于区域 $G$ 和点 $(x, y, z)$ 之间的最短距离 $t_1$ 之前, 是一直不能觉察区域 $G$ 中的初始状态的. 在相当于最大距离的时刻 $t_2$ 之后, 初始状态也不再有任何影响. 这个现象称为关于波动方程的 Huygens 原理. 它说明: 如果初始扰动是界线分明地局限在空间范围内的, 那么后来在不同地点所观察到它的效应也是同样界线分明地有它的时限的. 当异于零的初始状况所在的区域 $G$ 缩为一个点时, 例如初始干扰集中在原点的情况, 它在另一个点 $(x, y, z)$ 的效应仅在某一定瞬间 $t$ 被觉察到, 并且 $t$ 决定于由原点至点 $(x, y, z)$ 的距离.

然而, 在二维空间里, 情景是完全不同的. 仍旧考虑包含原点的一个区域 $G$, 并假定 $u$ 和 $u_t$ 的初始值仅仅在这个区域上异于零. 在坐标为 $x, y$ 而至区域 $G$ 的最近距离为 $t_1$ 的点 $P$ 处, 当 $t < t_1$ 时 $u = 0$ 显然成立. 由 3.4.4 的公式 (17) 知, 当 $t > t_2$ 时 $u$ 并不恒等于零. 事实上, 例如设初始函数 $\phi$ 是非负的, 那么当 $t > t_1$ 之后, 在点 $P$ 处的 $u$ 值就永远不等于零了. 换句话说, 就集中于局部的初始扰动需要一定的时间才能达到空间另一点处而论, 二维空间的波动方程刻画的仍然是一种传播现象. 但是 Huygens 原理不再成立, 因为初始扰动的效应没有明显的终止时刻: 信号一旦达到空间某一点处之后, 它就在那里像“回音”似的无休止地绵延下去.

在研究传播现象时要注意, 在一点 $(x, y, z)$ 和在时刻 $t$ 的状态依赖于它在空间某一定区域上的初始值. 这个区域称为 $(x, y, z; t)$ 的依赖区域. 对于三维空间的波动方程来说, 这个区域就是以点 $(x, y, z)$ 为中心而以 $t$ 为半径的球面. 在这个点处在时刻 $t$ 的扰动与这球面之内和这球面之外的初始数据皆无关.

另一方面, 在二维空间的情况, $(x, y; t)$ 的依赖区域是以点 $(x, y)$ 为中心而以 $t$ 为半径的圆周与其整个内部.

3.4.5 中辐射问题的那些解的物理差异现在看来更为明显了. 假定在三维空间的原点处发出一串干扰, 那么在一点 $P(x, y, z)$ 处在时刻 $t$ 所观察到的仅仅是原点处在 $t - r$ 的瞬间所发出的信号的效应. 但是在二维空间里, 在点 $P(x, y)$ 处在时刻 $t$ 所观察到的效应取决于从开始直到时刻 $t - r$ 的整个辐射过程.

所以, 在波按波动方程传播的三维世界里, 清晰的信号可以放送并且收录到的也是清晰的信号. 在二维世界里, 收到的信号却是模糊不清的.

在第 6 章中将看到, 此种论断既不限于波动方程, 也不限于二维和三维的空间. 我们将看到, 在维数为任何奇数 $n$(除了 $n = 1$) 的空间里, Huygens 原理对于波动方程皆成立, 而在维数为任何偶数的空间里不成立.

# 3.5　用 Fourier 积分解初值问题

## 3.5.1　Fourier 积分的 Cauchy 方法

现在来说明用平面波的叠加来求初值问题的解的一个一般方法. 为了避免讨论交换极限运算的合理性, 仅作启发式的推导; 然后再去直接验证所得表达式确实是问题的解[①].

仍设

$$L[u]=0 \tag{1}$$

是关于函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n;t)$ 或 $u(x;t)$ 的一个 $k$ 阶的常系数齐次线性微分方程, 并设

$$u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n-bt)} \tag{2}$$

或简写作 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{e}^{-ibt}$ 为 (1) 的一个解. 假定 (1) 是双曲型的, 即对于每一组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(或对于每一个矢量 $a$) 恰有 $k$ 个不同的实值 (参考 3.3.4)

$$b=b_\kappa(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad(\kappa=1,2\cdots k),$$

它们是参数 $a_i$ 的代数函数并且使 (2) 适合 (1). 若 $W_1,W_2,\cdots,W_k$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 $k$ 个任意函数, 那么可以用平面波的叠加, 形式地作出表达式

$$u=\sum_{\kappa=1}^{k}\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}W_\kappa(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb_\kappa(a_1,a_2,\cdots a_n)}\mathrm{d}a, \tag{3}$$

其中 $\mathrm{d}a$ 表示 $\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_n$. 显然, 如果所有的积分都是收敛的并且可以在积分号下施行算子 $L[u]$, 那么这个形式表达式仍旧是 (1) 的一个解.

现在就用这一点注记来构造 (1) 的一个适合下列当 $t=0$ 时的初始条件的解：

$$\left.\begin{array}{c}u(x,0)=\phi_0(x),\\ u_t(x,0)=\phi_1(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}(u(x,0))=\phi_{k-1}(x),\end{array}\right\} \tag{4}$$

其中 $\phi_\nu(\nu<k)$ 都是任意给定的函数.

① 不过, 在 3.5.3 中将不把形式构造和验证工作分开.

在积分号下对于 $t$ 微分 (3), 当 $t=0$ 时由这些初始条件得到关于函数 $W_1$, $W_2,\cdots,W_k$ 的方程组

$$\left.\begin{array}{c}\phi_0=\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{k}W_\kappa(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{d}a,\\ \phi_1=\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{k}(-\mathrm{i}b_\kappa)W_\kappa(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{d}a,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \phi_{k-1}=\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\kappa=1}^{k}(-\mathrm{i}b_\kappa)^{k-1}W_\kappa(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{d}a.\end{array}\right\}\tag{5}$$

根据 Fourier 的反演定理, 这些方程的解可由下列公式给出:

$$\sum_{\kappa=1}^{k}(-\mathrm{i}b_\kappa)^lW_\kappa(a)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\phi_l(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a\xi)}\mathrm{d}\xi\quad(l=0,1,\cdots,k-1),\tag{6}$$

其中 $\xi$ 是矢量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n$, 而右边的式子都是已知的. 于是得到关于 $k$ 个未知函数 $W_1,W_2,\cdots,W_k$ 的一组 $k$ 个线性代数方程, 它的行列式 $|(-\mathrm{i}b_\kappa)^l|$ 不等于零, 因为已经假定所有的 $b_i$ 互不相同. 所以唯一地确定了所有的函数 $W_\kappa$, 从而形式地解决了初值问题. 证明被包括在 3.5.3 中.

### 3.5.2 例

作为例子, 仍考虑三维空间里的波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=0$$

和初始条件

$$u(x,y,z;0)=0,\quad u_t(x,y,z;0)=\phi(x,y,z).$$

在此得到 $b$ 的两个值

$$b=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\pm\rho.\tag{7}$$

应用 Fourier 积分和初始条件 $u(x,y,z;0)=0$, 得到表达式

$$u(x,y,z;t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}W(a_1,a_2,a_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1x+a_2y+a_3z)}\sin\rho t\mathrm{d}a.\tag{8}$$

在积分号下微分之后, 令 $t=0$, 得到

$$u_t(x,y,z;0)=\phi(x,y,z)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\rho W(a_1,a_2,a_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1x+a_2y+a_3z)}\mathrm{d}a.$$

据反演公式知

$$W(a_1,a_2,a_3)=\frac{1}{(2\pi)^3\rho}\iiint_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

将此函数 $W$ 代入 (8), 然后交换六重积分

$$u=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{\rho}\iiint_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

中对 $a_1,a_2,a_3$ 和对 $\xi,\eta,\zeta$ 积分的次序, 可以推出解的一个较简单的形式. 然而, 由于里边的积分将会是发散的而不能径直实行这个交换. 但是, 一个简单而常用的技巧 (参考第 6 章 6.12) 能够绕过这个障碍. 不考虑积分 (8) 本身而考虑积分

$$v(x,y,z;t)=-\iiint_{-\infty}^{\infty}\sin\rho t W(a_1,a_2,a_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\frac{\sin\rho t}{\rho^2}\mathrm{d}a. \tag{10}$$

将它对 $t$ 微分两次, 得函数

$$u=v_{tt}.$$

如果将表达式 (9) 代入 (10), 交换积分次序[①]并引用适当的记号[②], 得到

$$v=-\iiint_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[a(x-\xi)]}\frac{\sin\rho t}{\rho^3}\mathrm{d}a,$$

其中里边的积分 $J$ 是收敛的. 简单的计算给出

$$J=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[a(x-\xi)]}\frac{\sin\rho t}{\rho^3}\mathrm{d}a=\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{\sin\rho r\sin\rho t}{\rho^2}\mathrm{d}\rho.$$

因为

$$\sin\rho r\sin\rho t=\sin^2\frac{t+r}{2}\rho-\sin^2\frac{t-r}{2}\rho,$$

立即得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin\rho r\sin\rho t}{\rho^2}\mathrm{d}\rho&=\left(\frac{t+r}{2}-\left|\frac{t-r}{2}\right|\right)\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\rho}{\rho^2}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{t+r}{2}-\left|\frac{t-r}{2}\right|\right)\end{aligned} \tag{11}$$

和

$$J=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & 当\ r\leqslant t,\\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{t}{r}, & 当\ r\geqslant t.\end{cases} \tag{12}$$

① 实行这个交换而不予证明, 因为这里只是以一种启发式的方法推出一个解, 它的证明留待于第 6 章 6.13 中.

② 即 $\rho^2=a_1^2+a_2^2+a_3$, $\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}a$.

所以

$$v=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{r\leqslant t}\phi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta-\frac{t}{4\pi}\iiint_{r\geqslant t}\frac{\phi}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{13}$$

对 $t$ 微分形式如下的积分

$$J_1=\iiint_{r\leqslant t}f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其积分区域是中心在点 $(x,y,z)$ 而半径为 $t$ 的一个球体的内部, 得到这个球的表面 $\Omega$ 上的积分:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t}=\iint_{\Omega}f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\Omega.$$

相应地, 取在这个球的外部空间上的积分

$$J_2=\iiint_{r\geqslant t}f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

的导数是

$$\frac{\partial J_2}{\partial t}=-\iint_{\Omega}f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\Omega.$$

所以由 (13) 得到

$$v_t=\frac{-1}{4\pi}\iint_{\Omega}\phi\mathrm{d}\Omega+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\phi\mathrm{d}\Omega-\frac{1}{4\pi}\iiint_{r\geqslant t}\frac{\phi}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

即

$$v_t=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{r\geqslant t}\frac{\phi}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{14}$$

再微分一次, 最后得到

$$v_{tt}=\frac{1}{4\pi t}\iint_{\Omega}\phi\mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

或者

$$u=v_{tt}=tM_t\{\phi\}, \tag{16}$$

其中记号 $M_t\{\phi\}$ 是前边引用过的. 这个结果与 3.4.2 中的相符合①.

### 3.5.3 Cauchy 方法的证明

能够既求出 Cauchy 问题的解, 同时也阐明其成立的条件并且作出完全的证明, 而不只是把 Cauchy 方法作为有待证明的一种形式的构造. 现在就将前边的讨论稍加修整而给出这种分析的一个扼要介绍.

① 关于这个公式在 $n$ 维空间中的推广, 参考第 6 章 6.12.

最一般的常系数齐次线性的 $k$ 阶微分方程可以写成如下的形式 (见 3.3)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0, \tag{17}$$

其中

$$P(y_1, y_2, \cdots, y_0) = \sum_{\kappa=0}^{k} P_\kappa(y_1, y_2, \cdots, y_0) \tag{18}$$

是一个常系数的 $k$ 次多项式, 可以把它表示为一些 $\kappa \leqslant k$ 次的齐次多项式 $P_\kappa$ 的和[①].

方程 (17) 的以平面 $x_0 = 0$ 为初始曲面的 Cauchy问题就是要求出 (17) 的适合下列初始条件的解：

$$\frac{\partial^\kappa u}{\partial x_0^\kappa} = \phi_\kappa(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{19}$$

$$\text{当} \quad x_0 = 0 \quad \text{且} \quad \kappa = 0, 1, \cdots, k-1,$$

其中 $\phi_\kappa$ 皆为已知函数. 若存在一个数 $N$, 使得当 $\phi_\kappa$ 皆为属于 $C_N$ 类[②]的函数时, 方程 (17) 和条件 (19) 仅能有一个解 $u$(它连续地依赖于 $\phi_\kappa$ 和它们的不高于 $N$ 阶的导数), 则称这个问题为适定的[③].

条件

$$p = P_k(0, \cdots, 0, 1) \neq 0 \tag{20}$$

显然是必要的, 因若不然则方程 (17) 当 $x_0 = 0$ 时将构成数据 $\phi_\kappa$ 和其导数之间的一个关系, 而这个关系一般地并非恒等式 (条件 (20) 说明初始流形 $x_0 = 0$ 不是特征流形, 参考 3.2.4).

一个不太明显的必要条件：方程

$$P_k(y_1, y_2, \cdots, y_n, \eta) = 0 \tag{21}$$

当 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 取任一组实值时应当仅有实根. 此刻仅对方程

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) u = 0 \tag{17a}$$

来说明这个条件的必要性, 这里所有出现的导数都是 $k$ 阶的. 假定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 取某一组实数值时方程 (21) 有一个复根 $\eta$. 由于方程 (21) 的系数都是实数, $\eta$ 的共轭复数也必定是一个根, 并且不失一般性可以认为

$$\mathrm{Im}(\eta) = -z < 0.$$

① 这里下标是 $\kappa$, 记号与 3.3 中稍有不同.

② $C_N$ 为一切具有不高于 $N$ 阶的连续导函数的函数所成的函数类.

③ 在 3.6.2 中将讨论如何判断一个问题是否适定的. 这里暂就按这个意义去使用“适定”一词.

于是, 对于任何正的实数 $\lambda$, 函数

$$u=\lambda^{-N-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x_1y_1+\cdots+x_ny_n+x_0\eta)} \tag{22}$$

是微分方程 (17b) 的适合初始条件

$$\phi_\kappa=\mathrm{i}^\kappa\eta^\kappa\lambda^{\kappa-N-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)},\quad \kappa=0,1,\cdots,k-1$$

的一个解. 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 函数 $\phi_\kappa$ 和它的不高于 $N$ 阶的导数关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 一致趋于零, 而

$$|u(0,\cdots,0,x_0)|=\lambda^{-N-k}\mathrm{e}^{\lambda zx}$$

趋于无穷. 这和 $u$ 对 $\phi_\kappa$ 及其低于和等于 $N$ 阶的导数的连续依赖性是不相容的. 相仿的论证对于更一般的方程 (17) 也成立; 从而证明了, 仅当对于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的任意实值方程 (21) 的一切根皆为实数时, 特别是当方程 (17) 按 3.2.3 中的定义为双曲型的时候, 初值问题才可能是适定的①.

然而, 方程 (21) 的根皆为实数, 这个条件是很不充分的②. 作为例子, 考虑 $k=2,n=1$ 时的抛物型方程

$$u_{x_0x_0}-u_x=0. \tag{23}$$

这时 (21) 退化为 $\eta^2=0$, 所以它仅有实根. 若

$$\eta^2+\mathrm{i}y_1=0,$$

则公式

$$u=y_1^{-N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1y_1+x_0\eta)}$$

给出方程 (23) 的一个解. 相当于根 $\eta=(1-\mathrm{i})\sqrt{y_1/2}$ 的那个解 $u$ 当 $y_1$ 趋于无穷时趋于无穷, 虽然它的初始值和它的不高于 $N$ 阶的导数都趋于零. 因此, 虽然 (21) 的根都是实的, 方程 (23) 的 Cauchy 问题却是不适定的.

现在要给出一种充分条件: 如果对于不同时为零的一切实的 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 值, 方程 (21) 的一切根都是实的而且互不相同, 那么方程 (17) 的 Cauchy 问题就是适定的. 证明时, 基本上按照 Cauchy③的作法造解. 首先注意方程 (17) 的以 (19) 为初始条件的 Cauchy 问题可以化为该方程的带有特殊的初始条件 $\phi_0=\phi_1=\cdots=\phi_{k-2}=0$ 和任意给定的 $\phi_{k-1}$ 的初值问题. 于是, 所要的适合一般初始条件 (19) 的解 $u$ 可以写成

$$u=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\partial^r u_r}{\partial x_0^r},$$

① 参考 F. John[4], 第 2 章.

② 对于常系数方程, L. Gårding[2] 已经给出了保证 Cauchy 问题的适定性的充要条件.

③ 参考 A. Cauchy[1].

其中 $u_r$ 是方程 (17) 的适合下列特殊初始条件的解：

$$\frac{\partial^\kappa u_r}{\partial x_0^\kappa}=\begin{cases}0, & 当\ \ \kappa=0,1,\cdots,k-2,\\ g_r(x_1,x_2,\cdots,x_n), & 当\ \ \kappa=k-1.\end{cases}$$

必须选择 $g_r$ 使 $u$ 适合 (19); 为此令

$$g_{k-1}=\phi_0,$$

$$g_{k-1-\kappa}+\sum_{r=k-\kappa}^{k-1}\left(\frac{\partial^{r+\kappa}u_r}{\partial x_0^{r+\kappa}}\right)_{x_0=0}=\phi_\kappa,\quad \kappa=1,2,\cdots,k-1.$$

当 $\kappa=0,1,\cdots,k-1$ 时, 依次得出一系列的关系, 从而首先确定 $g_{k-1}$, 然后确定 $u_{k-1}$, 再确定 $g_{k-2}$, 再确定 $u_{k-2}$, 如此类推. 所以, 只需研究如何求方程 (17) 的适合在曲面 $x_0=0$ 上的初始条件

$$\frac{\partial^\kappa u}{\partial x_0^\kappa}=\begin{cases}0, & 当\ \ \kappa=0,1,\cdots,k-2,\\ \phi(x_1,x_2,\cdots,x_n), & 当\ \ \kappa=k-1\end{cases}\tag{24}$$

的解就行了. 为了完成解的构造, 先考察函数 $\phi$ 的形式是 $\exp\{\mathrm{i}(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\}$ 时的解. 根据常微分方程的理论, 这个解是

$$\exp\{\mathrm{i}(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\}Z(y_1,\cdots,y_n,x_0).\tag{25}$$

其中

$$Z(y_1,\cdots,y_n,x_0)=\frac{p}{2\pi}\oint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta x_0}}{P(\mathrm{i}y_1,\cdots,\mathrm{i}y_n,\mathrm{i}\eta)}\mathrm{d}\eta.\tag{26}$$

这里 $p$ 是由 (20) 确定的, 在复的 $\eta$ 平面上的积分路线应围绕分母的一切零点. 对于仅在 $y$ 空间的有限部分上变化的 $y$ 而言, 分母的零点也都是有界的, 所以可以选取一条与 $y$ 无关的积分路线. 由此可知 $Z$ 是它的变元的整函数. 设 $y_\nu=rz_\nu$, 其中 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=1$. 下面证明量

$$r^{k-1}Z,\quad r^{k-2}\frac{\partial Z}{\partial x_0},\cdots,r^{-1}\frac{\partial^k Z}{\partial x_0^k}\tag{27}$$

对于一切适合条件 $r>1$, $|x_0|<M$ 的实变元 $y_1,y_2,\cdots,y_n,x_0$ 是一致有界的.

为此, 把方程

$$P(\mathrm{i}y_1,\cdots,\mathrm{i}y_n,\mathrm{i}\eta)=0\tag{28}$$

写成

$$P_k\left(z_1,\cdots,z_n,\frac{\eta}{r}\right)+\frac{1}{\mathrm{i}r}P_{k-1}\left(z_1,\cdots,z_n,\frac{\eta}{r}\right)+\cdots=0.\tag{29}$$

因为由假设知

$$P_k(z_1, \cdots, z_n, \zeta) = 0 \tag{30}$$

的根都是单根, 并且由于最高次项的系数固定且其根皆为单根时这种多项式的根是其他系数的连续可微函数, 所以对于 (28) 的每一个根 $\eta$ 必有 (30) 的一个根 $\zeta$, 它使 $|\eta/r - \zeta|$ 的数量级当 $r$ 很大时同于 $1/r$. 根 $\zeta$ 都是实的且互不相同, 所以当 $r$ 充分大时根 $\eta$ 也互不相同且其虚部都是有界的. 利用留数理论, 当 $r$ 充分大时可以把 $Z$ 写成

$$Z = p \sum_{\kappa=1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_\kappa x_0}}{P'(\mathrm{i}y_1, \cdots, \mathrm{i}y_n, \mathrm{i}\eta_\kappa)},$$

其中 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k$ 是 (28) 的根, $P'$ 是 $P$ 对其最后一个变元的导数. 因为

$$\begin{aligned}
&P'(\mathrm{i}y_1, \cdots, \mathrm{i}y_n, \mathrm{i}\eta_\kappa)\\
=&(\mathrm{i}r)^{k-1}\left[P_k'\left(z_1, \cdots, z_n, \frac{\eta_\kappa}{r}\right) + \frac{1}{\mathrm{i}r}P_{k-1}'\left(z_1, z_2, \cdots, \frac{\eta_\kappa}{r}\right) + \cdots\right]\\
=&(\mathrm{i}r)^{k-1}P_k'(z_1, \cdots, z_n, \zeta) + O(r^{k-2}),
\end{aligned}$$

并因 $\exp\{\mathrm{i}\eta_\kappa x_0\}$ 和 $\eta_\kappa/r$ 都是有界的, 所以 (27) 中各函数当 $r > 1$ 且 $|x_0| < M$ 时都是有界的.

现在要来求以 (24) 为初始条件的 Cauchy 问题的解. 和前边一样, 用缩写记号 $x, y, \xi$ 记矢量 $x_1, \cdots, x_n$, 等等, 且 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$, 等等. 假定 $\phi$ 在一个有界区域之外恒等于零并且是属于 $C_{n+2}$ 类的函数. 于是可以用 Fourier 积分将 $\phi$ 表示如下 (见第 I 卷)

$$\phi(x) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy)}\mathrm{d}y,$$

其中

$$(2\pi)^n\psi(y) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi y)}\mathrm{d}\xi. \tag{31}$$

函数 $\phi$ 是属于 $C_{n+2}$ 类的; 所以由分部积分知 $r^{n+2}\psi(y)$ 是有界的, 并且从而知道积分

$$\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} r|\psi(y)|\mathrm{d}y$$

收敛. 于是

$$u(x, x_0) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy)}Z(y, x_0)\mathrm{d}y \tag{32}$$

是属于 $C_k$ 类的, 并且显然适合条件 (17) 和 (24). 所以 Cauchy 问题解决了. 因为可以证明 $u$ 仅仅依赖于 $\phi$ 在一个有界区域上的初始值 (可由本章附录 II 中的唯一性定理推出这一点). 所以 $\phi$ 在一个有界区域外等于零这个假定并不是一个限制.

$u$ 的表达式 (32) 不直接包含函数 $\phi$ 而仅含它的 Fourier 变换式 $\psi$. 因此, 把由 (31) 给出的 $\psi$ 的表达式代入 (32), 得到

$$u(x, x_0) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) K(x - \xi, x_0) \mathrm{d}\xi, \tag{33}$$

其中

$$(2\pi)^n K(x, x_0) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy)} Z(y, x_0) \mathrm{d}y. \tag{34}$$

如果确定 $K$ 的积分绝对收敛, 那么在导出 (33) 时交换积分次序无疑地是合理的. 由于 $r^{k-1}Z$ 是有界的, 所以当方程的阶数 $k$ 和自变量的个数 $n+1$ 满足不等式

$$k \geqslant n + 2 \tag{35}$$

时, 这个积分确实是收敛的. 表达式 (33) 表明 $u$ 在这个情况下连续地依赖于初始函数 $\phi$. 如果不等式 (35) 不成立 (如在高维空间的波动方程的情况), 就不能由前边的议论得出这个结果. 但是这时仍可得到 (33) 的一个修正公式. 假定有一个正整数 $\kappa$ 满足下列不等式:

$$n - 1 \geqslant 2\kappa \geqslant n + 2 - k. \tag{36}$$

只要微分方程的阶数 $k$ 不低于 4, 这样的 $\kappa$ 是一定可以找到的. 用 $\Delta$ 记 Laplace 算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, 可以把 (32) 所给出的解 $u$ 写成①

$$u = \Delta^\kappa \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)(-1)^\kappa r^{-2\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy)} Z(y, x_0) \mathrm{d}y,$$

其中的积分在原点处是绝对收敛的, 因为 $2\kappa < n$. 假定现在令

$$(2\pi)^n K^*(x, x_0) = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^\kappa r^{-2\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xy)} Z(y, x_0) \mathrm{d}y,$$

那么, 确定 $K^*$ 的积分是绝对收敛的, 并且得到表达式

$$u = \Delta^\kappa \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) K^*(x - \xi, x_0) \mathrm{d}\xi.$$

由于这个表达式还可以写成

$$u = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^\kappa \phi(x + \xi) K^*(-\xi, x_0) \mathrm{d}\xi,$$

所以可以看出 $u$ 连续地依赖于 $\phi$ 和其不超过 $2\kappa$ 阶的各个导函数 (此处略去 $k = 2$ 的情况下的解, 可以用别的方法求它, 参看第 6 章 6.12).

① 译者注. 原书中 $u$ 及 $K^*$ 的表达式均少一个因子 $(-1)^\kappa$.

对于常系数的方程组可以建立相仿的理论; 不过, 在这里要略去它.

在 3.3.6 中已经用叠加任意的 —— 不一定是指数函数形的 —— 平面波的办法造出了解 (除了 $\kappa = k$ 之外一切的 $P_\kappa$ 皆为零的, 亦即无弥散的情况), 那里的微分方程仅具主部, 因而是可以避免应用 Fourier 积分的 (参考第 6 章 6.14, 6.15).

## 3.6 数学物理微分方程的曲型问题①

### 3.6.1 引言

求偏微分方程的"通解"—— 即它的一切解的全体 —— 几乎是从来没有的问题. 通常, 总是要求按附加条件去挑出微分方程的个别的特定解. 对于 $n+1$ 个自变量的情况, 这些附加条件通常是给定在 $n$ 维流形上的, 它们有时是边界, 有时是初始流形, 有时是求解区域内部的间断面 (相应的条件为"边界"条件、"初始"条件和"跳跃"条件). 在 3.4 中已经特别讨论过初值问题或"Cauchy 问题"：沿着平面 $x_0 = t = 0$ 给定了函数 $u$ 的值, 视情况的需要, 或者还给定了 $u$ 对 $t$ 的导数的值, 它们都是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数. 要求 $t \geqslant 0$ 上的一个解 $u$, 它在 $t = 0$ 时符合给定的"初始条件". 可以把这样的初值问题的解延拓到 $t < 0$ 上, 于是流形 $t = 0$ 位于解的定义域的内部. 换句话说, 可以把 $t = 0$ 时的状态看成早先的一个状态的后果, 而这个早先的状态向着未来的发展遵守同样的规律. 在一阶微分方程的情况, 已经在第 2 章中求出了它的初值问题的解, 这样的延拓是自动的. 对于高阶方程, 在第 1 章中有一个类似的结果, 其中论述的是解析的微分方程和解析的初始条件. 然而, 微分方程是解析的或初始条件是解析的这种假定通常是一种人为的限制; 而且, 即使就解析的微分方程来说, 它的一切解的解析性质也不是先验的. 所以最好是在研究初值问题或边值问题时不去考虑解的跨越这些边界的延拓.

一个曲型的 边值问题—— 分析学的中心问题之一 —— 就是要寻求位势方程 $\Delta u = 0$ 的一个解, 要它在一个给定的区域内是正则的, 即自身是连续的且具有直到二阶的连续的偏导数, 并且它在区域的边界上取得给定的连续但不一定是解析的边界值. 在 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的情况下, 相应的在圆内或球内的边值问题已经由 Poisson 积分解决了 (见第 1 章 3.3.2 和卷 I 第 7 章). 在本卷第 4 章中和卷 III 中将对任意的区域造出解并讨论之.

在位势方程的其他边值问题里, 在边界上给定了函数和他的法向导数的某个线性组合的值. 在卷 I 第 6 章中已经由变分法的观点讨论过这样的问题, 将在卷 III 中解决它.

"通"解对于边值问题可能是无用的, 位势理论对于这件事给出了一个很好的

① 参考 J. Hadamard[2], 特别是第 1 章和他的综合性论文 [1], 其中还讨论了其他类型的问题.

例证. 例如, $n=2$ 时的 Laplace 方程的熟知的通解是

$$u=f(x+\mathrm{i}y)+g(x-\mathrm{i}y),$$

其中 $f$ 和 $g$ 都是任意的复变解析函数. 然而, 解的这个形式对于一般的边值问题的处理是没有什么用处的①.

其次, 介绍一下与极小曲面有关的一个非线性边值问题. 假定在 $x,y,u$ 空间里给定了一条空间曲线 $\Gamma$, 它的投影 $C$ 在 $x,y$ 平面上围出一个区域 $G$. 为了寻求张在 $\Gamma$ 上的一个极小曲面, 提出下列极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{uu}=0 \tag{1}$$

的边值问题. 寻求方程 (1) 的一个解 $u(x,y)$, 它在 $G$ 上是两次连续可微的, 并且在 $C$ 上取给定的值 (非对称形式的 Plateau 问题).

此外, 还应指出称为“混合问题”的一类重要问题. 考虑变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的空间里的一个固定的区域 $G$, 假定它的边界 $\Gamma$ 具有适当的正则性. 求区域 $G$ 上且 $t\geqslant 0$ 的一个函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 或 $u=u(x,t)$, 它满足一个给定的微分方程 $L[u]=0$, 它在边界 $\Gamma$ 上取给定的可能依赖于 $t$ 的边界值, 并且当 $t=0$ 时在 $G$ 上适合给定的初始条件. 一个具体的例子是绷紧在 $x=0$ 和 $x=1$ 两点之间的弦的振动问题, 边界条件是

$$u(0,t)=u(1,t)=0,$$

而初始条件是

$$u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x).$$

在许多混合问题中, 微分方程的边界条件都是非齐次的.

如果 $L[u]$ 是线性齐次的算子, 那么可以分为两类.

1) 边界条件是齐次的. 例如, 函数 $u$ 在边界上等于零. 这样的条件出现于展布在区域 $G$ 上的一个有界系统的振动问题中, 假定运动从 $t=0$ 时的一个给定的状态开始. 在卷 I 中已经彻底讨论过这些振动问题, 特别是在本征函数理论的基础上.

2) 初始条件是齐次的. 例如, 函数 $u$ 可能和它的几个导数当 $t=0$ 时皆等于零. 然而, 边界条件是非齐次的. 此类问题, 例如瞬态响应问题, 在许多应用中占有很重要的地位.

原则上, 瞬态问题可以化为第一类问题. 只需从微分方程的未知函数里减去一个满足所给的初始条件和边界条件的任一个函数. 于是便得到关于这个差的一个振动型的问题, 其中的微分方程是非齐次的. 因此立即可以用卷 I 第 5 章中的本征

① 俄文本注：在一系列的著作中, 由解的一般表达式出发解决了两个自变量的椭圆型方程的非常一般的边值问题. 例如, Vekya[1,2].

函数法予以解决. 虽然这种转化是能行的, 但无论从理论或从实践的角度看最好是对瞬时问题进行独立的研究. 在第 5 章附录 II 中将论述一些特别适用的方法.

辐射问题, 在 3.4.5 中把它当做非齐次方程的初值问题的极限情况处理, 还可以作为瞬时问题的极限情况来处理. 因为它们也属于混合问题的类型.

最后, 记述一些不属于上边所说到的那些类型的典型例子. Riemann 的映射问题要求把 $x, y$ 平面上的一个给定的区域 $G$ 共形地映射到单位圆 $u^2 + v^2 < 1$ 上. 这个问题在解析上导致下列边界值问题：在以 $\Gamma$ 为边界的区域 $G$ 上求 Cauchy-Riemann 微分方程组

$$u_x = v_y, \quad u_y = v_x$$

的一组解 $u(x, y), v(x, y)$; 要它们在 $G$ 上是连续的并且具有连续的一阶偏导数, 此外, 还要它们具有连续的边界值, 这些边界值要满足边界条件 $u^2 + v^2 = 1$ 并且把 $\Gamma$ 一对一地映射为单位圆.

在这个提法下, 显然面对的不再是位势理论的一个简单的边值问题, 虽然解这个问题可以归结于解一个通常的边界值问题 (如在卷 I 上曾证明并且在下一章中还将要从另一个观点去证明的).

更一般的是参数式的 Plateau问题：要求张在一条给定的空间曲线 $\Gamma$ 上的一叶极小曲面. 根据 3.1.4, 可以把它提为如下的微分方程问题：在单位圆 $v^2 + v^2 < 1$ 内求 $u, v$ 的三个函数 $x, y, z$, 要它们满足方程

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \tag{2}$$

和附加条件

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0, \tag{3}$$

并且取边界值 $x(s), y(s), z(s)$, 这些边界函数是单位圆的弧长 $s$ 的连续函数并且构成所给空间曲线 $\Gamma$ 的一个参数表达式. 虽然非对称形的 (见方程 (1))Plateau 问题不一定有解, 但是这里所给的对称形的问题总是可解的①.

另一个涉及位势方程的典型例子是平面流体力学的“射流问题”. 它和古典的边值问题的差别主要在于边界值是给定在“自由”(非预先给定的)边界上的. 下面考察从一个对称的喷嘴里喷出的不可压缩的液体的二维无旋流动. 假定这流动有对称性; 对称轴 —— 假定是 $x$ 轴 —— 是一条流线, 并且可以固壁代之. 假定 $G$ 是 $x, y$ 平面上由 $x$ 轴上由喷嘴边界和射流边界所组成的曲线界出的无限区域. 所给的喷嘴边界 $D$ 由一点 $A$ 起沿逆流方向渐近地趋于水平线 $y = b$. 未知的射流边界 $S$ 由 $A$ 起沿顺流方向渐近地趋于水平线 $y = 1$(见图 3-5). 要寻找确定所论流动的“流函数”$\psi(x, y)$, 它满足微分方程 $\Delta\psi = 0$. 由于 $G$ 的边界都是流线, 所以 $\psi$ 在边

① 参考 R. Courant[2].

界上是常数; 假定在 $x$ 轴上 $\psi=0$ 而在 $D+S$ 上 $\psi=1$. 在 $S$ 上压强是常数, 所以, 由 Bernoulli 定理知在 $S$ 上 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}$=常数(这里 $\nu$ 表示外法线方向). 此外, 需要当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时 $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ 趋于 1 并且当 $x$ 趋于 $-\infty$ 时 $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ 趋于 $\dfrac{1}{b}$. 这是一个"自由"边值问题. 关于 $\psi$ 的条件中射流的边界 $S$ 和常数 $b$ 都不是预先给定的而是需要作为解答的一个组成部分有待于确定的. 因此, 除了通常的边值问题的条件之外还提出了附加的边界条件, 即在 $S$ 上的法线方向导数是常数①.



图 3-5

最后还应当提到一种更加不同的问题 —— 散射问题：需要用波动方程的一个待求的解 —— 散射波 —— 去修正一个预先给定的"入射"波, 例如一个平面波, 使它们的和适合在障碍物上所提的条件. 将在第 4 章 4.5 中去讨论此类问题.

### 3.6.2 基本原理

在 3.6.1 中所列举的各种类型的微分方程都是由物理学、力学或几何学的问题导出的. 附加条件的提法 —— 例如边界条件或初始条件 —— 同样也是由物理实际所提供的. 然而还必须从纯数学观点论证它们的基础. 不过, 我们并不打算从事探究完全的理论系统, 而将联系着一些典型例子建立重要的指导原则; 它将在以后的研究中得到证实.

主要的原则：边界问题必然与椭圆型方程联系着; 而初值问题、混合问题和辐射问题必然与双曲型和抛物型方程联系着.

一个反映物理现实的数学问题应当满足下列基本要求：

1) 解必须存在.

2) 解应当是唯一确定的.

3) 解应当连续地依赖于数据 (稳定性要求)②.

第一个要求表示对于解所要求的逻辑条件不过多, 即无矛盾性.

第二个要求约定了问题的完整性 —— 除属物理所固有的情况③之外, 应当排

---

① 自由射流问题是 Helmholtz 在 1868 年首先研究的, 后人对于许多特殊形状的喷嘴得出过解. 对于一般形状的喷嘴, 解的存在性是 1929 年由 A. Weinstein 确定的. 关于历史的概述和二维的尾流与射流理论的参考文献, 参考 Weinstein[1].

② 这里认为, 对于每一个具体的问题应当指出这个连续性是在怎样的意义上理解的. 为此需在问题的数据函数空间里和解函数空间里引入范数. 条件 (3) 归结于这样一种要求：问题的数据函数发生按范数说为微小的变动时所引起的解的变化按范数说也是微小的. 在线性问题里, 经常把条件 (3) 理解为问题的数据函数以及它们的直到某 $r$ 阶的导函数按范数为微小的时候, 所对应的解按范数说也是微小的.

—— 俄译本注

③ 有些情况下, 唯一性是一种不适当的要求. 例如, 在具有重本征值的情况下, 本征问题具有整个一族解.

除不确定性或多值性.

如果数学问题描述的是真实可见的现象, 那么第三个要求特别是必不可少的. 因为量测数据的手段本身就包含着微小的误差, 所以不可能认为实际中的数据是绝对精确的. 例如, 时间或空间坐标的给定值就总是在某一定的精确度之内. 因此, 除非给定的数据在充分小的幅度内变动时所引起的解的变动也是任意小的, 否则就不能认为一个数学问题确实反映着某一物理现象. 这个"稳定性"要求不仅对于问题的物理现实性是重要的, 而且对于近似方法也是重要的.

任何问题凡满足以上三条要求者均称之为适定的问题.

另一个重要的观点是由初值问题和辐射问题的例子提供的. 在许多情况下, 解显然并不依赖于所给数据的全部; 这就发生了数据的影响区域或解的依赖区域的问题.

为了确证一般论述, 将给出几个实例, 借以端正认识, 主要是关于第三个要求的认识.

首先在以 $\varGamma$ 为边界的区域 $G$ 上考虑椭圆型方程 $\Delta u = 0$. 至少在 $G$ 为圆、球或矩形等特殊情况下 (参考卷 I 第 5 章 5.15) 已经证明了解的存在性 (在第 4 章中将给出一般情况的证明). 无论如何, 当边界为任何逐段光滑的曲线时, 边值问题总是满足唯一性要求. 在 $G$ 上为正则的每个位势函数必在 $\varGamma$ 上取得它的极大值和极小值 (参考第 4 章 4.1), 因而, 如果它在边界上等于零, 它在 $G$ 上就恒等于零. 由这个事实立即可以推出唯一性的结论. 因为如果有两个解适合同一个边界条件, 那么它们的差是一个边界值为零的位函数, 所以这个差必恒等于零, 因而两个解是一样的.

问题也满足解连续依赖于边界值的要求. 如果两个解的边界值的差的绝对值不超过 $\varepsilon$, 那么在 $G$ 的内部它们的差是绝对值也不超过 $\varepsilon$ 的一个位势函数, 因为它必须在 $\varGamma$ 上取得其极大和极小值. 所以, 按照定义来说, 位势方程的边界值问题是适定的.

此外, 解在区域内每一点上的值的依赖区域都是整个边界; 即解 $u$ 在任一闭子区域 $G_1$ 上的值依赖于边界 $\varGamma$ 的每一部分上的值. 如果 $\varGamma$ 的某一部分 $C$ 对子区域 $G_1$ 上的 $u$ 值没有影响, 那么, 当改变 $C$ 上的边界值而保留边界的其余部分 $C'$ 上的值不变时, 在这个子区域里将得到相同的解. 作这两组边界值的差, 将得到在 $G_1$ 上因而在 $G$ 上恒等于零而边界值不恒等于零的解. 这显然是荒谬的, 因为对于这样的解来说边界上所有的值都必须等于零.

与边值问题不同, 位势方程的初值问题是不适定的. 下面证明它不满足第一个要求 (解的存在性) 和第三个要求 (解对数据的连续依赖性).

例如, 对于方程 $\Delta u = 0$ 给出初始条件 $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = g(x)$. 根据位势理论的一个原理 (参考第 4 章), 在上半平面 $y > 0$ 上的任一个解皆可对称地把它

延拓到下半平面上并且在 $x$ 轴上自动是解析的. 于是 $g(x)$ 必为 $x$ 的一个解析函数因而不能任意给定, 例如, 给成一个处处是两次连续可微而非解析的函数 (在解析初始值的情况下, 已经在第 1 章 1.7 中造出了解).

Hadamard 所举的下边的例子表明了这样一个具有解析初始值的初值问题, 它的解并不连续地依赖于其初始值. 考察方程 $\Delta u = 0$ 的初值问题的一个序列, 其中第 $n$ 个问题 $(n = 1, 2, \cdots)$ 的解析初始数据是

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = g_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2},$$

它当 $n \to \infty$ 时一致地趋于函数 $g(x) = 0$. 与 $g_n$ 相应的初值问题的解是

$$u(x, y) = \frac{\sinh ny \cdot \sin nx}{n^2}.$$

当 $n \to \infty$ 时, 这个解并不趋于和初始值 $g(x) = 0$ 相应的解 $u = 0$. 换句话说, 虽然数据仅仅作微小的变化, 解的变化并不限于一个小的幅度之内. 因此位势方程的初值问题肯定是不适定的. 前边在 3.5.3 里曾经给出过关于此类论断的一个较一般的定理.

另一方面, 最简单的双曲型方程 —— 波动方程 $u_{xx} - u_{tt} = 0$—— 的初值问题满足上边所有的三个要求. 与初始条件

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

相应的在 $t > 0$ 上的解是

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + t) + \phi(x - t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这个双曲型方程的问题的解存在, 它是唯一确定的, 并且显然连续地依赖于初始数据 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$. 至于解的依赖区域, 结论是 $u(x, t)$ 仅仅依赖于 $\phi(\xi)$ 和 $\psi(\xi)$ 在 $x - t \leqslant \xi \leqslant x + t$ 上的值.

然而, 对于这个双曲型方程, 边值问题是没有意义的. 例如, 把波动方程换为函数 $u(x, y)$ 的等价的方程 $u_{xy} = 0$, 而求解的区域是边界平行于坐标轴的矩形, 那么就不能在四个边上都任给 $u$ 值. 因为导数 $u_y$ 在矩形的边界 $x$=常数上的具有相同的纵坐标的点上必须相等, 对于 $u_x$ 也有相仿的事实, 所以只能在矩形的两个相邻的边上任意给定 $u$ 的值, 因而边值问题是无解的.

类似于对双曲型方程的审议也适用于抛物型的情况, 例如, 传热方程.

这里所述的关于微分方程问题的适定性的一般命题将在本书以后的篇章中予以论证和引申.

### 3.6.3 关于“不适定的”问题的注记

3.6.2 中关于解的存在性、唯一性、稳定性那些要求支配着古典的数学物理学. 在古典数学物理学中有这样一种理想 —— 各种物理事件总是能被边界上、无穷远处、$t=0$ 时或者过去的一些适当的条件所唯一地、完全地、并且稳定地确定. 3.6.2 中的那些要求的根源正是这种理想. Laplace 曾经幻想能够由当前状态的全部数据推算出整个宇宙的未来, 就是这种观点的突出代表. 然而, 这种数学因果决定论的唯理幻想在物理现实的面前已经逐渐破灭了. 因为非线性现象、量子理论、以及强有力的数值计算法的出现证明了绝非只有“适定的”问题才反映现实世界. 可惜的是, 无论在解决这些“不适定的”然而是重要的、由实际提出的问题上, 或者在这些问题的辨识和模型化方面的重要工作上, 迄今都没有取得什么数学的进展. 本书将主要地限于阐述适定问题的古典数学领域, 但也不完全如此.

虽然如此, 还是可以举出这种有意义的然而“不适定”的问题的个把例子来. 由上一小节知道 Laplace 方程的初值问题是“不适定”的. 但是它有物理意义. 例如, G. I. Taylor 曾经证明, 一个重要的稳定性课题导致这样一个不适定的问题：考虑由两种不可压缩的流体组成的系统, 它们的分界面在向着较轻的流体运动. 这个现象可以用一个速度位势去描述. 这个位势转为 Laplace 方程的一个不适定的初值问题的解.

另一类有意义的“不适定”问题是超定的问题. 例如, 可以寻求一个在单位圆内为解析的并且在半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的同心圆上取给定值的调和函数.

在数值分析中极为重要的不适定问题至今尚未为研究活动的主流所及. 例如, 对于由观察仅近似地知其初始数据的初值问题, 常用近似方法求解, 如差分法, 于是发生这样的问题：如何用后来的观察去改进并拓展已经算出的解?

有关此类问题的进展可能是有很大价值的, 例如, 在天气预报的数学工作中①.

### 3.6.4 关于线性问题的一般注记

前边曾经指出过线性微分方程的问题和未知数个数与方程个数相等的有限多个线性代数方程组问题的相似性 (卷 I 第 5 章 5.1). 例如, 可以用差分方程代替微分方程. 以后在卷 III 中将要详细阐述这个概念 (需要取极限)②. 在此仅回忆关于 $N$ 个未知数的 $N$ 个线性方程的如下的两岐命题：或者相应的齐次问题有非零解, 或者一般的非齐次问题对于任意给定的数据有唯一的解. 一般非齐次问题的解的不确定性或多值性必然与相应的齐次问题有非零解并存. 此外, 上述两岐命题还可以用下边的形式表述：对于 $N$ 个自变量的 $N$ 个线性方程来说, 一般非齐次问题

① 关于非适定的问题, 参考 F. John[2] 和 C. Pucci[2]. 又参考第 6 章 6.17.

② 例如, 参考 R. Courant, K. O. Friedrichs and H. Lewy[1].

的解的存在性和唯一性是等价的.

可以期望数学物理学中适定的线性问题具有和 $N$ 个未知数的 $N$ 个线性代数方程有相仿的性质. 于是得出下边的启发性的原则: 对于一个提法适当的线性微分方程问题来说, 如果相应的齐次问题仅有零解, 那么一般的非齐次问题必有唯一的解. 但是, 如果齐次问题有非零解, 那么非齐次问题的可解性还有待满足一些初充条件①.

在卷 I 里看到这个两岐命题是有充分根据的, 在以后的篇章里将会获得更深刻的认识.

① 俄译本注: 有一大类问题 (所谓指标为零的问题) 不具有这种性质. 可参考 N, B. Bekya[1],[2], 以及 Волъперт А. И. об индексе и нормалъной разрещимости Граничных задач дляэллиптических Систем дифференциалъных уравнений на плоскости, Тр. Моск. матемобщества, 10(1961), стр. 41∼87.

# 第 3 章附录 I

## 3′.1 Sobolev 引理

在前边的一些场合里曾经引用过一个重要的事实, 即由包含一个函数的导数的正定二次型积分的有界性可断言函数自身的有界性. Sobolev引理就是这种类型的一个一般的命题. 这个引理给出利用函数的导数的“$L_2$ 界”(它的各个导函数的平方的积分的界) 对一个函数的估值:

1)若 $u(x)$ 是定义在一个 $n$ 维开区域 $G$ 上的函数, 则对于 $G$ 中的任何 $y$ 有下列不等式:

$$|u(y)|^2 \leqslant C \sum_{j<\nu} R^{2j-n} \int_G |D^j u(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad \left(\nu > \frac{n}{2}\right), \tag{1}$$

其中 $R$ 是由 $y$ 至 $G$ 的边界的距离; $C$ 是只依赖于 $\nu$ 和 $n$ 的一个常数. 这里 $D^j u$ 表示任何 $j$ 阶的导数, 求和遍及所示的各阶导数.

下边 (1a) 中给出了当点 $y$ 属于 $G$ 的闭包时在关于 $G$ 的边界的某些光滑性条件下的一个类似的结果.

1) 的证明. 设 $h(t)$ 为属于 $C^\infty$ 类①的一个 $t \geqslant 0$ 上的一元函数, 当 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时它恒等于 1, 当 $t \geqslant 1$ 时它恒等于零. 假定 $y$ 是原点并令 $|x| = r$, 定义②

$$\zeta(r) = h\left(\frac{r}{R}\right).$$

注意

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k \zeta\right| \leqslant R^{-k} C_k \quad (k \geqslant 0), \tag{2}$$

其中 $C_k$ 是仅依赖于函数 $h(t)$ 的常数. 由于 $h(0) = 1$ 且 $h(1) = 0$, 有

$$u(0) = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u) \mathrm{d}r.$$

再用 $\omega$ 记中心在 $y = 0$ 的 $n-1$ 维的单位球面面积, $\mathrm{d}\omega$ 记它的面元, 对 $\omega$ 积分上式则得

$$\omega u(0) = -\iint \frac{\partial}{\partial r}(\zeta u) \mathrm{d}r \mathrm{d}\omega.$$

---

① $C^N$ 表示具有直到 $N$ 阶导数的函数类, $C^\infty$ 表示具有一切阶导数的函数类.

② 当 $1/2 \leqslant t \leqslant 1$ 时可以取 $h(t) = \mathrm{e}^4 \mathrm{e}^{-(t-1)^{-2}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^{-2}}\right)$.

对 $r$ 分部积分 $\nu-1$ 次则导出

$$\omega u(0)=\frac{(-1)^{\nu}}{(\nu-1)!}\iint r^{\nu-1}\frac{\partial^{\nu}}{\partial r^{\nu}}(\zeta u)\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega.$$

注意 $r^{\nu-1}=r^{\nu-n}r^{n-1}$, 则由 Schwarz 不等式得

$$|u(0)|\leqslant 常数\cdot\sqrt{\iint\left|\frac{\partial^{\nu}}{\partial r^{\nu}}(\zeta u)\right|^2\mathrm{d}V}\sqrt{\iint r^{2(\nu-n)}\mathrm{d}V},$$

其中 $\mathrm{d}V=r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega$ 是体积元素; 常数仅依赖于 $\nu$. 因为 $2\nu>n$, 所以最后的积分是收敛的, 从而得

$$|u(0)|^2\leqslant 常数\cdot R^{2\nu-n}\iint\left|\frac{\partial^{\nu}}{\partial r^{\nu}}(\zeta u)\right|^2\mathrm{d}V.$$

不等式

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial r^j}\right|^2\leqslant C_j'\sum|D^j u|^2$$

(其中 $C_j'$ 仅依赖于 $j$ 和 $n$) 和 (2) 一起给出 (1).

定义: 如果 $\bar{G}$($G$ 的闭包) 的每一个点 $y$ 都是一个有限锥体 $C_y$(用中心在它的顶点, 而半径为 $R$ 的球面所截下的一段) 的顶点, 这个锥体 $C_y$ 位于 $\tilde{G}$ 内而且体积大于某个常数 $V$, 则称 $G$ 为满足"锥条件"的.

2) 若 $G$ 满足"锥条件", 则

$$|u(y)|^2\leqslant 常数\cdot\sum_{j\leqslant\nu}\int_G|D^j u(x)|^2\mathrm{d}x\quad\left(\nu>\frac{n}{2}\right),\tag{1a}$$

其中的常数仅依赖于 $\nu,n$ 和 $R$ 与 $V$ 的值.

这个较精致的引理 (1a) 的证明和 (1) 的证明基本上是一样的, 只不过对 $\mathrm{d}\omega$ 的积分仅仅展布在以 $y$ 为顶点的锥 $C_y$ 的立体角内部罢了.

类如 (1) 的积分不等式在用变分法造解时起着很大的作用①.

## 3′.2 伴随算子

### 3′.2.1 矩阵算子

在线性算子理论中一个非常重要的概念就是一个算子 $L$ 的伴随算子 $L^*$ 的概念.

① 参考卷 III 和 L. Nireuberg[2], 第二讲.

对于有限维空间来说, 这个概念只不过是线性代数形式上的概念. 考虑线性算子

$$w^i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j \quad (i = 1, \cdots, k) \tag{1}$$

或

$$w = L[u],$$

用矩阵记为

$$w = Au,$$

它把具有 $l$ 个支量 $u^1, \cdots, u^l$ 的一个 $l$ 维矢量 $u$ 变换为具有 $k$ 个支量 $w^1, \cdots, w^k$ 的一个 $k$ 维矢量①$w$; 若 $l \neq k$, 则矩阵 $A$ 不是方阵.

联系着算子 $L$, 来考虑由 $k$ 维矢量构成的一个双一次型 (或内积)

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{k} v^i w^i = (v, Au) = (v, L[u]) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_{ij} u^j v^i. \tag{2}$$

把转置矩阵 $A^*$ 所确定的**变换**

$$z_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} v^i \quad (j = 1, \cdots, l) \tag{1a}$$

或

$$z = A^* v \quad 或 \quad z = L^*[v]$$

定义为伴随算子 $L^*$, 它把一个 $k$ 维矢量 $v$ 变换为一个 $l$ 维矢量 $z$. 伴随算子是和双一次型 (2) 相联系着的：

$$(v, w) = (v, L[u]) = (L^*[v], u). \tag{3}$$

不管是否 $k = l$, 方程

$$vL[u] - uL^*[v] = 0 \tag{4}$$

或

$$(v, Au) - (u, A^* v) = 0$$

刻画了算子 $L$ 和 $L^*$ 之间的关系.

由 (4) 立即得到 $(A^*)^* = A$; 此外, 对于两个矩阵的积 $AB$ 有

$$(AB)^* = B^* A^*,$$

① 按矩阵记号的含意所指, 可以认为矢量是行矢量或列矢量.

在 (4) 中将 $A$ 换为 $AB$, 然后由

$$(v, ABu) = (A^*v, Bu) = (B^*A^*v, u)$$

即可看出这一点. 若矩阵 $A$ 是对称的, 则称相应的算子是自伴的; 这意味着它等于它的伴随算子.

顺便回忆一下线性代数的一个基本定理：若 $k < l$, 则当给定 $z$ 的支量时关于 $v$ 的支量的 $l$ 个线性方程 $L^*[v] = z$ 构成的方程组是超定的. 这方程组当且仅当满足一定个数的 (例如 $r$ 个) 线性齐次相容条件 $Rz = 0$ 时才是可解的. 伴随矩阵 $S = R^*$ 给出变 $r$ 维变量 $h$ 为一个 $k$ 维矢量 $u$ 的变换 $u = Sh$; 它把欠定方程组 $L[u] = 0$ 的全部解用 $r$ 个独立的任意量 $h_1, \cdots, h_r$ 表示出来.

### 3′.2.2 伴随微分算子

现在考虑任意阶的微分算子 $L[u]$. 仍旧不必假定矢量 $u$ 的维数 $l$ 等于矢量 $v$ 的维数 $k$. 和 3′.2.1 中相仿, 可以作出 $L[u]$ 与任一 $k$ 维矢量的内积并在一个具有分段光滑边界 $\Gamma$ 的区域 $G$ 上进行积分. 然后用分部积分法积分 $vL[u]$ 而去掉 $u$ 的导数. 于是得到形式如下的一个关系：

$$vL[u] - uL^*[v] = \sum_{i=1}^{n} P_x^i = \mathrm{div} P \tag{5}$$

或其积分后的形式

$$\iint_G (vL[u] - uL^*[v])\mathrm{d}x = \int P\xi \mathrm{d}S, \tag{6}$$

其中 $P$ 是以 $P^i$ 为支量的一个矢量, $\mathrm{d}S$ 是 $\Gamma$ 的元素, 而 $\xi$ 是 $\Gamma$ 的外法线方向上的单位矢量. 支量 $P^i$ 是 $u, v$ 和它们的导数的双一次函数, 其系数可以是 $x$ 的函数. 等式 (5) 唯一地确定了算子 $L^*$, 可是矢量 $P$ 却可以附加一个散度恒等于零的任意矢量 $R$.

这样唯一确定的算子 $L^*$ 称为 $L$ 的伴随算子. 它把一个 $k$ 维矢量变换为一个 $l$ 维矢量.

显然 $(v, L[u])$ 的积分相当于 3′.2.1 中的双一次型式. 若函数 $v$ 和它的导数在边界上等于零, 或者 $u$ 和它的导数在边界上等于零, 那么 (6) 中的边界积分就等于零, 这时我们的定义就和 3′.2.1 中的完全相当.

下边给出几个例子. 零阶的算子 $L$：

$$L[u] = au$$

显然是自伴的, 即 $L^* = L$. 其次考虑一阶算子

$$L[u] = D_j u,$$

其中 $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$; 显然

$$L^*[u]=-D_j u,$$

一阶算子

$$L[u]=\sum A^\nu u_\nu+Bu$$

的伴随算子是

$$L^*[v]=-(vA^\nu)x_\nu+Bv,$$

而矢量 $P$ 的支量是

$$P_\nu=vA^\nu u.$$

对于二阶的标量算子

$$L[u]=\sum a^{ij}u_{ij}+\sum a^i u_i+bu,$$

伴随算子是

$$L^*[v]=\sum\left[\frac{\partial^2(va^{ij})}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial(va^i)}{\partial x^i}+vb\right],$$

而矢量 $P$ 的支量是

$$P^i(v,u)=\sum_j\left[va^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial(va^{ij})}{\partial x_j}u+va^i u\right].$$

系数 $a^{ij}$ 可以是矩阵, 即算子可以是一组单个的算子. 对于自伴的算子来说, 矩阵 $a^{ij}$ 必须是对称的并且

$$\sum_j\left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^j}+\frac{\partial a^{ji}}{\partial x^j}\right)=2a^i,\quad \sum_i\frac{\partial a^i}{\partial x^i}=0.$$

设 $L$ 为形式如下的任一 $m$ 阶的算子①:

$$L[u]=\sum_{|p|\leqslant m}a_p D^p u,$$

则

$$L^*[v]=\sum(-1)^{|p|}D^p(a_p u).$$

有时, 为了写出伴随算子和矢量 $P$, 可以利用关于两个算子的积的法则

$$(LM)^*=M^*L^*,$$

其证明甚易.

① 关于记号, 参考第 6 章 6.3.1.

# 第 3 章附录 II　Holmgren 的唯一性定理

对于任一解析的微分方程来说, 如果数据是解析的, 初始曲面也是解析的并且是非特征的, 那么可以断言 Cauchy 问题的小范围上的解析解存在而且是唯一的 (见第 1 章, 1.7). 对于非解析的数据或方程来说, 如果不添加像微分方程的双曲性质和初始流形与数据的类空性质 (space-like nature) 之类的条件的话, 就不一定有解. 然而, 值得注意的是, 即便在存在性定理对于任意的数据不复成立的情况下, 仍然可以证明解的唯一性. 关于这方面的最重要的定理已经由 Holmgren① 证明了. 它讨论的是任意多个自变量的线性的解析的 ② 单个方程或方程组：

假定 $L[u]$ 是一个具有解析系数的线性微分算子, 并且假定 Cauchy 初始数据在一个光滑的非特征曲面 $S_0$ 上恒等于零, 那么方程 $L[u]=0$ 的适合这些初始条件的任何解 $u$ 在 $S_0$ 的任何闭子集的充分小的邻域上必恒等于零.

注意这个定理只是假定了而并非断定了解 $u$ 的存在性. 当然, 它对于 $S_0$ 上的任意的不一定是解析的 Cauchy 数据断定了解 $u$ 的唯一性, 因为这样的两个解的差的 Cauchy 数据是恒等于零的, 因此根据上述定理它应当恒等于零.

证明在本质上是很简单的. 考虑由 $S_0$ 的一适当小片和一个相邻的解析曲面 $S$ 所围成的透镜形状的区域 $G$. 在 $S$ 的邻域上以零为 Cauchy 条件来解非齐次微分方程

$$L^*(v)=p(x)$$

的后向 Cauchy 问题, 其中 $L^*$ 是 $L$ 的伴随算子, $p$ 是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的任一多项式. 在 $S_0$ 的某个邻域上是一定可以根据第 1 章 1.7 造出这个函数 $v$ 的. 假定当 $S$ 取得那样地靠近 $S_0$ 使得对于一切的多项式 $p(x)$, 解 $v$ 在共同的区域 $G$ 上存在. 于是, Green 公式, 实际就是等式 $uL^*[v]-vL[u]=up(x)$ 在区域 $G$ 上的积分的结果, 由于 $v$ 的 Cauchy 数据在 $S$ 上恒等于零且 $u$ 的 Cauchy 数据在 $S_0$ 上恒等于零而给出

$$\int\cdots\int_G up(x)\mathrm{d}x=0.$$

因为多项式 $p(x)$ 构成连续函数空间 $C$ 里的完备系, 所以 $u$ 在 $G$ 上恒等于零.

---

① E. Holmgren[1].

② Cauchy 和 Kowalewsky 的论述仅只证明了解析的 Cauchy 问题不能有多于一个解析的解, 而并未涉及其他非解析的解能否存在. Holmgren 定理否定了这种可能性. 对于非解析的微分方程而言, Cauchy 问题的解的唯一性问题仍然悬而未决. 在两个自变量的情况下, T. Carleman[2] 作过一般的证明. 对于高维的情况, 可以用和本章所述相仿的方法对许多双曲型方程和类空的初始流形进行证明. 关于高维情况下的唯一性定理, 可参考 C. Müller[1], A. P. Calderón[1], 和 L. Hörmander[5].

尚待证明的只是选择 $S$ 的可能性. 按照第 1 章 1.7.4 中的注记, 做到这一步是没有困难的, 我们在这里将不给出其细节.

作为一个补充的注记, 指出①可以把在小范围上论断的 Holmgren 定理推广为大范围上的论断, 所说的大范围是那样一个透镜形状的区域 $G$, 它是被参数 $\lambda$ 取正值的一个解析曲面族 $S_\lambda$ 扫描出来的, 而且对于一切 $\lambda > 0$, 特征行列式的绝对值在 $S_\lambda$ 上关于 $\lambda$ 一致地大于某一个正数. 例如, 对于波动方程 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = 0$ 取"球盘" $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ t = 0$ 作为超曲面 $S_0$. 直观上显然而且也不难证明 $S_0$ 可以嵌入具有相同的边界且充满以 $S_0$ 为底面的特征超锥的曲面族 $S_\lambda$ 里. 这个超锥确实也恰恰是 $S_0$ 上的 Cauchy 数据能唯一地决定 $u$ 值的区域, 如图 3-6 所示.

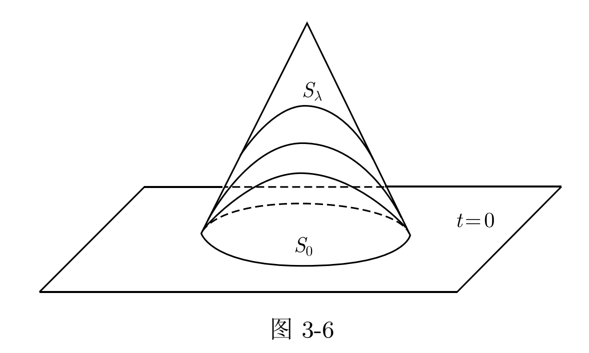



图 3-6

① 参考 F. John[3].

# 第 4 章　势论及椭圆型微分方程 ①

椭圆型微分方程的详尽理论是超出本书范围的. 主要是考虑二阶线性微分方程的部分理论, 并特别着重势论, 因为它是更一般的微分方程理论的典范, 而且它本身又是分析的一个重要分支.

在卷 I 以及本书的前几章中, 已经讨论过不少势论的问题. 在这一章的前一部分将对它作比较系统的论述. 后面较深的那部分是留给读者对更一般类型的椭圆型问题作深入的理论探讨选择方向的.

将 L. Bers 对准解析函数论的简短论述作为补充材料. 准解析函数论是对两个自变量的二阶微分方程论的一项有意义的新贡献.

## 4.1　基 本 概 念

### 4.1.1　Laplace 方程. Poisson 方程及有关方程

在 $x$ 空间的具有边界 $\Gamma$ 的域 $G$ 上, 考虑 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 或矢量 $x$ 的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = u(x)$. 微分方程

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0 \tag{1}$$

叫做 Laplace 方程或势方程. 它的解叫做势函数或调和函数. 和它相伴的非齐次方程叫做 Poisson方程. 引入 $n$ 维单位球的面积 $\omega_n$

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{2}$$

$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ 表示 $\Gamma$ 函数, 并将 Poisson 方程写作

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{3}$$

这里 $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是点 $x$ 的已知函数.

① 读者可参考下列书籍：O. D. Kellogg[1], I. Petrovskii[1], C. Miranda[1], L. Lichtenstein[1], F. John[4] 及 L. Bers[2]. 还可参考 the bibliography of symposia and colloquia[1], [2], [3]; 以及 E. Magenes and G. Stampacchia[1], L. Nirenberg[2], M. I.Visik, 还有 O. A. Ladyzhenskaya[1], 和 L. Gårding[1].

势方程的解, 在域 $G$ 上有二阶连续导数的, 叫做在 $G$ 上是正则的(以后将看到 $u$ 是解析的). 这里和以后 $G$ 都表示空间的开连通域, 并且只要没有相反的声明它总表示空间的有界域. 用 $G+\Gamma$ 表示 $G$ 连同边界 $\Gamma$ 在内的闭域. 类似地, 当 $\mu$ 在 $G$ 上连续时, Poisson 方程 (3) 的具有二阶连续导数的解叫做是正则的. 本书主要是考虑 $n=2$ 及 $n=3$ 的情形, 并将坐标 $x_1, x_2$ 及 $x_1, x_2, x_3$ 分别用 $x, y$ 及 $x, y, z$ 来表示.

对于 $n=2$, 势方程的"一般解"是复变量 $x+\mathrm{i}y$ 的任何解析函数的实部. 对于 $n=3$, 也容易得到它的依赖于任意函数的解. 例如, 设 $f(w,t)$ 对于固定的实数 $t$ 是复变量 $w$ 的解析函数, 则对于 $t$ 的任意值, 实变量 $x, y, z$ 的函数

$$u=f(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t, t)$$

的实部与虚部都是方程 $\Delta u=0$ 的解. 从这些解的叠加

$$u=\int_a^b f(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t, t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

还可得出更多的解.

例如, 若令

$$f(w,t)=w^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}ht},$$

其中 $n$ 和 $h$ 是整数, 并从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 积分, 则得到 $x, y, z$ 的齐次多项式

$$u=\int_{-\pi}^{\pi}(z+\mathrm{i}x\cos t+\mathrm{i}y\sin t)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}ht}\mathrm{d}t.$$

引入极坐标 $z=r\cos\theta, x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi$, 则得

$$u=2r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}h\phi}\int_0^{\pi}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos t)^n\cos ht\mathrm{d}t,$$

除差一个常数因子外, 这函数就是

$$u=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}h\phi}P_{n,h}(\cos\theta),$$

其中 $P_{n,h(x)}$ 是伴随 Legendre 函数 (参考卷 I).

做极坐标变换, 对 $n=2$, 换成 $r, \phi$, 对 $n=3$, 换成 $r, \theta, \phi$, 也就是, 在平面上作变换

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\phi,\\y&=r\sin\phi\end{aligned}\right\}$$

或在空间作变换

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\phi,\\y&=r\sin\theta\sin\phi,\\z&=r\cos\theta,\end{aligned}\right\}$$

Laplace 算子就变成

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{u_\phi}{r}\right)\right] \quad (n=2),\\ \Delta u &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_l \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{u_\phi}{\sin\theta}\right)\right] \quad (n=3),\end{aligned} \tag{5}$$

(参考卷 I). 由这几个公式推出下列常用的定理:

若 $u(x,y)$ 是平面域 $G$ 上的正则调和函数, 则函数

$$v(x,y) = u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) \quad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{6}$$

也满足势方程并且在 $G'$ 上是正则的, $G'$ 是由 $G$ 关于单位圆作反演而得到的. 在空间有相应的定理成立, 不过这时需令

$$v = \frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2). \tag{7}$$

为了证明这个定理, 引用极坐标: 若 $u(r,\phi)$ 及 $u(r,\theta,\phi)$ 是调和函数, 则函数 $v(r,\phi) = u\left(\frac{1}{r},\phi\right)$ 及 $v(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}u\left(\frac{1}{r},\theta,\phi\right)$ 也是调和函数. 这可由公式 (5) 立即得出, 只要用下列表示法, 即对于 $n=2$ 用

$$r^4\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_\rho),$$

对于 $n=3$, 用

$$r^5\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r\sin\theta) = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_\rho \sin\theta),$$

这里 $\rho = \frac{1}{r}$.

读者可验证在 $n$ 维空间中对于函数

$$v = \frac{1}{r^{n-2}}u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right) \tag{8}$$

的相似的定理.

因此, 除了因子 $r^{2-n}$ 外, 函数的调和性在 $r$ 关于球面的反演下是不变的. 此外, 调和性质在相似变换、平移以及通过平面的简单反射下都是不变的.

设函数 $u$ 在有界域 $G$ 上是正则的又是调和的. 若将 $G$ 关于单位球做反演, 这球的中心是原点且也在 $G$ 内, 则 $G$ 的内部变成反演后的界面 $\Gamma'$ 的外部 $G'$. 调和函数

$$v = \frac{1}{r^{n-2}}u\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \cdots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

称为在这个外部域 $G'$ 上是正则的. 也就是, 依如下方式规定 在一个扩展到无穷远的区域 $G$ 上的正则性: 将 $G$ 关于中心在 $G$ 外的一个球作反演而使 $G$ 变成一个有界域 $G'$. 如果上面的函数 $v$ 在 $G'$ 上是正则的, 那么, 调和函数 $u$ 就叫做在 $G$ 上是正则的. 特别情形, 如果 $G$ 包含无穷远点的邻域, 并且在无穷远点给函数 $u$ 指定一个值使得 $v$ 在 $G'$ 上是正则的, 那么 $u$ 就叫做在无穷远处是正则的. 例如, 根据这个定义, 函数 $u=$ 常数 在平面上的无穷远处是正则的, 但在三维或更多维的空间中不是正则的, 在空间, 对于任何 $a$, 函数

$$u = 1 - a + \frac{a}{r}$$

在单位球外是调和的, 且在球上有边界值 $u=1$. 但是, 这函数族中只有 $u=\dfrac{1}{r}$ 是在单位球外的域上为正则的.

对于任何维数 $n$, 势方程 (1) 的只依赖于点 $x$ 到定点 $\xi$(例如原点) 的距离 $r$ 的解只有函数

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n} \quad (n>2), \\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (n=2), \end{aligned} \tag{9}$$

(它们可乘以任意常数和加上任意常数), 这些函数显示了 $r=0$ 时所谓的 特征奇异性.

势方程在 $G$ 上的每个形如

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) &= \psi(x, \xi) \\ &= \gamma(r) + w\left(r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2\right) \end{aligned}$$

的解, 当 $\xi$ 在 $G$ 内且 $w$ 为正则时, 叫做在参变点 $\xi$ 具有奇异性的 基本解(见第 3 章 3.2).

对于更一般的微分方程

$$\Delta u + cu = 0$$

($c$ 为常数) 的相应的基本解也容易得到. 引入极坐标之后, 求形如 $u=\psi(r)$ 的解, 其中 $r^2 = \sum\limits_{\nu=1} (x_\nu - \xi_\nu)^2$. 对于 $\psi$, 得到常微分方程

$$\psi'' + \frac{n-1}{r}\psi' + c\psi = 0. \tag{10}$$

若令 $\psi(r) = r^{-\frac{1}{2}(n-2)}\phi(\sqrt{c}r)$, 则此方程变为 Bessel 方程

$$\phi'' + \frac{1}{\rho}\phi' + \phi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\phi}{\rho^2} = 0 \quad (\rho = \sqrt{c}r). \tag{11}$$

于是所求的基本解 $\psi$ 就是方程 (11) 的解, 这解在原点变为无穷. 因此, 对于奇数 $n$ 有

$$\psi = r^{-\frac{1}{2}(n-2)J}{}_{-\frac{1}{2}(n-2)}(\sqrt{c}r), \tag{12}$$

而对于偶数 $n$ 有

$$\psi = r^{-\frac{1}{2}(n-2)N}{}_{\frac{1}{2}(n-2)}(\sqrt{c}r), \tag{13}$$

这里 $N_\nu$ 是 $\nu$ 阶 Neumann 函数 (见第 3 章 3.2).

### 4.1.2 质量分布的势

当 $n=3$ 时, Laplace 方程的基本解

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

在物理上相当于集中在点 $(\xi,\eta,\zeta)$ 处的单位质量对点 $P(x,y,z)$ 的引力势[①].

设 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 是在 $\xi,\eta,\zeta$ 空间中质量的分布密度, 则称展布在此空间的域 $G$ 上的积分

$$u(x,y,z) = \int\int\int_G \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{14}$$

$$(r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)$$

为域 $G$ 中密度为 $\mu$ 的空间质量分布的势. 若坐标为 $x,y,z$ 的点 $P$ 在 $G$ 外, 则在积分号下微分可立即得知 $u$ 是调和函数. 若点 $P$ 在域 $G$ 之内, 且设 $\mu$ 是分块连续可微的[②], 则像前面见过的一样 (参考卷 I 第 5 章), 势 $u$ 满足 Poisson 方程

$$\Delta u = -4\pi\mu, \tag{15}$$

一般地, 对于 $n$ 维的情形, 用基本解 $\gamma(r)$ 所作成的积分

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n) = u(x) = \int\cdots\int_G \mu(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\gamma(r)\mathrm{d}\xi_1,\mathrm{d}\xi_2,\cdots,\mathrm{d}\xi_n, \tag{14a}$$

---

① 这里和其他地方, 如势, 或位, 或位势 (potential) 不同, 这个词有着它的物理意义. 它表示一个量, 这个量的梯度形成一个力场. 势的概念常常和 Laplace 方程联系在一起, 虽然作为精确的数学术语最好不把 Laplace 方程的解叫做势函数, 而用较专门的名词, 叫做调和函数.

② 回忆一下下面的定义：一曲面叫做分块光滑的, 如果它由有限块曲面组成, 而每一块与用函数

$$x_n = z = f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

所表示的曲面相合, 这里 $f$ 在相应的域上 (包括边界在内) 是连续的且有连续的一阶导数. 如果再假定每个函数 $f$ 有连续的二阶导数, 则曲面称为是具有分块连续的曲率的. 显然, 对曲线可用相似的定义.

一函数叫做在 $G$ 上是分块连续的, 如果它在 $G$ 上, 除了在一些孤立点处有跳跃间断, 以及沿着分段光滑的曲线或分块光滑的曲面有跳跃间断外, 全部是连续的, 而且在 $G$ 的任何闭子域上这种间断只有有限个. 若一连续函数的一阶导数在 $G$ 上是分块连续的, 则此函数叫做在 $G$ 上是分块连续可微的.

满足 Poisson 方程

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x), \tag{15a}$$

只要 $\mu$ 具有连续的导数. 这里 $\xi$ 空间的积分域 $G$ 含有点 $x$, 这个积分仍然叫做 $G$ 内密度为 $\mu$ 的质量的势, 现在在对 $\mu$ 稍弱的假定下给出证明并从另一个角度来考察解 $u$.

先证明如下的定理:

设 $\mu(x,y,z)$ 在域 $G$ 上是有界的(就绝对值来说)而且是可积的, 则势函数 (14) 和它的一阶导数是处处一致连续的, 这些导数可在积分号下微分而求得. 如再假定 $\mu$ 在 $G$ 上是分块连续可微的, 那么 $u$ 的二阶导数在 $G$ 的内部也是连续的而且满足 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\mu$.

为了证明这定理的第一部分, 考虑函数

$$u_\delta(x,y,z) = \int\int\int_G \mu(\xi,\eta,\zeta) f_\delta(r) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta, \tag{16}$$

其中 $f_\delta(r)$ 是只在以点 $r=0$ 为中心、以 $\delta$ 为半径的小球内不同于基本解 $\dfrac{1}{r}$ 的任意辅助函数; 在这小球的内部, 设 $f_\delta(r)$ 与 $\dfrac{1}{r}$ 不同, 是保持有界的, 而在小球的表面上, 是以连续的且连续可微的方式与 $\dfrac{1}{r}$ 连接起来的. 例如, 可规定

$$f_\delta(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\delta}\left(3 - \dfrac{r^2}{\delta^2}\right), & r \leqslant \delta, \\ \dfrac{1}{r}, & r > \delta. \end{cases} \tag{17}$$

由不等式

$$|u_\delta - u| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2 \mathrm{d}r = \frac{18\pi}{5} M\delta^2, \tag{18}$$

其中 $M$ 表示 $|\mu|$ 的界, 立即得知, 当 $\delta \to 0$ 时, 序列 $u_\delta$ 对全体 $x$, $y$, $z$ 一致地收敛于势 $u$, 因此, $u$ 是一致连续的.

函数 $f_\delta(r) = g(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ 的可微性直接导致函数 $u_\delta$ 的可微性. 事实上,

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \int\int\int_G \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta.$$

现设 $\chi(x,y,z)$ 定义为收敛积分

$$\chi = \int\int\int_G \mu \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta, \tag{19}$$

它是由 (14) 在积分号下施行微分的结果. 于是

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x}-\chi=\int\int\int_{r<\delta}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(f_\delta-\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

因此

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x}-\chi\right|\leqslant 4\pi M\int_0^\delta\left(\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial r}\right|+\frac{1}{r^2}\right)r^2\mathrm{d}r=5\pi M\delta;\tag{20}$$

这就是说, 序列 $\dfrac{\partial u_\delta}{\partial x}$ 对 $x,y,z$ 一致地收敛于函数 $\chi(x,y,z)$. 由分析中熟知的定理可知 $\chi$ 是一致连续的, 且 $\chi=u_x$. 用类似的方法可证出导数 $u_y$ 及 $u_s$ 有相同的结论.

对函数 $\mu$ 不增加假设就不能证明 $u$ 有连续的二阶导数. 不过, 若 $\mu$ 是一阶连续可微的, 则可将积分

$$u_x=\int\int\int_G\mu\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=-\int\int\int_G\mu\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

分部积分, 并表示成

$$-\int\int_\Gamma\frac{\mu}{r}n_1\mathrm{d}S+\int\int\int_G\frac{\mu\xi}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $\mathrm{d}S$ 表示曲面 $\Gamma$ 上的面元, 而 $n_1$ 表示 $\Gamma$ 上的外法线与 $\xi$ 轴的夹角的余弦. 由上面的论证, 可微分这个表达式并得到对 $u$ 的二阶导数的连续的表达式. 例如, 在点 $P(x,y,z)$, 得到

$$u_{xx}(P)=-\int\int_\Gamma\mu\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}n_1\mathrm{d}S+\int\int\int_G\mu\xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.\tag{21}$$

第二个积分也可写作

$$\int\int\int_G(\mu-\mu(P))_\xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

经过分部积分, 它就相当于

$$\int\int_\Gamma(\mu-\mu(P))\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}n_1\mathrm{d}S-\int\int\int_G(\mu-\mu(P))\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

(分部积分法是可用的, 因为 $\mu-\mu(P)$ 在 $P$ 处是一阶无穷小). 如果把这个式子代入 $u_{xx}(P)$ 的表达式中并经过并项, 就得到

$$\begin{aligned}u_{xx}(P)&=-\mu(P)\int\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}n_1\mathrm{d}S-\int\int\int_G(\mu-\mu(P))\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=-\mu(P)\int\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}n_1\mathrm{d}S+\int\int\int_G(\mu-\mu(P))\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}\tag{21a}$$

由这个公式以及类似的两个公式, 可推出定理的后一部分; 也就是, 对于分块连续可微的 $\mu$, $u$ 的二阶导数是连续的且 $\Delta u=-4\pi\mu$.

$u_{xx}$ 的表达式 (21a) 中并不包含 $\mu$ 的导数. 这件事暗示我们去寻求更广泛的函数类 $\mu$, 它们可使这表达式中的积分收敛并使得定理的各个结论都成立. 为此目的, 引入重要的 Hölder 函数类.

Hölder 连续性: 若对于域 $G$ 上每一对点 $P$ 及 $Q$, 函数 $\mu$ 满足不等式

$$|\mu(P)-\mu(Q)| \leqslant K\overline{PQ}^{\alpha},$$

这里 $\overline{PQ}$ 是由 $P$ 到 $Q$ 的距离,$\alpha$ 和 $K$ 叫做这个不等式的常数, 则称 $\mu$ 在 $G$ 上是 Hölder 连续的, 或者说 $\mu$ 在 $G$ 上满足具有指数 $\alpha, 0<\alpha<1$, 及系数 $K$ 的 Hölder条件.

可以看出, 若 $\mu$ 在 $G$ 上是 Hölder 连续的, 则 (21a) 中最后一个积分是绝对收敛的, 因此 (21) 的右边是一个完全确定的函数 $v(P)$; 又因 $\alpha, K$ 是 Hölder 条件的常数, 而体积分的被积函数的绝对值以

$$\frac{CK}{r^{3-\alpha}} \tag{22}$$

为界 ($C$ 是常数), 所以这体积分是可积的.

现在叙述如下的定理 (它是前面所述定理的更精练的形式):

若 $\mu(x,y,z)$ 在 $G$ 上是 Hölder 连续的函数, 则势函数 (14) 有一致连续的一阶导数, 这些导数可在积分号下微分而求得. 并且, $u$ 有连续的二阶导数, 它们用 (21) 及类似的表达式给出, 且 $u$ 满足 Poisson 方程 $\Delta u=-4\pi\mu$.

例如, 要想证明 $u_{xx}(P)$ 存在, 先假定函数 $\mu$ 可用可微函数 $\mu_n$ 一致地逼近, $\mu_n$ 满足具有常数 $\alpha$ 及某个常数 $K'$ 的一致 Hölder 条件. 为此, 用 (14) 来定义函数 $u_n$, 根据前面所述, 它们具有连续的二阶导数. 只要证明 $u_{n_{xx}}$ 在 $G$ 的任何闭子域上一致地收敛于 $v=u_{xx}$ 就够了. 由 (21a) 得

$$\begin{aligned}|v(P)-u_{n_{xx}}(P)| \leqslant & |\mu_n(P)-\mu(P)|\left|\int\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}n_1\mathrm{d}S\right| \\ & +\int\int\int_G|\mu-\mu(P)-\mu_n+\mu_n(P)|\left|\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}\frac{1}{r}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

因 $P$ 限制在 $G$ 的一个闭子域内, 选取足够大的 $n$ 可使第一个表达式一致地小. 为了估计体积分, 我们将 $G$ 分为两部分 $G=G_1+G_2, G_1$ 是以 $P$ 为中心以 $R$ 为半径的球. 根据 (22) 及一致 Hölder 连续性①, 被积函数的绝对值以 $2CK'/r^{3-\alpha}$ 为界, 所以展布在 $G_1$ 上的积分不大于 $C_1K'R^{\alpha}/\alpha$, 选取 $R$ 足够小可使这个值任意地小 (这里 $C_1$ 是常数). 在 $G_2$ 上, 被积函数以 $[|\mu-\mu_n|+|\mu(P)-\mu_n(P)|]C_2/R^3$ 为界, 于是, 一旦 $R$ 固定时, 只要 $n$ 足够大就可使第二个积分很小, 因为 $\mu_n$ 是一致地收敛于 $\mu$ 的.

① 满足具有常数 $K$ 的 Hölder 条件的诸函数的这个一致的极限, 也满足同样的条件.

为了完成这个证明, 必须证明 $\mu$ 能用一致地 Hölder 连续的函数 $\mu_n$ 一致地逼近. 由于 $\mu$ 能用形如

$$\begin{aligned}\mu_n &= P_n(x,y,z)\\ &= \frac{1}{c^3}\int\int\int_{-1}^{1}\mu(\xi,\eta,\zeta)[1-(\xi-x)^2]^n[1-(\eta-y)^2]^n[1-(\zeta-z)^2]^n\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

(其中 $c=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t$) 的多项式一致地逼近 (参考卷 I 第 2 章 2.4.2). 并且, 只要 $\mu$ 满足具有指数 $\alpha$ 及系数 $K$ 的 Hölder 连续性, 就能够验证这些 $\mu_n$ 满足具有指数 $\alpha$ 及某个系数 $K'$ 的一致 Hölder 条件.

已经证明了当 $\mu$ 是 Hölder 连续时, 用 (14) 给出的 $\Delta u=-4\pi\mu$ 的解 $u$ 有连续的二阶导数. 可以进一步证明 $u$ 的二阶导数在 $G$ 的任何闭子域上是 Hölder 连续的 (具有与 $\mu$ 相同的指数). 这个注释及其重要结论将在 4.7 中作进一步的考察.

对于二维空间的

$$u(x,y)=\int\int_G u(\xi,\eta)\log\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2)$$

以及对于任意维空间的 (14a), 都可用完全类似的论述来建立 Poisson 方程 (15a).

对于 $n=3$, 也有曲面上的质量分布的势以及所谓“双层”位势, 还有沿曲线的质量分布的势. 对于 $n=2$, 有沿曲线的单层势和双层位势. 对于 $n>3$ 的这些相应的概念不需要在这里论述.

在曲面 $F$ 上具有面密度 $\rho$ 的质量的曲面分布的势用积分

$$u=\int\int_F\frac{\rho}{r}\mathrm{d}S \tag{23}$$

来定义, 这里 $\mathrm{d}S$ 是面元. 沿着弧长为 $s$ 的曲线 $C$、具有密度 $\tau$ 的质量分布的势, 当 $n=3$ 时由

$$u=\int_c\frac{\tau}{r}\mathrm{d}s \tag{24}$$

来定义, 当 $n=2$ 时由

$$u=\int_c\tau\log\frac{1}{r}\mathrm{d}s \tag{24a}$$

来定义.

双层位势是由偶极子势叠置起来而得到的 (参考卷 I 第 7 章). 单独一个偶极子的势定义为

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}=-\frac{\cos(\nu,r)}{r^2} \quad (n=3)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{r}=-\frac{\cos(\nu,r)}{r} \quad (n=2),$$

这里 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 表示依 $\xi,\eta,\zeta$ 空间 (或 $\xi,\eta$ 平面) 的某个方向微分, 而 $(\nu,r)$ 表示这个方向与由点 $P(x,y,z)$ 到点 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 的向径间的夹角 (或当 $n=2$ 时的相应角).

在曲面 $F$ 上 ($n=3$ 的情形) 或在曲线 $C$ 上 ($n=2$ 的情形) 密度 $\sigma$ 的双层势分别由下面的式子

$$u(x,y,z)=\int\int_F \sigma\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S \tag{25}$$

或

$$u(x,y)=\int_C \sigma\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{r}\mathrm{d}S \tag{25a}$$

给出, 现在 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 表示依曲面的或曲线的法线的正方向微分.

### 4.1.3 Green 公式和应用

对于势论最重要的工具是 Green 公式. 在具有体积元素 $\mathrm{d}g=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和界面 $\Gamma$(设它是分块光滑的[①]) 的三维有界域 $G$ 中, 函数 $u$ 和 $v$ 之间由两个 Green 公式

$$\int\int\int_G (u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)\mathrm{d}g+\int\int\int_G v\Delta u\mathrm{d}g=\int\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S,$$

$$\int\int\int_G (u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}g=\int\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S \tag{26}$$

联系着.

在第一个公式中, 假定 $u$ 和 $v$ 在闭域 $G+\Gamma$ 上是连续的, $u$ 和 $v$ 在 $G$ 上有连续的一阶导数, 并且 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上有连续的一阶导数, 在 $G$ 上有连续的二阶导数. 在第二个公式中, 假定 $u$ 和 $v$ 在 $G+\Gamma$ 上都有连续的一阶导数, 在 $G$ 上都有连续的二阶导数. 并且在两个公式中展布在 $G$ 上的积分都假定是存在的. 在平面上有完全类似的公式.

若 $\Delta u=0$ 且 $v=1$, 则得到 Gauss 积分定理

$$\int\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S=0. \tag{27}$$

换句话说, 若调和函数在有界域 $G$ 上是正则的且在 $G+\Gamma$ 上是连续可微的, 则它的法向导数的曲面积分的值为零.

作为 (27) 的一个结果, 下面叙述关于常数密度分布的双层位势的定理:

已给一块由曲线 $C$ 界定的曲面 $F$ 及不在 $F$ 内的一点 $P$, 则在常数密度 $\sigma=1$ 分布的情形下, 曲面 $F$ 在点 $P$ 的双层势的绝对值等于 $C$ 在 $P$ 点所张的立体角. 特殊情形, 若 $F$ 包围一域 $G$, 则当 $P$ 在 $G$ 内时, $F$ 在 $P$ 点的双层势等于 $-4\pi$, 当 $P$ 在 $G$ 外时, 等于 0.

① 参考 194 页脚注②.

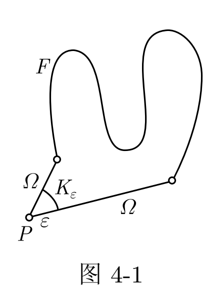


图 4-1

为了证明这个定理, 作出由点 $P$ 到 $F$ 的边界线 $C$ 上各点的连线所形成的锥面 $\Omega$①. 为简便起见, 假定曲面 $F$ 与由 $P$ 到 $C$ 之间的锥面部分围成单连域. 用一足够小的半径为 $\varepsilon$ 的球面 $K_\varepsilon$ 将锥的顶端截下, 并以 $G_\varepsilon$ 表示由 $F, \Omega, K_\varepsilon$ 所包围的域, 在此域中 $u = \dfrac{1}{r}$ 是处处正则的. 由 (27) 得到

$$\iint_F \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S + \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S + \iint_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S = 0.$$

又因 $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left(\dfrac{1}{r}\right)$ 在 $\Omega$ 上为零而在 $K_\varepsilon$ 上具有常数值 $-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, 故结论得证 (见图 4-1).

当 $n = 2$ 时, 有相似的定理: 在常数密度 $\sigma = 1$ 的分布下, 弧 $C$ 在点 $P$ (不在 $C$ 上)处的双层势等于弧 $C$ 在点 $P$ 所张的角. 特殊情形, 当 $C$ 是闭曲线时, $P$ 在 $C$ 内, 则 $u = -2\pi$, $P$ 在 $C$ 外, 则 $u = 0$.

若在公式 (26) 中, 令 $u = v$, 则得恒等式

$$D[u] = \iiint_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\mathrm{d}g = \iint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S, \tag{28}$$

它对每个在有界域 $G$ 上是正则调和的且在 $G + \Gamma$ 上有连续导数的函数都成立. 如果域 $G$ 包含无穷远点的整个邻域, 那么只要调和函数 $u$ 是正则的, 即只要函数

$$\frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

在原点是正则的, 这个公式仍然成立. 积分 $D[u]$ 叫做 Dirichlet 积分, 它在势论中起着非常重要的作用. 像卷 I 中已经见到的, 它连系着势论和变分法. 这种联系对存在的证明将起决定的作用 (见卷 I).

这里由恒等式 (28) 已可引出如下的结论:

设 $u$ 在 $G$ 上是正则调和函数, 并且在 $G+\Gamma$ 上是连续的和连续可微的. a) 若 $u$ 在 $\Gamma$ 上为 0, 则它在 $G$ 上恒为0; b) 若法向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ 在边界上为 0, 则函数 $u$ 在 $G$ 上为常数. 因在这两种情形下, 由 (28) 都得到 $D[u] = 0$, 所以 $u =$ 常数. 但在第一种情形中, 这常数必须与边界值 0 相合.

设 $G$ 是中心在 $P$、半径为 $R$、表面为 $\Gamma$ 的球. 令 $G_0$ 是半径为 $R_0 < R$、表面为 $\Gamma_0$ 的同心球. 令 $v = \dfrac{1}{r}$($r$ 是到球心的距离), 并将 (26) 中第二个公式应用于 $\Gamma$

① 当曲面 $F$ 指定了正负侧时, 这个立体角的正负号就唯一地确定了; 曲面 $F$ 与由点 $P$ 和曲线 $C$ 所确定的锥面 $\Omega$ 之间的部分围成一个闭域, 先假定它是单连域, 如果 $F$ 的正法线引向域外, 则立体角取负号, 否则取正号. 在一般情形下, 假定 $F$ 是由有限张曲面组成的, 每张都满足上面的假定, 然后可看出双层位势等于相应的立体角之和, 每个立体角采取适宜于它的正负号.

与 $\Gamma_0$ 之间的域上, 则根据 (27), 对于调和函数 $u$ 有

$$\frac{1}{4\pi R_0^2}\int\int_{\Gamma_0} u\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Gamma} u\mathrm{d}S. \tag{29}$$

令 $R_0$ 收敛于 0, 得到平均值关系式

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Gamma} u\mathrm{d}S. \tag{30}$$

换句话说: 调和函数在点 $P$ 处的值等于它在以 $P$ 为圆心的任何球面上的值的算术平均值, 只要这函数在此球面所包围的闭域上连续, 而在域的内部是正则的①.

由这个平均值定理可得到一些重要的结论.

极大值原理: 如果函数 $u$ 在连通域 $G$ 上是正则的又是调和的, 并且一直到边界 $\Gamma$ 上都是连续的, 那么它的极大值与极小值总是在边界上取得. 当且仅当 $u$ 是常数时, 极大值与极小值才能在域的内部取得.

要证明这个定理, 考虑在闭域 $G+\Gamma$ 上 $u$ 取得极大值的点所形成的 $G+\Gamma$ 的子集 $F$. 因为 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 所以 $F$ 是闭子集. 设 $F$ 含有 $G$ 的一个内点 $P_0$, 则必存在以 $P_0$ 为中心的球面族, 它们全在 $G$ 内, 且在每个这种球面上, 函数 $u$ 的平均值必等于 $u(P_0)=M$. 但因 $u \leqslant M$, 所以只能是在每个中心为 $P_0$、完全含于 $G$ 内的球面上, 且处处有 $u=M$. 因此, $F$ 至少包含中心在 $P_0$ 且完全位于 $G+\Gamma$ 内的最大球内的所有点. 对 $F$ 的任何其他内点可重复同样的论证, 因此, $F$ 必与 $G+\Gamma$ 重合. 但这就意味着 $u$ 为常数 (实际上是等于 $M$). 由此可知, 对于任何不是常数的 $u$, $F$ 只能由边界点组成. 同样可证明极小值 $m$ 也是在边界上取得, 且只有当 $u$ 为常数时才能在 $G$ 的内部取得.

下面是极大值原理的直接推论: 若 $G$ 上的正则调和函数 (在 $G+\Gamma$ 上是连续的) 在边界上是常数, 则在整个域上是常数.

特别地, 这个推论包含着:

唯一性定理: 若域 $G$ 上的两个调和函数在 $G+\Gamma$ 上都是连续的且在边界上相重合, 则它们在整个域上恒相等.

这是因为两个这种函数的差是正则调和函数, 它在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 且在边界上为零, 所以它在 $G$ 上恒为零.

如果在 Green 公式 (26) 中, 把 $v$ 换成一个在点 $P$ 处具有势方程的特征奇异性的函数, 则这二公式将发生重大的变化. 设 $P$ 为 $G$ 的内点, 具有坐标 $x, y, z$. 令

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{r} + w(\xi,\eta,\zeta),$$

① 显然这个定理不需要调和函数在球所包围的闭域上是连续可微的, 虽然在证明定理用到 (26) 和 (27) 时有这个需要.

这里 $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, 而 $w$ 是在 $G$ 上任意的二次连续可微函数, 在 $G+\Gamma$ 上是连续且连续可微的. 将 Green 公式 (26) 运用于子域 $G-K_\varepsilon$, 这子域是将 $G$ 去掉一个中心在 $P$ 半径为 $\varepsilon$ 的球 $K_\varepsilon$ 而得到的. 将 Green 公式用于这个域, 并当 $\varepsilon$ 依通常简单的方式趋于 0 时取极限, 就得到

$$\int\int\int_G(u_\xi v_\xi+u_\eta v_\eta+u_\zeta v_\zeta)\mathrm{d}g+\int\int\int_G u\Delta v\mathrm{d}g=pu+\int\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}S, \tag{31}$$

$$\int\int\int_G(u\Delta w-v\Delta u)\mathrm{d}g=pu+\int\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S, \tag{31a}$$

这里 $\mathrm{d}g$ 是在 $\xi,\eta,\zeta$ 空间积分且

$$v=\frac{1}{r}+w,\quad p=\begin{cases}4\pi, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 内},\\ 2\pi, & \text{当 } P \text{ 在 } \Gamma \text{ 上},\\ 0, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 外};\end{cases}$$

对于 $P$ 在 $\Gamma$ 上的情形, 是假定了 $\Gamma$ 在 $P$ 处有连续的切平面的①. 对于 $u$ 和 $w$, 像在 (26) 中一样, 需要 $G$ 上的积分存在, $u$ 和 $w$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 且 $u$ 和 $w$ 的一阶及二阶导数在 $G$ 上是连续的; 对于 (31) 需要 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上有连续的一阶导数, 而对 (31a) 则需 $u$ 和 $w$ 都在 $G+\Gamma$ 上有连续的一阶导数.

对于平面的情形, 在类似的条件下有类似的一组公式：

$$\int\int_G(u_\xi v_\xi+u_\eta v_\eta)\mathrm{d}g+\int\int_G u\Delta w\mathrm{d}g=pu+\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}s, \tag{32}$$

$$\int\int_G(u\Delta w-v\Delta u)\mathrm{d}g=pu+\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s, \tag{32a}$$

$\mathrm{d}g$ 是面积元素, 且 $v=\log\dfrac{1}{r}+w$,

$$p=\begin{cases}2\pi, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 内},\\ \pi, & \text{当 } P \text{ 在} \Gamma \text{ 上},\\ 0, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 外}.\end{cases}$$

特殊情形, 若在 (31a) 中令 $w=0$, 则得到 $u$ 的表达式

$$u=-\frac{1}{4\pi}\int\int\int_G\frac{\Delta u}{r}\mathrm{d}g+\frac{1}{4\pi}\int\int_\Gamma\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\int\int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S, \tag{33}$$

它在 $G$ 的内部成立. 这就是说：

① 例如, 当 $P$ 是边界的锥顶时, 在这点就不用 $2\pi$ 而需令 $p$ 等于这个锥顶的顶角.

每个在 $G+\Gamma$ 上连续可微且在 $G$ 上有连续二阶导数的函数 $u$ 可看做是质量分布的势, 这个势由如下三个势组成: 密度为 $-\dfrac{\Delta u}{4\pi}$ 在域上的空间分布的势; 密度为 $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ 在界面 $\Gamma$ 上的曲面分布的(单层)势; 以及密度为 $-\dfrac{u}{4\pi}$ 在界面 $\Gamma$ 上的 (偶极分布) 的双层势.

特别是, 当 $u$ 为调和函数时, 满足关系式:

$$u=\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Gamma}u\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S. \tag{34}$$

换句话说: 每个在 $G$ 上正则调和的且在 $G+\Gamma$ 上连续可微的函数 $u$ 可表示为在界面上分布的势, 这个势是由密度为 $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ 的单层势及密度为 $-\dfrac{u}{4\pi}$ 的双层 (偶极分布) 势所组成.

势论的中值定理也可由公式 (31a) 导出. 因为, 如果将 (31a) 用于半径为 $R$ 的球且令 $w=-\dfrac{1}{R}=$ 常数, 则 $v$ 在球表面上为 0, 从而立即得出关系式 (30).

把这些结果变到 $n=2$ 的情形以及变到一般的任意维数 $n$ 的情形的问题留给读者. 对于任意的 $n$, 且对 $u$, $v$ 及域 $G$ 有同前面一样的假设时, 则有 Green 公式

$$\begin{aligned}&\int\int_G\cdots\int\left(\sum_{i=1}^{n}u_{xi},v_{xi}+v\Delta u\right)\mathrm{d}g=\int_\Gamma\cdots\int v\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}S,\\&\int\int_G\cdots\int(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}g=\int_\Gamma\cdots\int\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{35}$$

也有类似于 (31) 和 (31a) 的如下公式:

$$\begin{aligned}&\int\int_G\cdots\int\left(\sum_{i=1}^{n}u_{\xi i},v_{\xi i}+u\Delta w\right)\mathrm{d}g=pu+\int_\Gamma\cdots\int u\frac{\partial v}{\partial \nu}\mathrm{d}S,\\&\int\int_G\cdots\int(u\Delta w-v\Delta u)\mathrm{d}g=pu+\int_\Gamma\cdots\int\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{36}$$

在这里, 当 $n>2$ 时, 令

$$v=\frac{1}{(n-2)r^{n-2}}+w,\quad p=\begin{cases}w_n, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 内},\\ \dfrac{1}{2}w_n, & \text{当 } P \text{ 在 } \Gamma \text{ 上},\\ 0, & \text{当 } P \text{ 在 } G \text{ 外}.\end{cases}$$

### 4.1.4 质量分布的势的导数

在 4.1.2 中已讲过, 空间分布的势 (14) 当分布密度有界且可积时, 是连续的且有连续的一阶导数. 现在研究单层和双层的面势以及它们的导数当点 $P(x,y,z)$ 通过曲面 $F$ 时的连续性. 使用如下的方法[①]：如图 4-2 所示, 考虑曲面 $F$ 某段上的一点 $P_0, F$ 看做是空间域 $G$ 的边界 $\Gamma$ 的一部分. 设以 $\rho$(或 $\sigma$) 表示分布在 $F$ 上的密度. 假定将函数 $\rho$(或 $\sigma$) 依适当连续的方式延拓到域 $G$. 取合适的函数 $u$ 和 $v$, 将 Green 公式 (31) 和 (31a) 用于域 $G$. 因为重要的只是研究问题中的函数的不连续性, 所以从公式中略去当 $P$ 通过曲面 $F$ 时保持连续的那些式子. 对这种式子使用符号标记 $\equiv 0$(等同于 0). 不过选择的域 $G$ 要使 $F$ 的正法线朝外.

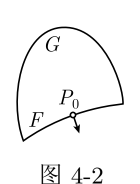


图 4-2

首先注意单层势当 $P$ 通过曲面 $F$ 时是连续的, 因此只需研究双层位势及其导数以及单层位势的导数的状态.

设在点 $P_0$ 的邻域, 曲面 $F$ 有连续的曲率 (参考 4.1.2 节脚注②), 并设在这曲面上分布密度是二次连续可微的[②]. 那么：

1) 越过曲面 $F$, 双层位势的值在点 $P_0$ 处有由

$$\lim_{P\to P_0^+} u(P) - u(P_0) = 2\pi\sigma(P_0),$$
$$\lim_{P\to P_0^-} u(P) - u(P_0) = -2\pi\sigma(P_0) \tag{37}$$

给出的跳跃间断, 这里符号 $P \to P_0^+$ 表示从曲面的正侧趋向, 而 $P \to P_0^-$ 表示从负侧趋向.

2) 双层位势 $u(P)$ 在曲面的法线方向上的导数当 $P$ 沿着 $P_0$ 处的法线穿过曲面时是连续变化的. 但切向导数(垂直于法线的导数) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 是依跳跃关系

$$\lim_{P\to P_0^+} \frac{\partial u(P)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = 2\pi\frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t},$$
$$\lim_{P\to P_0^-} \frac{\partial u(P)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = -2\pi\frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t} \tag{38}$$

而间断变化的.

3) 单层位势和它的切向导数当 $P$ 通过 $P_0$ 时连续地变化着. 但法向导数具有

① 这方法与 Erhard Schmidt 法有联系. 参考 E. Schmidt[1].
② 这些假设是可以减弱的, 即使采取这里运用的方法.

跃度

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]=\frac{\partial u}{\partial \nu_+}+\frac{\partial u}{\partial \nu_-}=-4\pi\rho(P_0). \tag{39}$$

这里 $\dfrac{\partial}{\partial \nu_+}$ 表示依 $P_0$ 处曲面法线的正向微分,$\dfrac{\partial}{\partial \nu_-}$ 表示依法线的负向微分.

先考虑密度为 $\sigma$ 的双层势, 并假定密度依连续可微的方式被延拓到 $G+\varGamma$ 内而成为函数 $\sigma(x,y,z)$; 然后, 令 $u=\sigma$ 并略去所有越过边界时保持连续的那些项, 将 Green 分式 (31) 写成

$$p\sigma+\int\int_F \sigma\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S\equiv\int\int\int_G\left(\sigma_\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}+\sigma_\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{r}+\sigma_\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}g,$$

使用上面定义过的符号 $\equiv$. 显然, 所有不依赖于 $F$ 的边界积分关于点 $P$ 都是连续的且有各阶连续的导数. 根据 4.1.2, 这个式子的右边是连续的, 所以又有

$$p\sigma+\int\int_F \sigma\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S\equiv 0,$$

它说明了关于双层位势的性态.

要想证明关于双层位势的导数的结论, 假定边界分布 $\sigma$, 依照使法向导数 $\dfrac{\partial \sigma}{\partial \nu}$ 为 0 的方式而延拓到 $G$ 内, 成为一个二次连续可微的函数. 然后应用第二个 Green 公式 (31a), 这公式现在可写为

$$p\sigma+\int\int_F \sigma\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\mathrm{d}S=-\int\int\int_G\frac{\Delta\sigma}{r}\mathrm{d}g.$$

因为右边是连续的, 可以再一次得到关于双层势本身的间断性的结论. 又因右边有对 $x,y,z$ 的连续导数, 故知双层位势的导数与 $-p\sigma$ 的导数有同样的间断性, 这就是所要证明的.

关于单层位势的导数的结论可依同样方式运用 Green 公式 (31a) 得到. 不过, 在 (31a) 中必须这样选择函数 $w$, 使得沿曲面 $F$ 这函数恒为 0 且法向导数 $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ 等于曲面分布的密度 $\rho$.

由对 $F$ 及边界分布的连续性的假定, 可知这种函数 $w$ 是存在的.

对于平面中的势可证明类似的定理和间断性关系式, 所不同的只是在关系式 (37) 和 (38) 中, 因子 $2\pi$ 要换成 $\pi$, 而在 (39) 中, 因子 $4\pi$ 要换成 $2\pi$.

## 4.2　Poisson 积分及其应用

### 4.2.1　边值问题及 Green 函数

在卷 I 第 5 章 5.14 中, 已经讨论过边值问题的解用 Green 函数的表示法. 这种函数与特殊的边界值无关, 也与微分方程特殊的右端无关.

现在对 $x$ 空间的具有分块光滑[①]边界 $\Gamma$ 的有界域 $G$ 提出势论的第一边值问题, 也叫做 Dirichlet 问题：

设在 $\Gamma$ 上预先给定了连续的边界值. 特别是可设边界值是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或 $f(x)$ 的值, 这函数在 $G+\Gamma$ 上有连续的三阶导数. 求微分方程 $\Delta u = 0$ 的解, 这解要在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 在 $G$ 上是正则的, 且在 $\Gamma$ 上与 $f$ 重合. 在 4.4 中将看到, 用一个简单的极限过程就可去掉对边界值的可微性的假设.

若引入函数 $u-f=v$ 代替 $u$, 则上述边值问题变为另一种形式. 对于函数 $v$, 在 $\Gamma$ 上有齐性的边值 0, 但微分方程却变成非齐次的

$$\Delta v = -\Delta f.$$

现在设 $Q=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 或 $\xi$ 是 $G$ 的一个固定的内点, $P=x$ 是 $G$ 的变点, 而 $\gamma$ 是由 4.1 的公式 (9) 给出的函数. 定义对域 $G$ 的微分式 $\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}$ 的 Green 函数 $K(P, Q)$ 为 $\Delta u = 0$ 的一个特定的基本解，这解依赖于参变点 $Q$, 它的形式为

$$\begin{aligned}K(P, Q) &= K(x_1, x_2, \cdots, x_n; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\\ &= K(x, \xi) = \gamma(r) + w,\end{aligned}$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2 = (x-\xi)^2, \tag{1}$$

当 $P$ 在 $\Gamma$ 上时它等于 0, 而且它的分量 $w$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 在 $G$ 上是正则的 (因此除了在点 $P=Q$ 外, $K$ 在 $G$ 内是正则的). 这函数对变元 $P$ 和 $Q$ 是对称的：$K(P, Q) = K(Q, P)$(参考卷 I).

Green 函数 在 $\Gamma$ 上为 0, 且在关于点 $Q$ 的一个小球面上为正, 因此, 根据极大值原理, 它在 $G$ 的内部是正的.

若 $v$ 是在 $G+\Gamma$ 上满足方程 $\Delta u = -\Delta f$ 的连续且连续可微的函数, 则由 4.1 的公式 (36) 立即得到表达式

$$v = \int\int_G \cdots \int K(x, \xi) \Delta f \mathrm{d}\xi \tag{2}$$

和

$$u = f + \int\int_G \cdots \int K(x, \xi) \Delta f \mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

它是原来边值问题的解.

① 参考 194 页脚注②.

在公式 (2) 及 (3) 中, 解 $u$ 并不真正依赖函数 $f$ 在 $G$ 内部的值. 因为, 应用 Green 公式, 容易得到

$$\int\int_G\cdots\int K\Delta f\mathrm{d}\xi=-f-\int_\Gamma\cdots\int\frac{\partial K}{\partial\nu}f\mathrm{d}S,$$

所以有

$$u=-\int_\Gamma\cdots\int\frac{\partial K}{\partial\nu}f\mathrm{d}S. \tag{4}$$

在这公式中只出现 $f$ 的边界值.

不过, 常常让边值问题解的表达式保留 (3) 的形式. 特别地, 将用形式 (3) 来证明下面的定理, 这定理是上面结果的逆, 但对 $K$ 及 $v$ 不含有那样严格的假设：

若 $K(P,Q)$ 是有界域 $G$ 上的 Green 函数, 则对于分块连续可微的函数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x)$, 表达式

$$v=\int\int_G\cdots\int K(x,\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是 Poisson 方程

$$\Delta v=-g$$

的解, 这解在 $G+\Gamma$ 上是连续的且在边界 $\Gamma$ 上为 0.

由积分表达式和 $g$ 的分块连续可微性立即得知 $v$ 在 $G$ 上满足微分方程 (参考本章 4.1.2). 但要证明 $v$ 在边界 $\Gamma$ 上为 0, 只有 Green 函数在那儿为 0 是不够的, 因为当点 $P$ 趋向 $\Gamma$ 时,$K(P,Q)$ 对 $Q$ 不是均匀地趋向 0 的. 要克服这个困难, 利用如下的引理, 这引理的证明将在 4.2.2 中给出：

若 $B$ 是 $G$ 中直径小于 $h$ 的子域, 则

$$\int\int_B\cdots\int K(x,\xi)\mathrm{d}\xi<\varepsilon(h),$$

这里 $\varepsilon(h)$ 只依赖于 $h$, 而不依赖于 $B$ 的特殊的选择, 且随 $h$ 一起趋于 0.

令 $P$ 在 $G$ 内趋向边界上的点 $\overline{P}$. 设 $B_h$ 是 $G$ 的这种子域, 它位于以 $\overline{P}$ 为心以 $h$ 为直径的球内, 并以 $G'$ 表示 $G$ 的其余部分. 则有

$$v=\int\int_{G'}\cdots\int Kg\mathrm{d}\xi+\int\int_{B_h}\cdots\int Kg\mathrm{d}\xi.$$

依赖于域 $G'$ 的这一项显然当 $P$ 趋向 $\overline{P}$ 时收敛于 0. 另一项 $v_h=\int\int_{B_h}\cdots\int Kg\mathrm{d}\xi$ 可由

$$|v_h|<M_\epsilon(h)$$

立即估算出来, 只要 $M$ 是 $|g|$ 的界. 因此, 当 $P$ 足够接近 $\overline{P}$ 时, $|v| < M_\epsilon(h)$. 又因 $h$ 是任意的, 故断语得证.

由此定理得知, 只要知道了 $K$, 那么边值问题的解 $u$ 就可由 (2) 及 (3) 求出. 换句话说: 求解具有一般规定的边界值的边值问题, 等价于寻求 Green 函数, 这函数相当于以点 $Q$ 为参变点的一个特殊的边值问题.

#### 4.2.2 对于圆和球的 Green 函数. 对于球和半空间的 Poisson 积分

在卷 I 第 5 章, 5.15.2 中, 作出了关于圆形和球形基本域的 Green 函数, 它可用于 $n$ 维势函数的情形. 设 $\gamma = \psi(r)$ 是 $n$ 维空间中微分方程 $\Delta u = 0$ 的基本解:

$$\psi(r) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, \quad 当\ n > 2\ 时, \tag{5}$$

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad 当\ n = 2\ 时.$$

那么关于半径为 $R$ 的球的 Green 函数立即由表达式

$$K(x,\xi) = \psi(r) - \psi\left(\frac{\kappa}{R} r_1\right) \tag{6}$$

给出, 其中

$$\kappa^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2, \quad r^2 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2 = (x-\xi)^2, \quad r_1^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(x_\nu - \frac{R^2}{\kappa^2}\xi_\nu\right)^2.$$

$r_1$ 表示由点 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的反影

$$\left(\frac{R^2}{\kappa^2}\xi_1, \frac{R^2}{\kappa^2}\xi_2, \cdots, \frac{R^2}{\kappa^2}\xi_n,\right) \ 或\ \frac{R^2}{\kappa^2}\xi$$

到点 $x$ 的距离. 这函数显然满足一切要求; 特别是, 它在球面上为 0, 因为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在球面上时 $r = \dfrac{\kappa}{R} r_1$.

利用圆 (或球) 的 Green 函数, 可依如下方式作为关于任意有界域 $G$ 的 Green 函数的强函数. 设 $Q$ 是 $G$ 内任一点, $R$ 是这样大的一个数, 以它为半径绕 $G$ 的任何点所作的圆 (或球) 都把域 $G + \Gamma$ 包含在它里面. 若 $r$ 表示由点 $Q$ 到点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的距离, 则易知

$$\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r} \quad (n = 2),$$

$$\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} (r^{2-n} - R^{2-n}) \quad (n > 2),$$

各是以 $R$ 为半径、绕点 $Q$ 且以 $Q$ 为奇异点的圆和球 (在圆和球的中心具有参变点 $Q$) 的 Green 函数. 若 $K(P, Q)$ 是域 $G$ 的以 $Q$ 为奇异点的 Green 函数, 则差式

$K-(\psi(r)-\psi(R))$ 在 $G$ 上是正则的. 且在 $\Gamma$ 上是非正的; 于是可知, 在 $G$ 上处处有

$$0 \leqslant K \leqslant \psi(r)-\psi(R).$$

用这个式子容易引出 4.2.1 中用过的那个关于 $G$ 的直径小于 $h$ 的子域 $B_h$ 的估值.

借助于 (6), 将算出球面上的积分

$$u=-\int\int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \nu} f \mathrm{d}S$$

中的 $\dfrac{\partial K}{\partial \nu}$, 并得到关于球的边值问题

$$\Delta u=0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u=f$$

的解. 容易算出

$$\frac{\partial K}{\partial \nu}=\psi'(r) \frac{R^2-\rho^2}{rR}, \quad \rho^2=\sum_{i=1}^n x_i^2, \tag{7}$$

当我们把它代入积分公式之后, 就得到

$$u=-\frac{R^2-\rho^2}{R} \int\int_{\rho} \frac{\psi'(r)}{r} f \mathrm{d}S. \tag{8}$$

如设 $f$ 是在单位球上给出的坐标 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的函数, 并将 $\psi(r)$ 用值 (5) 代入, 则得到 Poisson 积分公式

$$u(x)=\frac{R^{n-2}(R^2-\rho^2)}{\omega_n} \int\int \frac{f \mathrm{d}\omega_n}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta)^{n/2}}. \tag{9}$$

在这个式子中, 积分是在 $n$ 维单位球面上取的, $\rho^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=x^2$, 而 $\theta$ 是矢量 $\rho$ 和引向积分变点 $\xi$ 的半径之间的夹角.

这个公式对于 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形已分别在 1.3.2 和卷 I 中导出.

由以上的阐述, 得知在边界值 $f(\Gamma)$ 由一连续函数 $f(x)$ 在 $\Gamma$ 上的值所确定, 且 $f(x)$ 在 $G$ 上有连续的一阶、二阶和分块连续的三阶导数的情形下, 关于球的边值问题的解由 (9) 给出. 例如, 对于 $f \equiv 1$, 这些条件都是满足的. 在这情形下, 由 Poisson 积分公式, 并结合 4.1 的唯一性定理, 得知当将核

$$H(P,Q)=\frac{R^2-P^2}{R\omega_n r^n}, \quad r^2=(x-\xi)^2, \quad \rho^2=x^2 \tag{10}$$

(它在球内部永远是正的) 在半径为 $R$ 的球面上对 $\xi$ 积分时, 得到数值 1.

$$\int\int H(P,Q)\mathrm{d}o=\frac{R^{n-2}(R^2-\rho^2)}{\omega_n} \int\int \frac{\mathrm{d}\omega_n}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta)^{n/2}}=1, \tag{11}$$

面积元素 $\mathrm{d}o = R^{n-1}\mathrm{d}\omega$. 不过, 对于固定的 $Q=\xi$, 核 $H(P,Q)$ 是 $P=x$ 的函数, 它在球的内部满足势方程, 当把它写成如下形式时：

$$R\omega_n H = -\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{2}{n-2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\frac{1}{r^{n-2}}$$

$\left(r^2 = \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \xi_\nu)^2 = (x-\xi)^2\right)$ 就可立即看出. 在球面上, 除点 $P=Q$ 外, $H$ 处处为零, 而当 $P$ 由球内趋向 $Q$ 时, $H$ 无限增大.

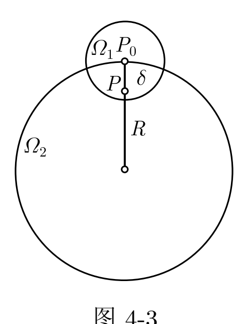



图 4-3

现在可以把加在边界值 $f$ 上的一些限制去掉, 来证明：Poisson 积分公式给出了关于球的边值问题的解, 对于边界值只要求在球面上连续. 因为, 在这种假设下, 对公式 (9) 可以在积分号下微分任意次, 只要 $P$ 是球的内点. 于是 $u$ 也满足势方程. 因此, 只需证明, 当 $P$ 趋向边界时, $u$ 趋向指定的边界值.

设 $P_1$ 是任一边界点, 而 $P$ 是球内邻近于 $P_1$ 的点 (见图 4-3). $P_0$ 是由通过 $P$ 的半径在球面上定出的点. 因为不等式

$$|u(P) - f(P_1)| \leqslant |u(P) - f(P_0)| + |f(P_0) - f(P_1)|$$

成立, 又因边值函数 $f(P)$ 是连续的, 故只要证明当 $P$ 沿半径趋向 $\Gamma$ 时, $u$ 趋向给定的边界值就行了, 也就是要证明当 $P$ 沿着过 $P_0$ 的半径而趋向 $P_0$ 时, 在点 $Q$ 具有面积元素 $\mathrm{d}S_Q$ 的积分

$$u(P) - f(P_0) = \int\!\!\int_\Gamma H(P,Q)[f(Q) - f(P_0)]\mathrm{d}S_Q \tag{12}$$

变为任意地小.

为了证明这一点, 将球面用绕 $P_0$ 的半径为 $\delta$ 的任意小球分成二部分 $\Omega_1$ 及 $\Omega_2$. 假定 $P$ 已经在此小球内, 则 $P$ 与 $P_0$ 间的距离 $h$ 小于 $\delta$. 若在球面上 $|f| \leqslant M$, 且在 $\Omega_1$ 上 $|f(Q) - f(P_0)| \leqslant \sigma(\delta)$, 这里 $\sigma$ 随同 $\delta$ 趋于 0, 则由 (12) 引出估值

$$\begin{aligned}|u(P) - f(P_0)| &\leqslant 2M\int\!\!\int_{\Omega_2} H\mathrm{d}S_Q + \sigma(\delta)\int\!\!\int_{\Omega_1} H\mathrm{d}S_Q \\ &< 2M\int\!\!\int_{\Omega_2} H\mathrm{d}S_Q + \sigma(\delta),\end{aligned}$$

其中后一个不等式是由 (11) 得到的, 在 $\Omega_2$ 上, 核 $H$ 比

$$\frac{1}{R}\frac{R^2-\rho^2}{\omega_n\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^n} < \frac{2Rh}{\omega_n\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^n}\frac{1}{R}$$

还小, 因此得到

$$|u(P)-f(P_0)| \leqslant \frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}h+\sigma(\delta).$$

若选取 $\delta$ 这样小, 使得 $\sigma(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 并这样选取 $h$, 使得

$$\frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}h<\frac{\varepsilon}{2},$$

则 $|u(P)-f(P_0)|<\varepsilon$. 证毕.

若 $G$ 是半空间而不是球, 则可得到相应的表达式和相应的结论. 若 $\Gamma$ 是 $x$, $y$ 平面, 而 $G$ 是域 $z>0$, 则关于半空间的Poisson 积分

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}, \tag{9a}$$

在下述条件下, 给出了关于 $G$ 的具有任意边界值 $f(x,y)$ 的边值问题的解: 将 $G$ 对 $G$ 外的球作反演 (参考本章 4.1.1), 其结果得到关于有界反影域 $G'$ 及其边界 $\Gamma'$ 的具有连续边界值的边值问题.

在相应的假设下, 关于 $n$ 维空间 $G: x_n>0$ 及其边界 $\Gamma: x_n=0$, 有积分公式

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=u(x)\\&=\frac{2x_n}{\omega_n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\frac{f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}}{[(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_{n-1}-\xi_{n-1})^2+x_n^2]^{n/2}}.\end{aligned} \tag{9b}$$

### 4.2.3 Poisson 公式的一些推论

平均值定理和极大值原理都是 Poisson 表达式的直接推论. 而边值问题解的唯一性是将极大值原理用于任意二解之差而得到的 (参考 4.1.3). 因此, 任意两个调和函数, 如果在边界上相同, 则在整个域上恒相等.

Poisson 公式能证明下面的重要不等式: 当 $\rho<R$ 时, 核 $H$(见 (10)) 恒为正且界于数值

$$\frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho} \text{ 与 } \frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}$$

之间.

设 $u$ 在某域 $G$ 上是非负的正则调和函数 (见图 4-4); 令 $\Omega$ 是完全含于 $G$ 内的球, $R$ 是它的半径, $P$ 是它的中心, 而 $Q$ 是它的任一内点, 则由 Poisson 积分和平均

值定理得到 Harnack不等式①

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho}u(P)\leqslant u(Q)\leqslant\left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}u(P).$$

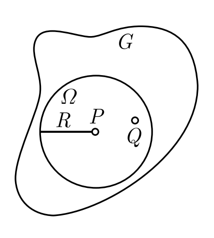



图 4-4

若 $u$ 在空间的每个有界域上是正则的, 又若 $P$ 和 $Q$ 是任意二点, 则总可以选出一个任意大的球, 以 $P$ 为中心而包含 $Q$. 考虑到 Harnack 不等式并令球的半径 $R$ 趋向无穷, 则立即得到 $u(P)=u(Q)$. 因此, 若一调和函数在空间的每个有界域上是正则的而且是正的, 则它是一个常数.

Poisson 积分公式的另一重要推论是 调和函数的解析性: 每个在域 $G$ 上调和且正则的函数 $u$, 在 $G$ 的任意内点 $P$ 的邻域可展成幂级数; 这就是说, 它是解析的.

为了证明这个结论, 将 $u$ 用关于球的 Poisson 积分公式表示, 这球有足够小的半径 $R$ 使得它完全在 $G$ 内. 取 $P$ 为坐标原点, 将 Poisson 核展开成 $x_1,x_2,\cdots,x_n$; $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的幂级数, 然后经过在 Poisson 积分内逐项积分, 就得到 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u(x)$ 的幂级数.

用

$$w=\frac{\rho^2-2\kappa\rho\cos\theta}{R^2}$$

定义函数 $w(x,\xi)$, 其中

$$\rho^2=\sum_{i=1}^n x_i^2=x^2,\quad \kappa^2=\sum_{i=1}^n\xi_i^2=\xi^2\ \text{而}\ \kappa\rho\cos\theta=\sum_{i=1}^n x_i\xi_i=x\xi;$$

不要求点 $\xi$ 在球面上即 $\kappa=R$. 再用

$$K(w)=\frac{1}{(1+w)^{n/2}}$$

定义 $K(w)$, 并注意当 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 在球面上 $\kappa=R$ 时,

$$\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)K(w(x,\xi))$$

与 Poisson 积分的核

$$\frac{1-\dfrac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\dfrac{\rho}{R}\cos\theta+\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}}$$

① Harnack 不等式已经扩展到一般的二阶线性椭圆型方程. 参考 J. Serrin[1] 和 J. Moser[2]. 也可参考 L. Bers and L. Nirenberg 的 [2] 中 4.7 和 4.8 以及附录.

是一样的. 为了导出对 $\kappa=R$ 也成立的 Poisson 核的幂级数表达式, 将 $K(w)$ 依 $x_1,x_2,\cdots,x_n;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的乘幂展开①.

要注意 $w$ 是 $x$ 和 $\xi$ 的多项式, 只要所有的乘积 $x_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非正的, 则此多项式的每一项都是非负的. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 把 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 和 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 分别限制在 (实) 球

$$\kappa<(1+\varepsilon)R \tag{13}$$

和

$$\rho<\frac{R}{3+2\varepsilon} \tag{14}$$

内. 由此得到

$$|w|\leqslant\frac{\rho^2+2\kappa\rho}{R^2}<\frac{7}{9}+\eta(\varepsilon), \tag{15}$$

这里 $\eta$ 随同 $\varepsilon$ 趋向 0; 因此, 对于足够小的 $\varepsilon$, $|w|<1$.

显然, 当 $|w|<1$ 时, $K(w)$ 可依 $w$ 展成绝对收敛的幂级数. 所以, 将 $w$ 的乘幂劈开成许多单项之后, 就得到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的幂级数. 对于足够小的 $\varepsilon$, 这幂级数对 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 来说在球 (13) 内收敛于 $K(w)$; 对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来说在球 (14) 内收敛于 $K(w)$; 在球面上 $\kappa=R$, 将这幂级数乘以 $1-\frac{\rho^2}{R^2}$ 之后就是 Poisson 积分的核②.

最后, 对于调和函数 $u$, 由 Poisson 积分公式得到一个在球 (14) 内收敛的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的幂级数.

Poisson 公式的另一个推论：

**反映原理：** 如果一个函数在某域上是调和的且一直到边界上都是连续的, 并设这函数在边界的球面部分或平面部分上为零, 那么它就能够用反映法越过边界的那个部分而 (解析地) 延拓成调和函数.

① 用 (10) 表示的 Poisson 核是对 $\kappa\leqslant R$ 有意义的, 但它不能表示为对 $\kappa\leqslant R$ 都成立的幂级数, 因为当 $\xi$ 趋向 $x$ 时核变成了奇异的.

② 有时将 Poisson 核依 $\frac{\rho}{R}$ 的乘幂展成级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\psi_\nu(\cos\theta)$$

是有益处的.

只需对平面 (或直线) 部分 $S$ 得出证明就行了, $S$ 是半球域 $H$ 的边界的平面部分 (或半圆域边界的直线部分)[①].

设 $u$ 在 $H$ 上是调和的且在 $H+\Gamma$ 上是连续的, 并在 $S$ 上取得零值. 将 $H$ 越过 $S$ 作反映, 就得到一个球 (或圆)$K$. 对 $\Gamma-S$ 上的每个点 $P$, 我们指定数值为 $u(P)$; 而对 $K$ 的边界上每个点 $P$, 它是 $\Gamma-S$ 上点 $P'$ 的反映 (镜象), 指定数值为 $-u(P')$. 则由 Poisson 积分得到一个势函数 $U$ 它在 $K$ 上是正则的且具有指定的边界值. 若对于 $K$ 上任意一点 $P$, 用 $P'$ 表示它的镜象, 则显然不仅 $U(P)$ 是而且 $-U(P')$(作为 $P$ 的函数) 也是关于 $K$ 的边值问题的解. 由于边值问题解的唯一性, 故知对于 $K$ 上一切点 $P$, 有 $U(P)=-U(P')$, 于是得知 $U$ 在 $S$ 上为零. 最后, 由于 $U(P)$ 与 $u(P)$ 在 $H$ 的整个边界上都相同, 再根据唯一性, 可知在 $H$ 上 $u\equiv U$.

对于在 $H$ 上调和的函数, 当它的法向导数在 $S$ 上为 0 时, 有相似的反映原理成立. 在这种情形下, 将 $u$ 越过 $S$ 延续成偶函数.

由 Poisson 积分我们还能导出下面的重要定理.

Weierstrass 收敛定理: 设势函数序列 $u_n$ 在域 $G$ 上是正则的、在 $G+\Gamma$ 上是连

① 在 $n=2$ 的情形,

$$\psi_\nu(\cos\theta)=2^\nu T_\nu(\cos\theta),$$

其中 $T_\nu(x)$ 是 $\nu$ 次 Tchebycheff 多项式(参考卷 I). 因此

$$\psi_\nu(\cos\theta)=2\cos\nu\theta,$$
$$\psi_0(\cos\theta)=1,$$

且

$$\frac{1-\dfrac{\rho^2}{R^2}}{1-2\dfrac{\rho}{R}\cos\theta+\dfrac{\rho^2}{R^2}}=1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu\cos\nu\theta.$$

在 $n=3$ 的情形,

$$\psi_\nu(\cos\theta)=(2\nu+1)P_\nu(\cos\theta),$$

其中 $P_\nu(x)$ 表示 $\nu$ 次的 Legendre 多项式 (参考卷 I). 这时

$$\frac{1-\dfrac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\dfrac{\rho}{R}\cos\theta+\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu P_\nu(\cos\theta).$$

对于 $\nu>0$, 利用连带 Legendre 函数 $P_{\nu,h}(x)$, 可将量 $P_\nu(\cos\theta)$ 写成

$$(2\nu+1)P_\nu(\cos\theta)=P_\nu(\cos\beta)P_\nu(\cos\beta')+2\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!}\cos h(\phi-\phi')P_{\nu,h}(\cos\beta)P_{\nu,h}(\cos\beta'),$$

其中曾令 $\cos\theta=\cos\beta\cos\beta'+\sin\beta\sin\beta'\cos(\phi-\phi')$.

如果域 $G$ 有一部分边界是平面, 就采用中心在平面上完全含于 $G$ 内的半球. 越过球面的反映和越过平面的反映同样的简单.

续的, 并且它们的边界值 $f_n$ 在 $\varGamma$ 上是一致收敛的, 则 $u_n$ 在 $G$ 上一致收敛于一个势函数, 这个势函数具有边界值 $f = \lim f_n$.

这里只限于对三维或二维, 但并不影响结论的一般性.

Weierstrass 收敛定理中所要求的一致收敛性可由极大值原理立即推出. 因为若每个势函数 $u_n$ 都在 $G$ 上是正则的, 且在 $G+\varGamma$ 上是连续的, 则对于任意的 $m$ 及 $n$, 差式 $u_n - u_m$ 也具有同样的性质. 所以, 这个差式应在边界上取得极大值 (和极小值). 因此, 对于闭域 $G+\varGamma$ 上的一切点, 有不等式

$$|u_n - u_m| \leqslant \max |f_n - f_m|,$$

由这个不等式立即得出在 $G$ 上一致收敛, 且 $u = \lim u_n$ 具有边界值 $f = \lim f_n$ 的结论. 由 Poisson 积分能看出极限函数 $u$ 在 $G$ 上满足势方程. 事实上, 若令 $K$ 为包含于 $G$ 内的半径为 $R$ 的任意球, 并以 $\bar{u}_n$ 及 $\bar{u}$ 分别表示 $u_n$ 及 $u$ 在 $K$ 上的边界值, 则在 $K$ 的内部, 对于每个 $u_n$, 因而也对于具有边界值 $\bar{u}$ 的 $u$, 有积分公式

$$u = \frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi} \iint_K \frac{\bar{u}\mathrm{d}\omega}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\theta)^{3/2}},$$

这公式说明 $u$ 是 $K$ 上的势函数.

另一个推论 (也是一个收敛定理):

Harnack定理：若 $G$ 上的正则调和函数的一个不减或不增序列在 $G$ 的一个点处收敛, 则此序列在 $G$ 的一切点处收敛, 且在 $G$ 内部的每一个闭子域上一致收敛.

只要对不减序列证明定理就够了. 对于任意的 $m$ 和 $n > m$, 考虑差式 $\phi = u_n - u_m$, 则它是非负的; 再绕收敛点 $P$ 作一半径为 $a$ 的球 $K_a$, 仍使它全含于 $G$ 内. 若 $Q$ 是这球内异于 $P$ 的任一点, 而 $\rho < a$ 是 $Q$ 到中心 $P$ 的距离, 则由 Harnack 不等式得到

$$0 < \phi(Q) < \frac{a+\rho}{a-\rho}\phi(P)\left(\frac{a}{a-\rho}\right)^{n'-2}. \tag{16}$$

这表明在半径为 $r \leqslant a-\delta$ 的每个球上, 序列 $u_n$ 是一致收敛的. 又因 $G$ 内部的每个闭子域可用有限个完全含于 $G$ 内的适当大的半径 $r < a$ 的球来覆盖, 所以重复上面的论断, 就证明了 $u_n$ 在 $G$ 内部的每个闭子域上是一致收敛的. 由 Poisson 积分或由 Weierstrass 定理可立即推出极限函数是 $G$ 上的势函数.

现在叙述一个基本的重要定理：

若正则调和函数的集合 $\{u(P)\}$ 在 $G$ 上是一致有界的, 即对于集合中的一切 $u$ 和 $G$ 上的一切点 $P$ 有

$$|u(P)| \leqslant M,$$

则在 $G$ 的每个内部的闭子域上, 导数集 $\{u_x\}$, $\{u_y\}$, 和 $\{u_z\}$ 也是一致有界的.

考虑 $G$ 内部的半径为 $a$ 的球 $K$, 球心为 $P$, 表面为 $S$. 因为 $u_x$ 是势函数, 所以平均值定理成立：

$$u_x(P) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int_S u_x \mathrm{d}S.$$

不难推出 $K$ 内部的平均值定理：

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \int\int\int_K u_x \mathrm{d}g$$

(参考 4.3).

分部积分后, 得到

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \int\int_S u \frac{\partial x}{\partial \nu} \mathrm{d}S.$$

由于 $\left|\frac{\partial x}{\partial \nu}\right| \leqslant 1$ 且 $|u| \leqslant M$, 故得估值式

$$|u_x(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{17}$$

仿此, 可得

$$|u_y(P)| \leqslant \frac{3M}{a} \tag{18}$$

和

$$|u_z(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{19}$$

兹设 $G_a$ 为 $G$ 的闭子域, 其上各点与 $\Gamma$ 的距离大于 $a$, 则对于 $G_a$ 上所有点 $P$, 上面的不等式对集合中的所有函数 $u(P)$ 都成立, 故定理得证.

上面定理的一个直接推论是选择定理 (“列紧性”定理)：从任意的在 $G$ 上正则调和的函数所组成的一致有界集合中, 可选择出一个序列 $u_n(P)$, 它在 $G$ 的每个内部的闭子域 $G'$ 上一致收敛于一个调和函数.

因为 $u$ 的各个偏导数在每个固定的内部闭子域上也都是一致有界的, 所以集 $\{u(P)\}$ 在那个闭子域上就是同等连续的, 这就肯定了选出一致收敛的序列的可能性 (参考卷 I). 再由 Weierstrass 收敛定理可知极限函数 $u$ 是 $G$ 上的势函数. 特别是, 由以上的论述可得结论：由一致有界的调和函数所形成的任何收敛序列必定在每个闭子域上一致收敛, 且因此具有调和的极限函数.

## 4.3 平均值定理及其应用

### 4.3.1 齐次的及非齐次的平均值方程

已经考虑过势论的平均值定理：

对于域 $G$ 上的每个正则势函数 $u$, 在半径为 $R$ 且全含于 $G$ 内的球面 $\Omega_R$ 上的平均值等于函数在球中心的值 $u_0$,

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega_R. \tag{1}$$

可立即推出 关于球内部的平均值定理. 因为 (1) 对于含于 $G$ 内的一切球所对应的 $R$ 都成立, 故可乘以 $R^2$ 并在 0 到 $a$ 的区间上积分, 就得到

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3}\int\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}g, \tag{2}$$

这里 $K_a$ 是半径为 $a$ 的实球. 换句话说, $u$ 在全含于 $G$ 的球内部的平均值等于在球中心的值 $u_0$.

对于非齐次的 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\mu$ 也有相应的关于球的平均值定理. 将 4.1.3 中所导出的 Green 公式 (31a) 简单地变化一下就可得到这个定理. 将这个公式用于半径为 $R$ 中心在 $P$ 的球域 $K_R$ 上, 并令

$$w = -\frac{1}{R}, \quad 即\ v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

就得到恒等式

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int\int\int_{K}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\Delta u\mathrm{d}g, \tag{3}$$

它对于每个连续的并具有连续的一阶导数和分块连续的二阶导数的函数 $u(x, y, z)$ 都成立. 因此, 对于 Poisson 方程的解有如下的平均值定理:

对于包含在 $G$ 内的任一球 $K_R$, 方程 $\Delta u = -4\pi\mu$ 的每个在 $G$ 上正则的解都满足关系式

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R + \int\int\int_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\mu\mathrm{d}g. \tag{4}$$

对于 $\mu \equiv 0$ 的特殊情形, 将上式乘以 $R^2$ 并关于 $R$ 积分, 就得到一个含有在球内部的平均值的方程. 上式经过一个简易的运算后, 得出

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\int\int\int_{K_R} u\mathrm{d}g + \frac{1}{2R^3}\int\int\int_{K_R}\frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\mu\mathrm{d}g. \tag{5}$$

在平面上有类似的定理成立:

对包含于 $G$ 内的任一圆 $K_R$, 方程 $u_{xx}+u_{yy} = -2\pi\mu$ 的每个在 $G$ 上正则的解都满足关系式

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma_R} u\mathrm{d}S + \int\int_{K_R}\mu\log\frac{R}{r}\mathrm{d}g, \tag{6}$$

$$u_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{K_R}u\mathrm{d}g+\frac{1}{R^2}\iint_{K_R}\left(R^2\log\frac{R}{r}-\frac{R^2-r^2}{2}\right)\mu\mathrm{d}g. \tag{7}$$

一般地, 在 $n$ 维空间有: 对包含于 $G$ 内的任一球 $K_R$, 方程 $\Delta u=-\omega_n\mu$ 的每个在 $G$ 上正则的解都满足关系式

$$u_0=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\Omega_R}\cdots\int u\mathrm{d}\Omega_R+\frac{1}{n-2}\iint_{K_R}\cdots\int\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)\mu\mathrm{d}g, \tag{6a}$$

$$u_0=\frac{n}{\omega_n R^n}\iint_{K_R}\cdots\int u\mathrm{d}g-\iint_{K_R}\cdots\int\Psi(r,R)\mu\mathrm{d}g, \tag{7a}$$

其中

$$\Psi(r,R)=\left[\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{R^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)+\frac{1}{2R^{n-2}}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\right],$$

注意方程 (5)、(7) 和 (7a) 也可以由 4.1 中的 Green 公式 (31a), (32a) 和 (36) 得到, 只要将 $v$ 换成函数

$$v=\gamma(r)-\gamma(R)+\frac{1}{2R^n}(r^2-R^2),$$

其中

$$\gamma(r)=\frac{1}{(n-2)^{r^{n-2}}},$$

这函数以及它的法向导数在球的表面 $\Omega_R$ 上等于零, 且在 $K_R$ 内部满足方程

$$\Delta v=\frac{n}{R^n}.$$

### 4.3.2 平均值定理的逆定理

值得注意的是, 平均值的性质是相应的微分方程的解的特征. 首先证明势论中的平均值定理的逆定理:

设函数 $u(x,y,z)$ 在域 $G$ 上是连续的, 且在含于 $G$ 的每个球 $K_R$ 上满足平均值关系式

$$u_0=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Omega_R}u\mathrm{d}\Omega_R,$$

则 $u$ 在 $G$ 上是调和的.

下面给出这定理的两种证明.

证明 1(利用 Poisson 积分公式): 设 $G'$ 是包含于 $G$ 内的球, $\Gamma'$ 是这球的边界. 设 $v$ 是由 4.2 中的 Poisson 公式 (9) 给定的势函数, 它是 $G'$ 上边值问题 $\Delta v=0$ 的解, 在 $\Gamma'$ 上 $v=u$. 因为 $v$ 是调和函数, 它满足平均值定理, 所以差式 $u-v$ 也必定具有这个性质, 并因此而满足极大 (和极小) 值原理 (参考 4.1.3). 但在 $\Gamma'$ 上

$u-v=0$, 所以在 $G'$ 上 $u\equiv v$. 显然, 在 $G$ 的每个球的内部 $u$ 是方程 $\Delta u=0$ 的解, 因此 $u$ 在 $G$ 上处处是调和的.

证明 2：不用 Poisson 积分公式也容易给平均值定理的逆定理一个直接的证明. 如果知道了 $u$ 在 $G$ 上有连续的二阶导数, 则由恒等式 (3)

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R - u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\mathrm{d}g$$

将两边除以 $R^2$ 并令 $R$ 趋向 0 就立即得出结论. 根据 $\Delta u$ 的连续性, 右边收敛于数值

$$\Delta u_0 \lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\int\int\int_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}g = \frac{1}{6}\Delta u_0,$$

而根据假设对于所有的 $R$ 左边为零, 即 $\Delta u_0=0$. 因此, 只要能证明 $u$ 在 $G$ 上是二阶连续可微的, 定理就证明完毕.

设 $G_a$ 是 $G$ 的一个子域, 它的点到 $G$ 的边界的距离大于 $a$, 则对于中心在 $G_a$ 内半径 $R\leqslant a$ 的一切球关系式 (1) 都成立. 使中心固定, 用 $R^2f(R)$ 乘 (1), $f(R)$ 是任意的连续函数, 并对 $R$ 由 0 到 $a$ 积分, 得到

$$Cu_0 = \int\int\int_K f(r)u\mathrm{d}g, \tag{8}$$

这里 $C=4\pi\int_0^a r^2 f(r)\mathrm{d}r$.

为方便起见, 将 $f(R)$ 加以扩充, 使得对于 $R>a$, $f(R)$ 等于零. 若令球 $K$ 的中心在点 $(x,y,z)$, 并令

$$L(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

则 (8) 可写成

$$Cu(x,y,z)=\int\int\int_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

因 $f$ 可如此选取, 使得 $L$ 有任意阶的导数, 所以 (9) 表示：具有平均值性质 (1) 的连续函数 $u$ 在 $G$ 的内部具有各阶的连续导数. 这就完成了定理的第二个证明.

直到现在为止都是假定对含于 $G$ 内的每个球平均值性质 (1) 都成立, $G$ 可以是任意的有限域或无限域. 不过, 如果 $G$ 是有限域, 就不需要假定平均值性质对 每个球成立. 这时, 有如下的定理：

设 $G$ 是空间的有限域, 在此域上对于任意的连续边界值, 方程 $\Delta u=0$ 的边值问题有解. 假定函数 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 并在 $G$ 的每个内点 $P$ 处, 至少有一

个以 $P$ 为中心以 $h(P)>0$ 为半径的球(此球含于 $G+\Gamma$ 内), 使得 $u$ 在其上有平均值性质

$$u_0=\frac{1}{4\pi h^2}\int\int_{\Omega_h}u\mathrm{d}\Omega_h, \tag{10}$$

则 $u$ 在 $G$ 上是一个势函数.

特别强调一下, $h$ 可以是 $x$, $y$, $z$ 的一个完全任意的函数, 例如, 它可以有任意的间断性.

把前定理的第一个证明稍微改变一下, 就可得到本定理的证明. 设 $v$ 是一个势函数, 它在 $\Gamma$ 上与 $u$ 重合. 因为是势函数, 当然在 $G$ 上对任意的 $h$ 都满足平均值方程 (10). 于是可知差式 $u-v$ 对于 $h(P)$ 满足条件 (10). 现在考虑 $G$ 中使 $u-v$ 达到极大值 $M$ 的那些点所成的闭集 $F$. 令 $P_0$ 是 $F$ 中与 $\Gamma$ 有最小距离的点. 若 $P_0$ 是 $G$ 的内点, 则必有一个以 $P_0$ 为中心、以 $h(P_0)>0$ 为半径且含于 $G$ 内的球, 对于这个球平均值方程成立, 并且在球面上有 $u-v=M$. 这样, 在 $F$ 中就有比 $P_0$ 更接近 $\Gamma$ 的点, 这与假设矛盾. 故 $P_0$ 必在 $\Gamma$ 上. 仿此, 可证明 $u-v$ 的极小值也在边界上取得. 但在 $\Gamma$ 上 $u-v=0$, 于是可知在 $G$ 上 $u\equiv v$.

在证明平均值逆定理的过程中, 假定了 $u$ 是连续的, 这个假设不是多余的. 因为一般说来, 不能从平均值的性质推出 $u$ 的连续性, 即使这个性质对每个球都成立. 事实上, 对于 $n=1$, 即对于一维的平均值方程

$$u(x)=\frac{1}{2}(u(x+h)+u(x-h)),$$

可构造出对任意 $x$ 和 $h$ 都满足此方程的非线性的不连续函数 $u$①.

当假定在每个点 $P$ 处只对一个半径 $h(P)$ 有平均值性质时, 域 $G$ 必需是有限的. 对于无限域, 即使在特殊情形 $h=\text{常数}=l$, 也可找到在 $G$ 上每点处满足方程

$$u_0=\frac{1}{4\pi l^2}\int\int_{\Omega}u\mathrm{d}\Omega_l \tag{11}$$

的连续的非调和函数. 如果假定 $u$ 只依赖于 $x$, 则 (11) 化为积分方程

$$u(x)=\frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l}u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

令 $u(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$, 就得到这方程的特解, 只要 $\gamma$ 是超越方程

$$\frac{\sin\gamma l}{\gamma l}=1 \tag{13}$$

① 参考 G. Hamel[1].

的根. 去掉解 $\gamma=0$, 此方程有无穷多个复数根 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$, 它们可用 $\alpha$, $\beta$ 平面上的曲线

$$\frac{\sin\alpha l}{\alpha l}=\frac{1}{\cosh\beta l}\quad 和 \quad \cos\alpha l=\frac{\beta l}{\sinh\beta l}$$

的交点表示出来. 于是实函数 $u=\mathrm{e}^{-\beta x}\cos\alpha x$ 和 $u=\mathrm{e}^{-\beta x}\sin\alpha x$ 也满足方程 (12), 故仅当 $\alpha=\beta=0$ 时得到势函数.

若在每个点 $P$ 处仅对单独一个半径 $h(P)$ 平均值性质成立, 则 $u$ 不仅要在有限的开域 $G$ 上连续, 而且也要在闭域 $G+\varGamma$ 上连续. 图 4-5 给出函数 $u(x)$ 的一个简单例子[①], 这函数只在开区间上连续, 且在此区间的每个点处对于相应的 $h(x)>0$ 满足一维的平均值方程

$$u(x)=\frac{1}{2}(u(x+h)+u(x-h)),\tag{14}$$

但它不是线性的.

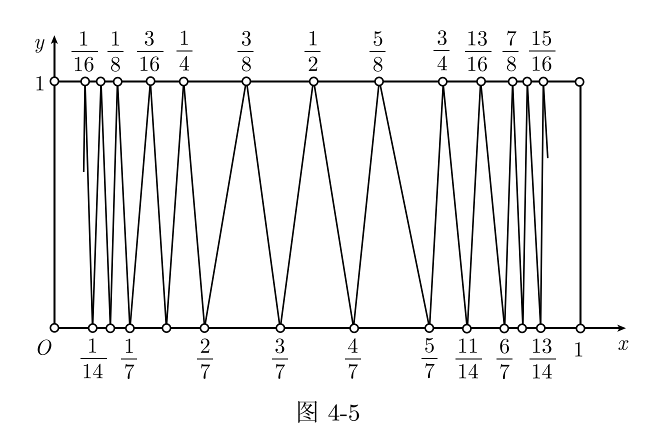



图 4-5

这函数在区间 $0<x<1$ 上是连续的而且是分段线的, 它在直线 $y=0$ 与 $y=1$ 之间来回转折. 显然, 它在端点 $x=0$ 及 $x=1$ 处是不连续的, 设位于上边直线上的各尖顶的横坐标为 $a_\nu$ 而位于下边直线上的各尖顶的横坐标为 $b_\nu$. 在区间上不与 $a_\nu$ 及 $b_\nu$ 重合的每个点的邻域内, $u(x)$ 是线性的, 因此, 对于某些确定的 $h(x)$(实际上有无穷多个 $h$) 平均值性质 (14) 是成立的. 现在如果这样选取序列 $a_\nu$, 对于每个 $a_\nu$ 存在两个点 $a_\alpha<a_\nu$ 及 $a_\beta<a_\nu$, 使得 $a_\nu=\dfrac{1}{2}(a_\alpha+a_\beta)$, 那么 $u(x)$ 在上面的尖顶处也满足关系式 (14), 并且实际上 $h(a_\nu)=a_\beta-a_\nu=a_\nu-a_\alpha$. 如果再用同样的方法选取 $b_\nu$, 但要使 $b_\nu$ 对任何 $\nu$ 及 $\mu$ 不与 $a_\mu$ 重合, 并使每个在两相邻 $a_\nu$ 间的区间内, 正好有一个 $b_u$ 出现, 那么就得到一个函数 $u(x)$, 它对 $0<x<1$ 是连续的, 具有性质 (14), 但它正如图 4-5 所示, 不是线性的.

① 这个例子是 Max Shiffman 提出的.

上述类型的两个序列 $a_\nu$ 及 $b_\nu$ 可用许多方法构造出来, 如图 4-5 所示, 可在 $y=1$ 上选取横坐标为

$$a=\begin{cases}\dfrac{1}{2^k},\ \dfrac{3}{2^{k+2}},\\[2mm] 1-\dfrac{1}{2^k},\ 1-\dfrac{3}{2^{k+2}}\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

的点, 而在 $y=0$ 选取横坐标为

$$b=\begin{cases}\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{2^{k-1}},\ \dfrac{3}{7\cdot 2^k},\\[2mm] 1-\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{2^{k-1}},\ 1-\dfrac{3}{7}\dfrac{1}{2^k}\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

的点, 它们对称于 $x=\dfrac{1}{2}$.

对于非齐次 Poisson 方程的一般的平均值定理也有逆定理:

设在 $G$ 上 $u$ 是连续的, $\mu$ 是分块连续可微的, 对含于 $G$ 内的每个球 $K$, 设此二函数满足方程 (4)

$$u_0=\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega}u\mathrm{d}\Omega+\int\int\int_K\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)u\mathrm{d}g$$

或满足与之等价的积分方程 (5), 则 $u$ 在 $G$ 上满足 Poisson 方程 $\Delta u=-4\pi\mu$.

首先注意当 $\mu$ 在 $G$ 上仅仅是连续的情形, 将 (4) 除以 $R^2$, 则当 $R\to 0$ 时, 其中的三重积分趋向数值

$$\mu_0\lim_{R\to 0}\frac{4\pi}{R^2}\int_0^R\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{6}\mu_0,\tag{15}$$

因此极限

$$\Theta(u_0)=\lim_{R\to 0}\frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R}u\mathrm{d}\Omega_R-u_0\right\},\tag{16}$$

也在 $G$ 上处处存在, 并且事实上有

$$\Theta(u_0)=-4\pi\mu_0.\tag{17}$$

若 $u$ 具有连续的二阶导数, 则像前面指出的:

$$\Theta(u)=\Delta u.\tag{18}$$

因此, 只要能证明 $u$ 有连续的二阶导数, 定理就得到证明. 实际上, 将更一般地证明:

若 $u$ 在 $G$ 上是连续的且 $\mu$ 在 $G$ 上是分块连续可微的, 又若对含于 $G$ 内的每个球 $K$, $u$ 满足平均值关系式 (4) 或 (5), 则 $u$ 在 $G$ 上有连续的二阶导数.

若 $u$ 满足 (4), 像对特殊情形 $\mu \equiv 0$ 一样来进行证明. 仍旧这样选取函数 $f(R)$, 对于 $R > a$ 它恒为 0, 而且它有足够多阶数的导数. 将方程 (4)(它对子域 $G_a$ 上的固定点 $P$ 成立) 乘以 $4\pi R^2 f(R)$, 并在 0 到 $a$ 之间积分, 得到

$$Cu_0 = \iiint_K u f(R)\mathrm{d}g + \iiint_K \mu F(R)\mathrm{d}g, \tag{19}$$

其中

$$C = 4\pi \int_0^a R^2 f(R)\mathrm{d}R,$$

而

$$\begin{aligned} -F(r) &= 4\pi \int_r^a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) R^2 f(R)\mathrm{d}R \\ &= \frac{C}{r} - \frac{4\pi}{r}\int_0^r R^2 f(R)\mathrm{d}R - 4\pi \int_r^a R f(R)\mathrm{d}R. \end{aligned}$$

若令

$$L(x,y,z) = f(\rho), \quad 其中\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

及

$$H(x,y,z) = \frac{4\pi}{\rho}\int_0^\rho R^2 f(R)\mathrm{d}R + 4\pi\int_\rho^a R f(R)\mathrm{d}R,$$

则适当选择 $f(R)$ 之后, $L$ 及 $H$ 将处处有直到 $N$ 阶的连续导数. 将球 $K$ 的中心取在 $(x,y,z)$, 则由于 $R > a$ 时, $f(r)$ 恒为零, 因而 $F(r)$ 也恒为零, 故得表达式

$$\begin{aligned} Cu(x,y,z) = &\iiint_{-\infty}^{\infty} L(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &- \iiint_G H(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\mu(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &+ C\iiint_G \frac{\mu}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta. \end{aligned} \tag{20}$$

此式右边前两个积分具有直到 $N$ 阶的导数. 第三个积分是空间分布 $\mu$ 的势, 故根据 4.1.2 的结果, 它在 $G$ 上是二阶连续可微的. 于是可知函数 $u$ 本身在 $G_a$ 是二阶连续可微的, 所以在 $G_a$ 上满足方程 $\Delta u = -4\pi\mu$. 又因 $a$ 可取得任意小, 故此结论在 $G$ 的内部处处成立.

在 $n$ 维空间有相应的定理, 并由第二个定理立即得知它的证明类似于刚才给出的证明. 这定理: 假定 $u$ 在 $G$ 上是连续的且 $\mu$ 在 $G$ 上是分块连续可微的, 并假定对含于 $G$ 内的每个球 $K$, $u$ 满足方程 (6a) 或 (7a) (当 $n=2$ 时应是 (6) 或 (7)), 那么 $u$ 在 $G$ 上是二阶连续可微的.

### 4.3.3 对于空间分布的势的 Poisson 方程

在 4.1.2 中已经对三维空间证明了在 $G$ 上的质量分布 $\mu$ 的势 $u$ 满足 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\mu$. 现在利用 4.3.2 中叙述并证明的平均值逆定理给出一个不同的证明.

首先设函数 $\mu(x,y,z)$ 在 $G$ 上是分块连续的, 并考虑质量分布 $\mu$ 的势

$$u(x,y,z) = \int\int\int_G \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}g, \tag{21}$$

其中 $\mathrm{d}g = \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$. 暂假定分布密度 $\mu$ 用 $\mu = 0$ 延拓到 $G$ 外. 并设 $P_0$ 为空间任一点而 $K$ 是以 $P_0$ 为中心、以 $R$ 为半径的任意球.

因为 $u(x,y,z)$ 是处处连续的, 所以 (21) 的两边可在球 $K$ 的内部积分, 并且实质上右边可在积分号下积分. 得到

$$\int\int\int_K u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\int\int_G \mu(\xi,\eta,\zeta)F(\xi,\eta,\zeta;P_0)\mathrm{d}g,$$

这里 $F(\xi,\eta,\zeta;P_0) = \displaystyle\int\int\int_K \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}$ 是具有单位质量的均匀分布的球 $K$ 在 $(\xi,\eta,\zeta)$ 处的势. 因此

$$F(\xi,\eta,\zeta;P_0) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3}\dfrac{R^3}{r}, & (r \geqslant R), \\ 2\pi\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right), & (r \leqslant R), \end{cases} \tag{22}$$

$r$ 现在表示 $(\xi,\eta,\zeta)$ 与 $P_0$ 的距离.

将 (22) 所给的值代入就得到

$$\int\int\int_K u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}g = \frac{4\pi}{3}R^3\int\int\int_{G^*}\frac{\mu}{r}\mathrm{d}g + 2\pi\int\int\int_K\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\mu\mathrm{d}g, \tag{23}$$

这里 $G^*$ 是 $G$ 的去掉 $K$ 的子域. 由于

$$\int\int\int_{G^*}\frac{\mu}{r}\mathrm{d}g = u_0 - \int\int\int_K\frac{\mu}{r}\mathrm{d}g,$$

得到方程

$$\frac{4\pi}{3}R^3u_0 = \int\int\int_K u\mathrm{d}g - 2\pi\int\int\int_K\left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{R^3}{r}\right)\mu\mathrm{d}g$$

或

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\int\int\int_K u\mathrm{d}g + \frac{1}{2R^3}\int\int\int_K\frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\mu\mathrm{d}g,$$

这恰好就是平均值方程 (5).

分块连续的质量分布的势, 对每个球满足平均值关系式 (5), 因而也满足等价的关系式 (4).

考虑到前面所得到的结果, 能够作出如下的叙述:

若 $\mu$ 在 $G$ 上是连续的, 则对于势 (21), 表达式

$$\Theta(u) = \lim_{R\to 0}\frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R - u_0\right\}$$

在 $G$ 上处处存在, 且事实上

$$\Theta(u) = -4\pi\mu. \tag{24}$$

若 $\mu$ 在 $G$ 上是分块连续可微的, 则 $\Theta(u) = \Delta u$, 因而 $\Delta u = -4\pi\mu$.

### 4.3.4 其他椭圆型微分方程的平均值定理

对于 Laplace 方程和 Poisson 方程的平均值定理, 可从恒等式

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int\int\int_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\mathrm{d}g \tag{25}$$

立即得出, 这恒等式对于连续的且有连续的一阶导数和分块连续的二阶导数的函数 $u$ 成立. 代替这个恒等式, 不难得到一个更一般的恒等式, 它是平均值

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R$$

的 Taylor 展开式, 这展式对于固定的中心 $P_0$ 是 $R$ 的函数.

从 Green 公式

$$Cu_0 = \int\int\int_K (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}g \tag{26}$$

出发, 其中 $K$ 是中心在 $P_0$ 半径为 $R$ 的任意球, $v$ 具有形式

$$v(r) = \frac{C}{4\pi r} + w(r), \tag{26a}$$

对于 $r \leqslant R$, $w(r)$ 是二阶连续可微的, 而且在球的表面 $\Omega_R$ 上,

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{26b}$$

对于 $u$ 可取具有连续的二阶导数的任意函数.

若假设 $u$ 在 $K + \Omega_R$ 上有直到 $(2m+2)$ 阶的连续导数, 那么对于一切 $\nu \leqslant m$, 有恒等式

$$C\Delta^\nu u_0 = \int\int\int_K (\Delta^\nu u\Delta v - v\Delta^{\nu+1}u)\mathrm{d}g. \tag{27}$$

这里用 $\Delta^\nu u$ 表示 $\nu$ 重 Laplace 算子, 即 $\Delta^1 u = \Delta u$, $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$, 等等.

再设 $v_1, v_2, \cdots$ 是由微分方程

$$\Delta v_{\nu+1} = v''_{\nu+1} + \frac{2}{r}v'_{\nu+1} = v_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots) \tag{28}$$

和边界条件 (26a) 所确定的 (26a) 型的函数序列, 且开始的函数为

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{R-r}{Rr}. \tag{29}$$

不难验证这个递推方程组的解由函数

$$v_\nu = \frac{1}{4\pi(2\nu+1)!}\frac{(R-r)^{2\nu+1}}{Rr} \quad (\nu = 1, 2, \cdots) \tag{30}$$

给出, 它们全都是 (26a) 的形式, 具有 $C_\nu = \dfrac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$.

在 (27) 中以 $v_\nu$ 代 $v$, 得

$$C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint_K (v_{\nu-1}\Delta^\nu u - v_\nu \Delta^{\nu+1} u)\mathrm{d}g; \tag{31}$$

若将对应于 $\nu = 1, 2, \cdots, m$ 的所有方程加起来, 就归结到表达式：

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint_K (v_0 \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u)\mathrm{d}g.$$

根据 (25) 和 (30), 容易得出

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R = &\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\Delta^\nu u_0 \\ &+ \frac{1}{4\pi(2m+1)!}\iiint_{K_R}\frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\Delta^{m+1}u\mathrm{d}g,\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\Delta^0 u_0$ 当做 $u_0$. 这恒等式对于每个 $(2m+2)$ 阶连续的函数 $u$ 及每个含于 $G$ 内的球 $K$ 成立①.

若 $u$ 在 $G$ 上是任意阶可微的, 并假定余项随 $m$ 的增大而趋向 0, 则由 (32) 得到无穷级数

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Omega_R} u\mathrm{d}\Omega_R = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\Delta^\nu u_0. \tag{33}$$

当 $\Delta^m u$ 在 $G$ 上从某个 $m$ 起恒等于 0 时, 展开式 (33) 在 $v = m-1$ 之后中断, 于是可得：

① 这个结论参考 P. Pizetti[1].

微分方程 $\Delta^m u = 0$ 的每个在 $G$ 上正则的解, 即具有直到 $(2m)$ 阶的连续导数的解, 对含于 $G$ 内的任意球, 满足平均值关系式

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega = \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\Delta^{\nu}u_0. \tag{34}$$

例如, 方程 $\Delta\Delta u = 0$ 的解满足平均值关系式

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega = u_0 + \frac{R^2}{6}\Delta u_0. \tag{35}$$

微分方程 $\Delta u + cu = 0$ 的解给出另一个例子. 这里

$$\Delta^{m+1}u = (-1)^{m+1}c^{m+1}u,$$

且由于余项随 $m$ 的增大而收敛于 0, 故有

$$M(R) = u_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}c^{\nu}}{(2\nu+1)!}R^{2\nu} = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}.$$

对于方程 $\Delta u + cu = 0$ 的每个在 $G$ 上正则的解, 平均值关系式

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}} \tag{36}$$

对 $G$ 内的任意球成立.

在平面上以及一般的 $n$ 维空间中有类似的论断.

因此, 在平面上有恒等式

$$M(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\Omega} u\mathrm{d}S = \sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{(\nu!)^2} + \int\int_K v_m\Delta^{m+1}u\mathrm{d}g, \tag{37}$$

其中 $v_m$ 由递推公式

$$\begin{aligned} v_{\nu+1} &= \int_r^R \rho v_{\nu}(\rho)\log\frac{\rho}{r}\mathrm{d}\rho, \\ v_0 &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r} \end{aligned} \tag{37a}$$

确定.

在 $n$ 维空间中有

$$\begin{aligned} M(R) &= \frac{1}{\Omega}\int\int_{\Omega} u\mathrm{d}\Omega \\ &= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{\nu!\Gamma\left(\nu+\dfrac{n}{2}\right)} + \int\int\int_K v_m\Delta^{m+1}u\mathrm{d}g, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $v_m(r)$ 用递推公式

$$v_{\nu+1} = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}\int_r^R \rho v_\nu(\rho)(\rho^{n-2}-r^{n-2})\mathrm{d}\rho,$$
$$v_0 = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right) \tag{38a}$$

给出. 像前面一样, 这些公式导致如下的定理：

微分方程 $\Delta u+cu=0$ 的每个在 $G$ 上正则的解, 在含于 $G$ 的任意球上满足平均值关系式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega}\int\int_\Omega u\mathrm{d}\Omega &= u_0\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\dfrac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\Gamma\left(\nu+\dfrac{n}{2}\right)}\\ &= u_0\frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)J_{(n-2)/2}(R\sqrt{c})}{\left(\dfrac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{(n-2)/2}}\\ &= u_0 p(R).\end{aligned} \tag{39}$$

这里 $J_\nu(x)$ 是 $\nu$ 阶 Bessel 函数. 特别是, 在平面上有

$$\frac{1}{2\pi R^2}\int_\Omega u\mathrm{d}s = u_0 J_0(R\sqrt{c}). \tag{40}$$

对于奇数 $n$, (39) 中 $u_0$ 的因子 $p(R)$ 可用函数 $\dfrac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$ 的导数表示出来. 事实上

$$p(R) = \frac{(-1)^{(n-3)/2}2^{n-2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}^{(n-3)/2}}{\mathrm{d}(R^2c)^{(n-3)/2}}\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$$

(参考卷 I 第 7 章).

## 4.4 边 值 问 题

### 4.4.1 准备知识. 对边界值和区域的连续依赖性

现在回到理论的中心问题, 就是边值问题. 已经证明了解的唯一性, 就是定理：

最多存在一个函数在 $G$ 上是调和的, 而在 $\Gamma$ 上取得给定的连续边界值 $f$.

已得知边值问题的解连续地依赖于边界值：若 $f_\nu$ 是一个连续函数的序列, 它在 $\Gamma$ 上一致地收敛于 $f$, 那么具有边界值 $f_\nu$ 的势函数序列 $u_\nu$ 在 $G$ 的内部收敛于以 $f$ 为边界值的势函数 $u$.

证明可根据 4.2.3 的收敛定理立即得出. 所以, 只要能说明在 $\Gamma$ 上对特殊的边界值, 比方说, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式的边值问题是可解的, 那么对于任意的连续边界值的问题的解用一个极限过程就可得出. 根据 4.2.1 的论断, 只要能做出 Green 函数 $K$ 就行了.

限制在维数 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形来做 Green 函数, 并且得到如下的结果:

当 $n=2$ 时, 对于任何具有如下性质的域 $G$ 都能作出 Green 函数. 域 $G$ 的边界 $\Gamma$ 是由有限条连续曲线组成的, $\Gamma$ 的每个点是一直线段的端点, 这线段的其他点全都在 $G$ 外.

当 $n=3$ 时, 对于具有如下性质的每个域 $G$ 都能作出 Green 函数. 域 $G$ 的边界 $\Gamma$ 是由有限张连续曲面组成的, $\Gamma$ 的每个点是一四面体的顶点, 这四面体的其他点全都在 $G$ 外.

在卷Ⅲ中将再一次论述边值问题, 不过是在更一般的假设之下, 而且是从不同的观点出发的.

下面的讨论适用于有界域 $G$. 对于不包括全部空间的无界域 $G$, 可用关于某个适当的圆或球的反演而将域 $G$ 变换为有界域 $G'$, 然后求出 Green 函数. 在 4.1.1 的定理的基础上, 由 $G'$ 的 Green 函数立即得出对 $G$ 的 Green 函数.

要想简化对于更一般的域上的 Green 函数的构造, 首先证明关于 Green 函数对域的连续依赖性的某些命题. 考虑收敛于 $G$ 的子域 $G_\nu$ 的一个单调序列, 使得每个 $G_\nu$ 含有 $G_{\nu-1}$ 作为子域, 并且 $G$ 的每个固定的内点包含于从某个 $\nu$ 起的一切 $G_\nu$ 内. 于是下列定理成立:

a) 若对每个域 $G_\nu$ 有一个 Green 函数 $K_\nu$, 而对极限域 $G$ 有一个 Green 函数 $K$, 则序列 $K_\nu$ 在 $G+\Gamma$[①] 上一致地收敛于 $K$.

不过, 在对极限域 $G$ 的 Green 函数的存在性事先不得知的情况下, 特别有意义的是更一般的收敛定理. 这个 Green 函数 $K$ 能够用相应的极限办法构造出来. 将定理 a) 作如下的改进就可证实这一点:

b) 若域 $G_\nu$ 所成的序列单调地收敛于 $G$, 又若对每个 $G_\nu$, 所属的 Green 函数 $K_\nu$ 存在, 则序列 $K_\nu$ 在 $G$ 上收敛于一个极限函数

$$K=\lim_{\nu\to\infty} K_\nu.$$

如果某些条件满足的话, 这个极限函数 $K$ 是对域 $G$ 的 Green 函数.

这些条件是在二维的情形, 对 $G$ 的每个边界点 $P$, 存在一有限的直线段, 它在 $G$ 外但有一端点在 $P$[②], 在三维的情形, 对 $G$ 的每个边界点 $P$, 存在一四面体, 它在

① 在 $G$ 的不属于 $G_\nu$ 的部分上, 可假定 $K_\nu$ 是用 $K_\nu\equiv 0$ 延拓的.

② 对于 $n=2$ 的论述容易扩展到更一般的情形, 就是用有限条线段或可数条线段组成的多边形代替一条直线段来到达点 $P$. 在这种情形下边界可以是任意的 Jordan 曲线. 不过, 由于这种一般边界的边值问题将于卷Ⅲ中用另一种方法直接解出, 所以在这里略去这一推广.

$G$ 外但有一顶点在 $P$.

为了证明定理 a) 和 b), 先作如下的注解. 函数 $K_\nu$ 还有函数 $K_\nu - \gamma$ 都形成单调序列, $K_\nu - \gamma$ 是由 $K_\nu$ 减掉基本解 $\gamma$ 而得到的, 它在 $G_\nu$ 上是正则调和的. 因若令 $\nu$ 足够大, 使得奇异点 $Q$ 在 $G_\nu$ 上, 则对于 $\mu > \nu$, 势函数 $K_\mu - K_\nu$(它在 $G_\nu$ 上是正则的) 的边界值在 $\Gamma_\nu$ 上是非负的. 因此这些函数在整个域 $G_\nu$ 上是非负的.

同样的原因, 在情形 a), $K_\nu \leqslant K$, 因此也有 $K_\nu - \gamma \leqslant K - \gamma$. 在情形 b), 至少有一个球完全在 $G$ 外. 如果 $\hat{K}$ 是关于这球的外部域的 Green 函数, 则有 $K_\nu \leqslant \hat{K}$ 及 $K_\nu - r \leqslant \hat{K} - \gamma$. 也就是说, 在两种情况下, 单调增大序列 $K_\nu - \gamma$ 都是有界的, 因此在 $G$ 上是收敛的. 极限函数 $H = \lim\limits_{\nu\to\infty} K_\nu$ 在整个域 $G$ 上肯定是非负的, 并且根据 4.2.3 的收敛定理, $H$ 在 $G$ 上是调和的.

对于定理 a), 由 $K_\nu \leqslant K$ 得知 $H \leqslant K$. 但因 $K_\nu$ 具有零边界值, 所以极限函数 $H$ 也同样有零边界值. 换句话说, $H = K$ 是极限域 $G$ 上的 Green 函数.

要证明定理 b). 用第 2 小节中讨论的结果, 预先假定在平面上对直线段的外部以及在空间对四面体的外部都能作出 Green 函数. 现在设 $K^*$ 是对于这种线段 (或对于这种四面体) 的 Green 函数, 这线段像在 b) 中所描述的样子接触 $G$ 的一个边界点 $P_0$. 对于 $G$ 上的每个点, 由上面的讨论可立即得出:

$$0 \leqslant H(P) \leqslant K^*(P);$$

因为 $K^*(P_0) = 0$, 所以像前面一样, $H$ 在 $P_0$ 的边界值为 $H(P_0) = 0$. 于是, 根据假设, $H$ 处处有零边界值, 因此, 它是极限域 $G$ 上的 Green 函数.

这里强调一下, 上面这些讨论绝非限于单连域, 它们可毫无改变地搬到多连域上面去.

下一节中将指出, 利用 H. A. Schwarz 交替法, 如何通过用 $G_\nu$ 单调地逼近更一般的域而将对特殊域 $G_\nu = G$ 的 Green 函数的构造法转移到一般的域上面去.

### 4.4.2 用 Schwarz 交替法求边值问题的解

一种简单的收敛过程能解出对于域 $B$ 的边值问题, 这域 $B$ 是由两个相叠的域 $G$ 及 $G'$(或任意有限个这种域) 联合而成的, 而对 $G$ 及 $G'$ 这两个域来说, 假定具有任意连续边界值的边值问题是可解的. 设 $G$ 及 $G'$ 的边界 $\Gamma$ 及 $\Gamma'$ 由有限个具有连续切线或连续切平面的部分所组成, 并设 $G$ 与 $G'$ 的边界的交角不为 0, 且不在 $\Gamma$ 或 $\Gamma'$ 的顶点相交也不沿着 $\Gamma$ 或 $\Gamma'$ 的棱相交. 由于对圆和半平面, 或对球和半空间, 用 Poisson 积分可解出边值问题, 故交替法对于那些在平面上是由有限个相叠的圆或半平面联合而成的域、在空间是由有限个球或半空间联合而成的域可立即求出解来. 联合域 $B$ 的构造如图 4-6 及图 4-7 所示. 图 4-7 指出如何由若干个单连域得到二连域, 从而指出, 可以怎样来解这种域的边值问题.

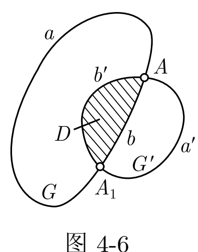


图 4-6

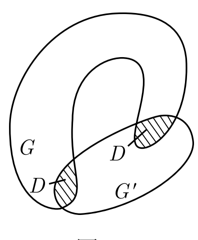


图 4-7

采用这种方法, 对于重叠部分是一个域还是几个不相连的域是没有多大区别的, 所以我们将考虑图 4-6 所示的情况, 那里 $G$ 与 $G'$ 只有一个公共域 $D$. 设 $G$ 的边界 $\Gamma$ 由 $a$ 和 $b$ 两部分组成, $b$ 在 $G'$ 内. 并设 $G'$ 的边界由 $a'$ 和 $b'$ 确定, 且 $b'$ 在 $G$ 内. 假定在 $B$ 的边界 $a+a'=\Lambda$ 给定了连续的边界值, 它们的绝对值以某个常数 $M$ 为界.

1) 交替法由如下的步骤组成：在 $b$ 上依照与 $a$ 上的边界值连续的方式, 用绝对值小于 $M$ 的任意值补充上去, 作为 $b$ 上的边界值, 并对 $G$ 解出具有这样规定在 $\Gamma$ 上的连续边界值的边值问题. 这解 $u_1$ 在 $b'$ 上取得的值与事先在 $a'$ 上指定的值一起形成 $\Gamma'$ 上的连续边界值. 用这些边界值对 $G'$ 解出边值问题, 得到函数 $u_1'$. 这函数在 $b$ 上所取得的值与 $a$ 上的边界值一起又形成了对 $G$ 的连续的边界值. 设对应于这边值问题的解为 $u_2$. 这样继续轮流作下去, 就在 $G$ 上得到一个势函数序列 $u_1, u_2, \cdots$, 而在 $G'$ 上得到相应的序列 $u_1', u_2', \cdots$.

在 $b'$ 上：$u_\nu' = u_\nu$, 因此 $u_{\nu+1} - u_\nu = u_{\nu+1}' - u_\nu'$, 而在 $b$ 上：$u_\nu' = u_{\nu+1}$, 因此 $u_{\nu+1} - u_\nu = u_\nu' - u_{\nu-1}'$. 我们断定：在 $G$ 上函数 $u_\nu$ 一致地收敛于势函数 $u$, 而在 $G'$ 上函数 $u_\nu'$ 一致地收敛于势函数 $u'$, $u$ 和 $u'$ 在 $G$ 和 $G'$ 的公共域 $D$ 上是恒等的. 这两个极限函数在整个域 $B$ 上确定了一个正则的势函数. 这个势函数就是对 $B$ 的边值问题的解.

证明依赖于下面的引理：

在前面关于 $G$ 和 $G'$ 的那种假设之下, 设函数 $v$ 在 $G$ 上是正则调和的, 在 $a$ 上等于零, 且在 $b$ 上满足不等式

$$0 \leqslant |v| \leqslant 1,$$

则存在一个正的常数 $q<1$, 它只依赖于域 $G$ 和 $G'$ 的形状, 使得 $v$ 在 $b'$ 上处处满足不等式

$$|v| \leqslant q.$$

当然, 对 $G'$ 相应的命题也成立. 显然, 可以选取一个对二域都适用的常数作为 $q$.

将在本小节的末尾证明这个引理. 不过, 要先用它来完成交替法的收敛性的证明. 用 $M_\nu$ 表示

$$|u_{\nu+1}-u_\nu|=|u'_{\nu+1}-u'_\nu|$$

在 $b'$ 上的极大值, 相应地用 $M'_\nu$ 表示

$$|u_{\nu+1}-u_\nu|=|u'_\nu-u'_{\nu-1}|$$

在 $b$ 上的极大值. 如果令引理中对 $G$ 的函数 $v$ 恒等于 $\dfrac{u_{\nu+1}-u_\nu}{M'_\nu}$, 则立即得到

$$M_\nu \leqslant qM'_\nu.$$

仿此, 可得到

$$M'_\nu \leqslant qM_{\nu-1},$$

因此

$$M_\nu \leqslant q^2M_{\nu-1}.$$

所以, 量 $M_\nu$ 和 $M'_\nu$ 收敛于零, 并且事实上它们小于公比为 $q^2<1$ 的几何级数的各对应项.

这就意味着级数

$$u_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u_{\nu+1}-u_\nu)=\lim_{n\to\infty}u_n=u$$

在 $G+\varGamma$ 上以及相应的级数

$$u'_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u'_{\nu+1}-u'_\nu)=\lim_{n\to\infty}u'_n=u'$$

在 $G'+\varGamma'$ 上的一致收敛性. 于是可知, $u$ 和 $u'$ 是 $G$ 和 $G'$ 上的势函数, 它们在 $a$ 和 $a'$ 上各自取得给定的边界值. 对于由 $b$ 及 $b'$ 所界定的公共域 $D$, 在 $b'$ 上有 $u'_\nu-u_\nu=0$, 而在 $b$ 上差式 $u'_\nu-u_\nu=u'_\nu-u'_{\nu-1}$ 一致地收敛于零. 因此, 极限函数 $u$ 和 $u'$ 在 $D$ 上完全重合, 且二者合起来确定了一个在 $B$ 上正则的调和函数, 它就是这个边值问题的解.

如果把这个交替法重复有限次, 就得到下面的定理：若 $G$ 是有限个相叠的域 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 联合而成的, 诸域的分块光滑的边界相交于非零的角度且不相交于顶点或棱上, 则当对每个域 $G_\nu$ 边值问题可解时, 对 $G$ 的边值问题也可解.

特别是, 对每一能用有限个圆和半平面、或能用有限个球和半空间覆盖的域, 它的边值问题是可解的. 例如, 若 $G$ 是去掉区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的全平面, 可把它看做是由四个半平面

$$x<0,\quad x>1,\quad y<0,\quad y>0,$$

联合而成的, 对这域求解边值问题可用 Poisson 积分对每个半平面一个一个地解出. 然后用交替法就得出对 $G$ 的解. 在三维空间中, 同样对四面体的外部可看做是四个半空间的联合.

如果我们注意到, 任何域都可看做是单调增大的域序列 $G_\nu$ 的极限域, 而 $G_\nu$ 中的每个都是由有限个圆或球组成的, 那么就可应用 4.4.1 中的定理 b) 并得到一般的定理：

在平面, 若域 $G$ 的每个边界点都可被一在 $G$ 外的直线段所触及, 则对于每个这种域, Green 函数是存在的, 因而边值问题的解也是存在的. 在空间, 若域 $G$ 的每个边界点都是一在 $G$ 外的四面体的顶点, 则有同样的结论[①].

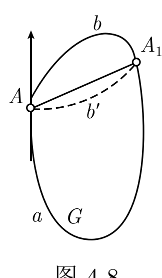


图 4-8

2) 引理的证明：为了证明引理, 先考虑二维的情形 (见图 4-8). 在弧 $b$ 上作一个具有密度 1 的双层势, 即表达式

$$w(P)=w(x,y)=\int_b \frac{\partial \log \dfrac{1}{r}}{\partial \nu}\mathrm{d}s,$$

它表示由 $G$ 上的点 $P$ 向沿着弧 $b$ 移动的点引出的矢径所扫过的角度. 这函数在 $G$ 的内部是正则调和的, 在边界弧 $a$ 及 $b$ 上具有连续的边界值. 当边界点沿弧 $a$ 趋向终点 $A$ 时, 相应的 $w$ 的边界值趋向极限 $R_{A_-}$, 它等于割线 $AA_1$ 与 $A$ 处的指向 $b$ 的切线之间的夹角. 另一方面, $b$ 上边界值的相应的极限 $R_{A_+}$ 等于 $AA_1$ 与 $A$ 处指向 $a$ 的切线之间的夹角. 由此得到关系式

$$R_{A_+}-R_{A_-}=\pi.$$

如果由域的内部, 沿着任一条与 $A$ 处指向 $b$ 的切线成 $\alpha$ 角的射线而趋向边界点 $A$, 则得到的极限值是线性组合

$$\frac{\alpha}{\pi}R_{A_+}+\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)R_{A_-}.$$

由此终于得知, 对于 $G$ 内收敛于 $A$ 的任意点列 $P_\nu$, 相应的函数值 $w(P_\nu)$ 的极限点只能在 $R_{A_+}$ 与 $R_{A_-}$ 之间. 自然, 对于弧的另一端点 $A_1$, 有同样的论断.

现在考虑定义在边界 $\Gamma=a+b$ 上的函数 $\rho$, 它在 $b$ 上等于常数 $\pi$, 且在 $a$ 上等于 0. 设 $\bar{w}$ 是 $w$ 的边界值, 则差式 $\bar{w}-\rho$ 在 $l$ 上是连续函数. 根据假设, 在 $G$ 上存在一个以 $\bar{w}-\rho$ 为边界值的正则调和函数 $\Omega$.

① 顺便提一下, 如果对几个域采用我们所说的交替法, 而当这方法接连不断地重复下去时, 这些域是轮流地一个接替一个的话, 那就和著名的 Poincaré 扫除法 (balayage method) 实质上是一样的了. (参考文献中的许多介绍). 所不同的是 Poincaré一下子就假定了可数个圆或球, 当方法重复使用下去时, 这些圆或球是按一定次序互相接替的. 不过, 这里给出的证明, 不同于扫除法的通常的证明.

定义函数

$$S(P) = \frac{w - \Omega}{\pi},$$

它在 $G+\Gamma$ 上是有界的, 在 $G$ 上是正则调和的. 它在 $a$ 上的边界值为 0 而在 $b$ 上的边界值为 1. 但由前面关于 $w$ 的注释可知, 当由内部趋向 $A$ 或 $A_1$ 时, $S$ 的极限值只能在 0 与 1 之间, 而当沿着与切线成 $\alpha$ 角的射线而趋向 $A$ 或 $A_1$ 时, 得到边界值为 $\frac{\alpha}{\pi}$, 它是一个小于 1 的值.

特别是, 如果沿着 $G'$ 的边界弧 $b'$ 而趋于 $A$ 和 $A_1$, 那么角 $\alpha$ 的极限值是 $b'$ 与 $\Gamma$ 的交角 $\beta$ 和 $\beta_1$. $S$ 在 $b'$ 上处处满足不等式

$$S \leqslant q < 1.$$

因为, 不然的话, 就必定在 $b'$ 存在一个点到 $P_\nu$ 使得 $S(P_\nu) \to 1$. 但是, 正像在极大值和极小值定理的证明的情形一样, 这个序列不可能在 $b'$ 的任何内点处有极限. 而极限点在 $A$ 或 $A_1$ 处也是不可能的, 因为, 我们已经看到, 在这二点处的极限分别为 $\frac{\beta}{\pi} < 1$ 和 $\frac{\beta_1}{\pi} < 1$.

用引理中的函数 $v$ 作差式 $S - v = \Lambda$, 它的边界值在 $a$ 上为 0, 在 $b$ 上肯定是非负的. 这个在 $G$ 上正则调和的函数, 在 $G$ 的内部不可能变为负的, 当我们趋向弧 $a$ 或 $b$ 的一个内点时, 也不可能得到负的极限值. 趋向端点 $A$ 或 $A_1$ 时, $\Lambda$ 具有和 $S$ 同样的极限值, 因此这极限值必定介于 0 和 1 之间. 所以在闭域 $G+\Gamma$ 上处处有 $S - v \geqslant 0$, 而且在弧 $b'$ 上有

$$v \leqslant S \leqslant q.$$

对于和式 $S + v$ 作同样的论述, 得到在 $G$ 上 $S + v \geqslant 0$, 因此, 将两个结果合并起来, 在 $b'$ 上得到

$$|v| \leqslant S \leqslant q < 1.$$

这就证明了引理.

这个证明的好处是它能够立即转移到三维或多维空间上面去. 这时取 $w$ 为在边界上具有密度 0 或 1 的曲面分布的双层势.

### 4.4.3 对于具有充分光滑边界的平面域的积分方程法

在二维的情形, 对某些特殊域求解边值问题的另一个方法是 Fredholm 的积分方程法, 这方法本质上不同于交替法和扫除法. 这是 G. Neumann 的对凸域成立的一个老方法的推广. 边值问题将化为第二类的 Fredholm 方程. 我们不拟在最一般的假设下来扩展这个方法, 而是假定边界曲线 $\Gamma$ 能用参数式 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示出来, 这两个函数具有直到四阶的连续导数. 这里假定参数 $t$ 是沿曲线 $\Gamma$ 的弧长.

试把所需求的势函数 $u(x,y)$ 表示为

$$u(x,y)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}t\quad\left(\gamma=\log\frac{1}{r}\right),\tag{1}$$

把它当做是在边界 $\Gamma$ 上具有密度 $\sigma(s)$ 的双层位势. 这积分即使当 $P(x,y)$ 是边界 $\Gamma$ 上的点时也有意义, 比如说对应于弧长为 $s$ 的点 $P=(x(s),y(s))$ 它是有意义的. 对于 $\Gamma$ 上任意点 $x(s),y(s)$, 上面的积分可写作

$$u(x(s),y(s))=u(s)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}\mathrm{d}t,\tag{2}$$

这里表达式

$$K(s,t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}=\frac{\cos\alpha}{\pi r}=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\tag{3}$$

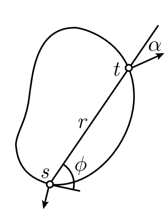


图 4-9

(关于角 $\alpha$ 和角 $\phi$ 的意义见图 4-9) 当 $t\to s$ 时收敛于数值 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)k(s)$, 其中 $k(s)$ 是边界曲线在点 $s$ 处的曲率, 而且这曲率是二阶连续可微的. 事实上, 可以看出, 核 $K(s,t)$ 本身具有直到二阶的连续导数.

假定 $\sigma(t)$ 是弧长 $t$ 的连续可微函数. 若 $P$ 由域的内部趋向边界点 $P_0$, 则根据 4.1.4 中得到的跳跃间断性定理[①]可知, 势函数 $u(P)$ 收敛于边界值 $u_i(P_0)=u(P_0)-\pi\sigma(P_0)$, 或根据 (2), 收敛于数值

$$u_i(s)=-\pi\int_{\Gamma}K(s,t)\sigma(t)\mathrm{d}t-\pi\sigma(s).\tag{4}$$

现在把我们的论述反转过来, 并从积分方程

$$\sigma(s)=-\int_{\Gamma}K(s,t)\sigma(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}f(s)\tag{5}$$

定出分布函数 $\sigma(s)$ 似乎是合理的, 这里 $f(s)=u_i(P_0)$ 表示给定的边界值. 根据 4.4.1, 不失一般性, 可假定边界值 $f(s)$ 是连续可微的. 若 $\sigma(s)$ 是这积分方程的解, 则它的势函数

$$u=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}t$$

在 $G$ 的内部满足势方程. 由 $f(s)$ 及 $K(s,t)$ 的可微性推出 $\sigma(s)$ 也是连续可微的. 换句话说, 使用 4.1.4 中对平面的间断性定理所需的条件是具备的. 由此可知, 当点

① 虽然在 4.1.4 中假定了 $\sigma$ 是二阶连续可微的, 但观察那里给出的证明, 显然对于这里所用的特殊结果来说 (对于肯定双层势本身的跳跃而不是它的法向导数的跳跃来说), 只要假定 $\sigma(t)$ 是一阶连续可微的就行了.

趋向 $\Gamma$ 时, 势函数 $u$ 取得边界值

$$-\pi \int_{\Gamma} K(s,t)\sigma(t)\mathrm{d}t - \pi\sigma(s) = f(s).$$

因此, 如果能解出积分方程 (5), 那么就能解出我们所提出的边值问题.

卷 I 第 3 章中所证明过的 Fredholm 定理可应用于积分方程 (5). 在目前的问题中, 那就是说, 对于每个连续可微的 $f(s)$, 存在唯一确定的连续可微函数 $\sigma(s)$, 当相应的齐次积分方程

$$\sigma(s) = -\int_{\Gamma} K(s,t)\sigma(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

只有平凡解 $\sigma \equiv 0$ 时, 它满足积分方程 (5). 换句话说, 一旦能证明本征值 $\lambda = -1$ 不可能出现在齐次方程

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s,t)v(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

的本征值之中, 也就对于特殊域完成了存在性的证明.

在具有连续曲率和长度为 $L$ 的凸边界的情形下, 这是关系式

$$\int_{\Gamma} K(s,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^L \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 1$$

和由凸性推出来的不等式

$$K(s,t) = \frac{\cos\alpha}{\pi r} \geqslant 0$$

的直接推论. 因若 $M$ 是 $|v|$ 在 $\Gamma$ 上的最大值, 则有

$$|\lambda||v| \leqslant M\int_{\Gamma} K(s,t)\mathrm{d}t = M,$$

因此, 对于 $|v| = M$,

$$|\lambda|M \leqslant M.$$

仅当 $v$ 是常数时等号才成立. 若 $v \neq 0$, 则 $M \neq 0$, 因而

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

事实上, 只对于常数 $v$ 才有 $|\lambda| = 1$. 但对应于本征函数 $v =$ 常数的本征值是 $\lambda = +1$, 故得不等式 $-1 < \lambda \leqslant +1$, 它不包含数值 $\lambda = -1$.

在边界不是凸的情形下, 我们已经注意到, 根据假设核 $K(s,t)$ 是二阶连续可微的. 这表明对于方程

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s,t)v(t)\mathrm{d}t$$

的一切本征函数都有这同一性质. 现在若 $\sigma(s)$ 是方程 (6) 的解, 则作为 4.1.4 中跳跃关系的推论, 势函数

$$u(x,y)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}t \tag{8}$$

在 $\Gamma$ 上取得内边界值

$$u_i(s)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}\mathrm{d}t-\pi\sigma(s)=0,$$

并根据唯一性定理得知它在 $G$ 的内部恒为零. 因此 $u(x,y)$ 在 $\Gamma$ 上的内法向导数也处处为零.

现在在域 $G$ 的外部来考虑势函数 (8). 因为在目前的情形下, 对平面上的间断性定理的各个条件 (见 4.1.4) 都是满足的. 所以在 $\Gamma$ 上得到外边界值

$$u_e(s)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}\mathrm{d}t+\pi\sigma=2\pi\sigma(s),$$

又因 $\sigma(s)$ 是二阶连续可微的, 所以外法向导数 $\dfrac{\partial u_e}{\partial\nu}=0$. 但在无穷远处, 由 (1) 容易看出 $ru$ 是有界的, 因此 $u$ 在 $G$ 的外部也恒等于零, 特别是在 $\Gamma$ 上的外边界值为

$$u_e(s)=2\pi\sigma(s)=0.$$

因此方程 (6) 的每个解恒为零, 即 $\lambda=-1$ 不能是齐次积分方程

$$\lambda v(s)=\int_{\Gamma}K(s,t)v(t)\mathrm{d}t$$

的本征值. 于是证明了对于特殊域 $G$ 的边值问题的解的存在性.

在空间, 与此类似的论述是成立的, 尽管为了能使用 Fredholm 定理, 需将核 $\dfrac{\partial(1/r)}{\partial\nu}$(它不是平方可积的) 换成平方可积的核.

不过, 应该注意到, 尽管积分方程法是优美的, 但它仍然次于前面推出的方法, 因为即使出现一个普通的角点, 也会导致核 $K$ 的奇异性, 而使得 Fredholm 定理无法直接应用.

### 4.4.4 关于边界值的注记

在平面上, 4.4.1 和 4.4.2 所推出的方法对于每个用一条任意的 Jordan 曲线所界的平面域都能做出边值问题的解. 但在三维或多维空间中, 情况就复杂了, 因为对于有些域, 边值问题不再是在强的意义下可解的了. 换句话说, 对于预先给定的连续边界值, 不能总是期望在全部边界点处都能取得这些边界值. 这一点用 Lebesgue 给出的下面的反例可以说明.

先算出集中于 $x$ 轴的 0 与 1 间这段上具有线密度 $\tau(x)=x$ 的质量分布的势:

$$u(x,y,z)=\int_0^1\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+\rho^2}}=A(x,\rho)-2x\log\rho,$$

其中 $\rho^2=y^2+z^2$, 而

$$\begin{aligned}A(x,\rho)=&\sqrt{(1-x)^2+\rho^2}-\sqrt{x^2+\rho^2}\\&+x\log\left|(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\rho^2})(x+\sqrt{x^2+\rho^2})\right|.\end{aligned}$$

当 $x$ 取正值逼近原点时, $A(x,\rho)$ 趋向 1; 不过, 表达式 $-2x\log\rho$ 的极限实质上是依赖于趋向的路径的. 例如, 若在曲面 $\rho=|x|^n$ 上趋向原点, 则 $-2x\log\rho$ 对于每个 $n$ 收敛于 0, 于是 $u$ 趋向数值 1. 另一方面, 若取曲面 $\rho=\mathrm{e}^{-c/2x}(c>0,x>0)$, 它在原点有一“无限陡峭”的顶峰, 这时 $-2x\log\rho$ 收敛于 $c$, 因此势函数 $u$ 趋向 $1+c$. 这表示所有的等势面 $u=1+c(c>0)$ 交于原点, 并且, 曲线 $\rho=f(x)$(将它绕 $x$ 轴旋转就得到上述的那些曲面) 的各阶导数在原点都等于 0. $u=1+c$ 这种曲面如图 4-10 所示.

如果现在把等势面 $u=1+c(c>0)$ 所界定的域 $G$ 取作基本域, 并对 $G$ 和边界值 $u=1+c$ 解出外边值问题, 就得知这解是由上面给定的函数 $u(x,y,z)$ 所作成的. 但是根据我们的讨论得知, 如果依适当的方式趋向原点, 那么这个解就能收敛于 1 与 $1+c$ 之间的任何值.

关于球

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

作反演并作一适当的平移, 则由上面的例子得到对于内边值问题的一个相应的例子. $G$ 映射为 $\xi$, $\eta$, $\zeta$ 空间的域 $G'$, 它在点 $\xi=-\dfrac{1}{2}$, $\eta=0$, $\zeta=0$ 处有一异常尖锐的内顶峰 (见图 4-11). 边界值 $1+c$ 变为在 $\Gamma'$ 上连续的边界值

$$v=\frac{1+c}{2r}\qquad(r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}),$$

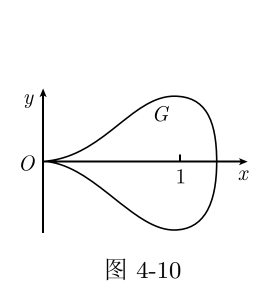



图 4-10

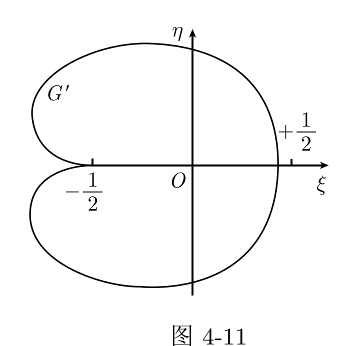



图 4-11

对于这些边界值和域 $G'$ 的内边值问题的解由在 $G'$ 上正则的势函数

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2r}u\left(\frac{\xi}{4r^2}+\frac{1}{2},\frac{\eta}{4r^2},\frac{\zeta}{r^2}\right)$$

给出. 依适当方式趋向点 $\xi=-\dfrac{1}{2},\eta=0,\zeta=0$, 则 $v$ 的极限值仍然可以是 1 与 $1+c$ 之间的任何值.

在卷III中, 将把在每个边界点处确切取得边界值的要求在三维和多维的情形中换成较弱的要求, 就是其本身足以唯一地确定解那个要求：在每个边界点处平均地取得边界值. 只有在二维的特殊情形下, 这种要求才保证在每个边界点取得边界值. 不过, 如果边界和边界值足够光滑的话, 就能确切地取得边界值而且导数在边界上保持连续 (参考本章 4.7.4 末关于更一般的椭圆型方程的附注).

### 4.4.4′ 容量① 和边界值的取得

N. Wiener[2] 已经注意到边界值的取得的问题与容量的概念有关. 容量是一个有独立意义的概念.

为了定义 $n$ 维 (可设想为 $n=3$) 空间中闭曲面 $\Gamma$ 的容量, 把 $\Gamma$ 看做是具有外边界 $\Gamma^*$ 的壳体 $S$ 的内边界, 并假定对 $S$ 的边值问题已解出为函数 $u$, 在 $\Gamma$ 上的边界值为 $u=1$, 在 $\Gamma^*$ 上的边界值为 $u=0$. 不论 $u$ 的导数在边界上存在与否, 在壳体内部同调于 $\Gamma$ 和 $\Gamma^*$ 的任何光滑曲面 $\Gamma'$ 上的曲面积分

$$\int_{\Gamma'}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\kappa$$

总是存在的. 将 Green 公式运用于由两个这种曲面 $\Gamma'$ 围成的内部壳体上, 容易看出, 上述的曲面积分不依赖于 $\Gamma'$ 的特殊的选择. $\kappa$ 这个数定义为 $S$ 关于 $\Gamma$, $\Gamma^*$ 的“容量”; 如果 $\Gamma^*$ 是无穷远点, 那么就称 $\kappa$ 为 $\Gamma$ 的容量. 这个概念对于上述广义的边值问题的解仍然是有意义的; 特殊情形, $\Gamma$ 可以是一小块有限曲面, 只要分别计算曲面的两侧, 使之成为一个闭流形.

在物理上, $\kappa$ 表示作用于导体 $\Gamma$ 上使得在 $\Gamma$ 上产生定常电势 1 而在 $\Gamma^*$ 上保持电势 0 的总电荷.

Wiener 定理表征出域 $G$ 的边界上的那些点 $P$, 如果边值问题是依推广的意义②解出的话, 在这些点处可能取不到预先指定的值.

① 在 M. Brelot[1] 中可找到最新的说明.

② 边值问题的这种推广的叙述方式可以这样给出：把 $G$ 看做是具有光滑边界的单调域序列 $G_n$ 的极限, 这域序列的边界是由正则点组成的, $G_{n+1}$ 包含 $G_n$, 而且 $G$ 的任何闭子域都包含于域 $G_n$ 中的有限个之内. 可以证明各个边值问题的对应解 $u_n$ 收敛于 $G$ 上的调和函数 $u$, 且 $u$ 不依赖于 $G_n$ 趋向 $G$ 的方式. 于是 $u$ 自然地应理解为对 $G$ 的边值问题的解. 参考 N Wiener[1].

在 4.4.4 的例题中, 这种“例外的点”就相应于尖峰的顶点, 或更简单些, 把一线段插入域内并人为地规定它为边界的一部分, 则这线段上的点就是这种“例外的点”.

考虑以边界点 $P$ 为中心以 $\lambda$ 为半径的小球面上的那一部份 $H_\lambda$, 它在 $G$ 内并与 $\Gamma$ 的一部分一起包围 $G$ 的一个小子域, 这子域含有 $P$ 作为边界点. 把 $H_\lambda$ 依上面规定的意义下的容量叫做 $\kappa_\lambda$. 那么 Wiener 定理就是当且仅当容量 $\kappa_\lambda$ 随 $\lambda$ 足够快地趋向零时, 确切地说就是当级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \kappa_\lambda^2, \quad \left(\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right)$$

收敛时, 边界点$P$是例外点.

应当回忆一下 4.4.1 中叙述的关于边界点的正则性的充分条件.

### 4.4.5　Perron 的下调和函数法①

下面这一小节里我们插进 Perron 的一个优美的方法②. 这个方法不强调构造元素而注重于解的存在性的证明. 它联系着重要的一般的概念, 并且, 在这里所讲解的形式, 有着易于推广到其他椭圆型方程上面去的方便之处 (见 4.7 的附注).

为了寻求在一固定的有界域 $G$ 上调和、在其闭包 $G+\Gamma$ 上连续且在边界 $\Gamma$ 上取得预先指定的连续值 $\phi$ 的函数, Perron 使用了下调和函数及上调和函数的概念, 这种函数是单变量的凸函数和凹函数在高维空间的推广, 正像调和函数是单变量的线性函数 (一维 Laplace 方程的解) 的推广一样. 现在就来定义这些概念和另一些基本概念.

设 $v$ 是域 $D$ 上的连续函数, $C$ 是 $D$ 内的闭球 (在整个这一小节中 $C$ 都表示 $D$ 内的闭球). 用 $M_C[v]$ 表示唯一确定的连续函数, 它在 $C$ 内部是调和的而在 $D$ 的其余部分等于 $v$. 若对于 $D$ 内的每个球 $C$, $v$ 满足不等式

$$v \leqslant M_C[v] \quad (v \geqslant M_C[v]),$$

就说 $v$ 在 $D$ 上是下调和的 (上调和的). 例如, 满足 $\Delta w \geqslant 0$ 的任何函数 $w$ 是下调和的, 这可由 4.6.4 的极大值原理推出.

下调和 (上调和) 函数有下列明显的性质：第一, 若 $v \geqslant 0$, 则 $M_C[v] \geqslant 0$(因为 $M_C[v]$ 在 $C$ 上的极小值出现在 $C$ 的边界上); 因此, 若 $v \geqslant w$, 则 $M_C[v]-M_C[w]=M_C[v-w] \geqslant 0$. 第二, 若 $v$ 是下调和 (上调和) 的, 则 $-v$ 是上调和 (下调和) 的. 第三, 下 (上) 调和函数以非负常数为系数的任意线性组合仍是下 (上) 调和函数.

① 译者按:“下调和函数”(subharmonic function) 或译作“次调和函数”, 文中的“上调和函数”(superharmonic function) 或译作“超调和函数”.

② 参考 O. Perron[1].

还需要一些补充性质, 它们将只对下调和函数来叙述, 因为上调和函数加上一个负号就成下调和函数, 所以对上调和函数也有类似的性质.

1) 对于下调和函数的极大值原理: 若 $v$ 在域 $D$ 上是下调和的且在 $D$ 的内部有一极大点, 则 $v=$ 常数. 由此得知, 若 $v$ 在有界域 $D$ 上是下调和的, 且在 $D$ 的闭包上是连续的, 则 $v$ 在边界上取得极大值.

为了证明这个定理, 考虑函数 $w=M_C[v]$, 其中 $C$ 是 $D$ 内的球, 中心在极大点 $P$ 处. 用 $V$ 表示 $v$ 在 $C$ 的边界上的极大值, 则有 $V\leqslant v(P)\leqslant w(P)$. 于是 $w$ 在 $C$ 上是调和的并具有内部的极大点, 这就表明 (在 4.1.3 中已经证明过) 在 $C$ 上 $w=$ 常数, 所以在 $C$ 的边界上有 $v=w=v(P)$. 由于这个论断对于中心在 $P$ 的一切更小的球也都成立, 所以在整个 $C$ 内有 $v=v(P)$. 这说明 $D$ 中极大点所成的集是开集. 根据 $v$ 的连续性, 这集也是 $D$ 中的闭集, 又因 $D$ 是连通域, 所以这集与 $D$ 完全相同.

由 1) 的推理的结果得到:

1′) 若 $v$ 在域 $D$ 的每个点的邻域上是连续的而且是下调和的, 则 $v$ 在整个域上是下调和的, 即下调和性是局部性质. 要弄清这个性质, 首先注意, 只要选取适当小的球 $C$, 就能将 1) 中给出的极大值原理的证明扩展到只在局部区域为下调和的函数 $v$ 上面去. 令 $C$ 为域内的任意球, 并令 $w=M_C[v]$. 则 $v-w$ 在 $C$ 内是下调和的, 根据上面的注释, 它满足极大值原理. 因在 $C$ 的边界上 $v-w=0$, 故知在 $C$ 内 $v\leqslant w$, 这就证明了 $v$ 是下调和函数.

2) 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 在 $D$ 内都是下调和的, 则 $v=\max(v_1,v_2,\cdots,v_m)$ 在 $D$ 内也是下调和的. 对于 $D$ 内每个球 $C$, 根据前面的注释, 得知

$$v_i\leqslant M_C[v_i]\leqslant M_C[v]\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

所以 $v\leqslant M_C[v]$.

3) 若 $v$ 在 $D$ 内是下调和的, 则 $w=M_C[v]$ 在 $D$ 内也是下调和的. 设 $C'$ 是 $D$ 内的任意闭球. 必须证明

$$w=M_C[v]\leqslant M_{C'}[w].$$

当 $C'$ 完全在 $C$ 内或完全在 $C$ 外时, 这个式子显然成立. 因此, 只需考虑 $C'$ 部分在 $C$ 内、部分在 $C$ 外的情形. 若 $P$ 是 $C'-C$(见图 4-12 的阴影部分) 内一点, 则因 $v\leqslant w$, 因而在 $P$ 处有

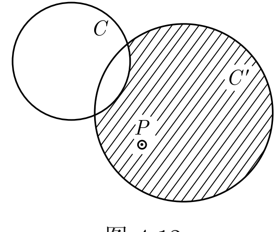


图 4-12

$$w=M_C[v]=v\leqslant M_{C'}[v]\leqslant M_{C'}[w].$$

现在假定 $P$ 属于 $C$ 与 $C'$ 的交集. 在这个域内 $w$ 及 $M_{C'}[w]$ 是调和的, 并且, 根据刚才对阴影域所得的结论, 在边界上有 $w-M_{C'}[w]\leqslant 0$. 根据调和函数的极大值原

理, 这个不等式在整个域上成立.

借助于特殊的下调和函数及上调和函数, 边值问题将获得解决.

若函数 $v$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 则当它在 $G$ 上是下调和的 (上调和的), 且在 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上不大于 (不小于) 给定的边界值 $\phi$, 即 $v \leqslant \phi (v \geqslant \phi)$ 时, 称 $v$ 是下函数 (上函数). 显然, 常量函数 $\min\phi$ 和 $\max\phi$ 各为下函数和上函数.

下调和函数的性质可扩展到下函数上面去. 现在叙述如下.

**引理**: 设以 $F$ 表示所有下函数所成的函数类, 则

a) $F$ 中的诸函数是一致地囿于上的 (以 $\max\phi$ 为界);

b) 当 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 属于 $F$ 时, 函数 $\max(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 也属于 $F$;

c) 当 $v$ 属于 $F$ 且 $C$ 是 $G$ 内任意闭球时, $M_C[v]$ 也属于 $F$.

根据极大值原理, 进一步得知, 在 $G$ 的任何点处, 任意下函数不能超过任意上函数.

边值问题的解法是由如下的想法而引起的. 假定 $w$ 是解, 那么当 $v$ 是任意下函数时, 在整个 $G+\Gamma$ 上有 $v \leqslant w$. 这是因为 $v-w$ 在 $G$ 内是下调和的, 在 $\Gamma$ 上是非正的, 而且对于下调和函数极大值原理成立. 再有, $w$ 本身是下函数. 因此, 如果定义一个函数 $u$, 它在 $G+\Gamma$ 上任何点处等于所有下函数在该点的值的上确界, 则 $w=u$. Perron 的方法在于证明了这样定义的函数 $u$ (它一定存在) 在 $G$ 上是调和的、连续的, 且在"正则"边界点 (定义于后) 处等于 $\phi$.

**定理**: 在 $G+\Gamma$ 上用

$$u(P) = \text{l.}\underset{\nu\in \mathrm{F}}{\text{u}}\text{.b.}\nu(P)$$

定义的函数 $u$ 在 $G$ 上是调和的.

证明[①]: 设 $K$ 是 $G$ 内的闭球, 并设 $K_1$ 是与 $K$ 同心而半径减半的球. 下面将证明 $u$ 在 $K_1$ 内是调和的.

选取 $F$ 的一个子集 $F^*$, 其中的函数是一致地囿于下的且具有性质 b) 和 c). ($F$ 的每个子集都具有性质 a)). 例如, 可以这样构造 $F^*$: 在 $F$ 中选取一固定的函数 $v_1$ 作为下界, 然后指定对 $F$ 中的每个函数 $v$, 函数 $\max(v, v_1)$ 含于 $F^*$. 显然

$$u(P) = \text{l.}\underset{v\in F^*}{u}\text{.b.}v(P).$$

其次, 令 $Q_j$ 是在 $K$ 中稠密的点列且令 $v_j, k$ 是 $F^*$ 中的使得

$$0 \leqslant u(Q_j) - v_{j,k}(Q_j) \leqslant \frac{1}{k} \quad (j,k=1,2,\cdots)$$

的那些函数. 再其次, 在 $G+\Gamma$ 上对于一切点定义

$$v_k = M_K[\max(v_{1,k}, v_{2,k}, \cdots, v_{k,k})].$$

① 证明的这种写法是经 Walter Littman 提示的.

$v_k$ 属于 $F^*$ 且在所有点 $Q_j$ 处 $v_k \to u$. 要证明 $u$ 在 $K_1$ 内是调和的, 根据 Harnack 定理 (参考 4.2.3), 只要证明 $v_k$ 在 $K_1$ 内一致地收敛于 $u$ 就行了. 首先注意：根据前面的定理, 函数 $v_k$(它们在 $K$ 的内部都是调和的) 的绝对值的一致有界性意味着它们的一阶导数在 $K_1$ 内的一致有界性, 且因此也意味着 $v_k$ 在 $K_1$ 内的同等连续性. 根据下面叙述的引理, 可知 $v_k$ 在 $K_1$ 内一致地收敛于 $v$.

**引理**：定义在有界集 $A$ 上的一个同等连续的函数序列, 如果在 $A$ 的一个稠密子集上收敛, 那么它在整个 $A$ 上一致地收敛. 要证明这个引理, 要像 Arzela 定理证明中的最后一步那样来做 (见卷 I ).

这样一来, 我们就已经建立了 $u$ 在 $G$ 内的调和性. 现在要找出关于 $G$ 的边界 $\Gamma$ 的足以保证 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上连续且取得指定的边界值的那些条件.

为此目的, 对 $G$ 的任意边界点 $Q$, 定义在 $Q$ 处的闸函数 $w_Q$, 这种函数在 $G$ 内是上调和的, 在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 且在 $G+\Gamma$ 上除点 $Q$ 外它的值是正的, 在点 $Q$ 处它等于 0. $G$ 的具有这种闸函数的边界点叫做正则点.

注意, 如果在边界点 $Q$ 处存在一个“局部的闸函数”, 即存在一个函数 $W_Q$, 它在 $G+\Gamma$ 与中心在 $Q$ 的某个闭球 $S$ 的交集 $(G+\Gamma)\cap S$ 上是连续的, 在 $G\cap S$ 的内部是上调和的, 且在 $(G+\Gamma)\cap S$ 上除点 $Q$ 外是正的, 在 $Q$ 处它等于 0, 那么点 $Q$ 就是正则的. 为了弄清这件事, 令 $S_1$ 是与 $S$ 同心而半径减半的球, 则 $W_Q$ 在 $(G+\Gamma)\cap(S-S_1)$ 上得到正的极小值 $m$. 定义

$$w_Q = \begin{cases} \min\{m, W_Q\}, & \text{在 } S\cap(G+\Gamma) \text{ 上}, \\ m, & \text{在 } (G+\Gamma)-S \text{ 上}. \end{cases}$$

显然除了上调和性外, $w_Q$ 具有闸函数的一切性质. 不过, 容易看出 $w_Q$ 在两个相重叠的域上是上调和的, 因为它在 $G-\bar{S}_1$ 上等于常数 $m$ (这里 $\bar{S}_1$ 是 $S_1$ 的闭包), 且在 $S\cap G$ 上是两个上调和函数的最小值. 因此 $w_Q$ 是局部上调和的; 根据 $1'$) 可知 $w_Q$ 是上调和函数.

下面将证明在每个正则点 $Q$ 处, $u$ 是连续的且 $u(Q)=\phi(Q)$ 因 $\phi$ 是连续的, 故对于任意的 $\varepsilon>0$, 可找到足够大的常数 $k>0$, 使得函数

$$v(P)=\phi(Q)-\varepsilon-kw_Q(P)$$

及函数

$$V(P)=\phi(Q)+\varepsilon+kw_Q(P)$$

各是下函数及上函数. 又因任何下函数不能大于任何上函数, 所以对于 $G+\Gamma$ 上的一切点 $P$ 有

$$\phi(Q)-\varepsilon-kw_Q(P)\leqslant u(P)\leqslant \phi(Q)+\varepsilon+kw_Q(P),$$

即

$$|u(P)-\phi(Q)| \leqslant \varepsilon + k w_Q(P).$$

当 $P$ 趋向 $Q$ 时, $w_Q(P) \to 0$, 因此, 对于足够接近 $Q$ 的 $P$, 有

$$|u(P)-\phi(Q)| < 2\varepsilon$$

为了完成在 $G$ 上的边值问题的解, 导出一些足以肯定适当的闸函数存在的条件. 先考虑 $n>2$ 维的情形. 如果对于任何边界点 $Q$ 都存在一个闭球 $S$, 它与 $G+\Gamma$ 仅有的公共点为 $Q$, 那么就可取调和函数

$$u_Q(P) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}$$

作为点 $Q$ 的闸函数, 这里 $R$ 是 $S$ 的半径, 而 $r$ 表示 $P$ 到 $S$ 的中心的距离. 这个函数显然满足一切条件.

对于 $n=2$, 在每个满足如下条件的边界点 $Q$ 处可造出闸函数, 就是以 $Q$ 为起点可引一曲线弧 $A$, 除 $Q$ 外, 弧 $A$ 完全在 $G+\Gamma$ 外面, 且 $A$ 无重点. 设 $C$ 是中心在 $Q$ 半径小于 1 的圆, 且 $C$ 是如此之小, 使得它的周界与弧 $A$ 相交. 从点 $Q$ 出发将 $A$ 上的点用参数编排顺序, 设 $z_0$ 是 $A$ 上第一个在 $C$ 的周界上的点, 并设 $A'$ 是 $A$ 上在 $z_0$"前面"的一切点所组成的那部分, 则 $C-A'$ 是单连域, 而在 $(G+\Gamma)\cap C$ 上为单值的函数

$$u_Q(P) = -\mathrm{Re}\frac{1}{\log z} = -\frac{\log\rho}{|\log\rho|^2+\theta^2}$$

($\rho$, $\theta$ 是 $P$ 关于 $Q$ 的极坐标) 是该域上的局部闸函数.

因此, Dirichlet 问题对于 $n=2$ 是可解的, 只要 $G$ 具有这样的性质: 每个边界点 $Q$ 是一条不自相交的曲线弧的起点, 此弧除掉点 $Q$ 全部位于 $G+\Gamma$ 之外(特殊情形, 每条 Jordan 曲线所围成的域的内部都是这种域 $G$[①]); 对于 $n>2$, 只要在 $G$ 的每个边界点 $Q$ 处, 存在一个与 $G+\Gamma$ 只有一个公共点 $Q$ 的闭球, 那么边值问题一定是可解的.

# 4.5 约化的波动方程. 散射

## 4.5.1 背景

对于函数 $U(x_1,x_2,x_3)$(限于三维空间变量 $x$) 考虑"约化的波动方程" (参考第 3 章 3.3.2)

$$L[U] = \Delta U + \omega^2 U = 0. \tag{1}$$

① 参考 M. H. A. Newman[1] 第 6 章 6.4.

(1) 是椭圆型方程, 可以仿照 Laplace 方程一样地处理. 它来源于波动方程

$$\Delta u - u_{tt} = 0, \tag{2}$$

就是当假定波 $u(x,t)$ 对时间 $t$ 来说是具有频率 $\omega$ 的简谐运动, 即

$$u_{tt} = -\omega^2 u$$

时, 就得到 (1). 于是 $u$ 的形状就是

$$u = V_1(x)\cos\omega t + V_2(x)\sin\omega t,$$

其中 $L[V_1] = L[V_2] = 0$. 引入

$$U = V_1 + \mathrm{i}V_2,$$

得到对实波 $u$ 用复的“驻波”解表示的式子

$$u = \mathrm{Re}[U(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}] = \frac{1}{2}(U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \bar{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}),$$

其中 $U$ 是 (1) 的一般的复值解. 我们还要考虑更一般的方程

$$\Delta U + \omega^2 U + gU = 0, \tag{1a}$$

$$\Delta u - u_{tt} + gu = 0, \tag{2a}$$

假定系数 $g$ 不依赖于 $t$, 且在具有光滑边界 $B$ 的域 $R$ 外面等于 0, 于是在 $R$ 外面方程 (1) 或 (2) 成立 (见图 4-13).

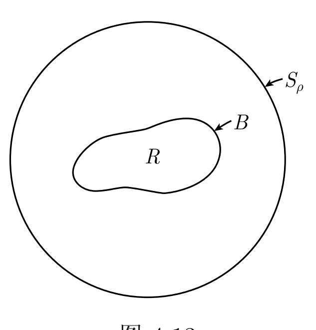


图 4-13

在卷 I 中, 方程 (1) 是作为振动方程而出现的. 在本节中受这同一方程所制约的是另一种完全不同的物理现象, 就是前进波的散射. 散射的数学问题将在 4.5.1 和 4.5.2 中作过一些准备之后将在 4.5.3 中去讨论. 对于前进波使用复数记号是相当重要的, 因为它们不能用具有实函数 $U$ 的单项 $U\cos\omega t$ 或 $U\sin\omega t$ 来表示.

引入点 $x$ 与参变点 $x'$ 之间的距离 $r = |x - x'|$, 并回想一下第 3 章中的“基本解”(用稍微不同的记号)

$$K(x,x') = K(r) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r}}{4\pi r} \text{ 和 } \bar{K}(r) = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega r}}{4\pi r}.$$

$K$ 对应于扩散的球面波而 $\bar{K}$ 对应于收敛的球面波：

$$u = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-r)}}{4\pi r}, \quad u = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+r)}}{4\pi r},$$

这两种波具有以点 $x'$ 为中心的球形相位面, 并以速率 1 向无穷远或向中心运动着.

牵涉到基本解的主要事项：对于任何可微函数 $f(x')$ 来说, 展布在包含着 $x$ 的域 $X'$ 上的积分

$$J(x)=\iiint f(x')K(r)\mathrm{d}x' \text{ 或 } \iiint f(x')\bar{K}(r)\mathrm{d}x' \quad (\mathrm{d}x'=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3')$$

满足微分方程

$$L[J]=f(x).$$

证明与 $\omega=0$ 的情形相同, 就是对于调和方程的证明, 故从略.

对于大的 $r$, 基本解 $K$ 和 $\bar{K}$ 满足关系式

$$\left|\frac{\partial K}{\partial r}-\mathrm{i}\omega K\right|=O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \left|\frac{\partial \bar{K}}{\partial r}+\mathrm{i}\omega \bar{K}\right|=O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{3}$$

这里和通常一样, 符号 $O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ 表示阶数不超过 $\dfrac{1}{r^2}$ 的函数.

依据 A. Sommerfeld 的说法, 这种形式的条件表征着外向辐射和内向辐射.

### 4.5.2 Sommerfeld 的辐射条件

(1) 的在曲面 $B$ 外部为正则的每个复值解可以唯一方式分解为和式

$$U=U_1+U_2,$$

其中 $U_1$ 是 (1) 的在整个空间内正则的解, 而 $U_2$ 满足形如①

$$\lim_{\rho\to 0}\iint_{r=|x-x'|=\rho}\left|\frac{\partial U_2}{\partial r}-\mathrm{i}\omega U_2\right|^2\mathrm{d}S_\rho=0 \tag{4}$$

的 Sommerfeld 外向辐射条件. $\mathrm{d}S_\rho$ 表示以定点 $x'$ 为中心以 $\rho$ 为半径的大球 $S_\rho$ 的面积元素. 现在就来说明 (4) 的物理意义. 当然, 相应地, 若在 (4) 中将 i 换成 $-\mathrm{i}$, 所刻画的就是内向辐射.

为了证明, 考虑中心在 $x'$ 半径为 $\rho$ 且含有 $B$ 的大球 $S_\rho$. 对于在 $B$ 与 $S_\rho$ 之间的环域内的点 $x$, 解 $U$ 可用同样的方法表示成一个调和函数 (见 4.1)：即有

$$U(x)=\iint_{S_\rho}\left(U\frac{\partial K}{\partial n}-K\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}S_\rho-\iint_B\left(U\frac{\partial K}{\partial n}-K\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=U_1+U_2,$$

现在这里

$$K=-\frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega R}, \quad R=|x-x''|,$$

① 这个由 W. Magnus 给出的形式虽然不如前面的公式 (3) 用处多, 但仍足以描绘出外向辐射.

$x''$ 在上式的两个积分中分别在 $S_\rho$ 及 $B$ 上变动, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 表示在 $x''$ 空间中对外法线求导. 在 $B$ 的外面两个被积函数看做 $x$ 的函数时都是 (1) 的解, 这是因为 $K$ 和 $\dfrac{\partial K}{\partial n}$ 都是解. 显然, 跟调和函数的情形一样, $U_1$ 在 $S_\rho$ 的内部到处是正则的. 并且 $U_1$ 不依赖于半径 $\rho$, 因为 $U$ 在所论情形下不依赖于 $\rho$, 而且分量 $U_2$ 也不依赖于 $\rho$. 所以 $U_1$ 在整个空间内的确是正则的.

要证明 $U_2$ 满足 Sommerfeld 的辐射条件 (4), 留意当 $x'$ 固定、$x''$ 在 $B$ 上且 $x-x'=r\eta,\ x''-x'=\sigma\zeta,\ |\eta|=|\zeta|=1$ 时,

$$R=|x-x''|=\sqrt{r^2-2r\sigma\eta\cdot\zeta+\sigma^2}=r-\sigma\eta\cdot\zeta+O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$K=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\omega}}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\eta\cdot(x''-x')}+O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial K}{\partial n}=-\mathrm{i}\omega K\eta\cdot\frac{\partial x''}{\partial n}+O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

像前面一样, 符号 $O(f(\lambda))$ 表示对于大的正的 $\lambda$ 来说是数量级不大于 $f(\lambda)$ 的量, 也就是绝对值小于 $cf(\lambda)$ 的量, $c$ 是常数. 于是有

$$U_2=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\omega}}{4\pi r}\psi(\eta)+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\tag{5}$$

这里“波形因数”

$$\psi(\eta)=\int\int_B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\eta\cdot(x''-x')}\left(\frac{\partial U}{\partial n}+\mathrm{i}\omega\eta\cdot\frac{\partial x''}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

是单位矢量 $\eta$ 的正则解析函数. 对于 $\dfrac{\partial K}{\partial r}$ 有类似的表达式成立, 这些表达式同于将 (5) 对 $r$ 形式地求导而得到的式子. 因此, $U_2$ 对 $\eta$ 来说一致地满足 Sommerfeld 条件, 即使将条件换成更强的形式

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}-\mathrm{i}\omega U_2=O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

仍然成立.

为说明 Sommerfeld 条件 (4) 是刻画外向辐射的, 我们证明：在条件 (4) 之下, 于 $\omega$ 这段时间内有一个正的能量朝外流过大球 $S_\rho$.

在时刻 $t$ 含于以 $S$ 为界的域 $\Sigma$ 内的能量 $E$ 规定为

$$E=\frac{1}{2}\int\int\int_\Sigma(u_t^2+u_{x_1}^2+u_{x_2}^2+u_{x_3}^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

利用 Green 公式及 (2), 容易得到

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int\int_S u_t\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

若取 $\Sigma$ 为大球 $S_o$ 及更大的球 $S_\rho$ 之间的环域, 则曲面积分

$$F(t)=\int\int_{S_\rho} u_t\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

可解释为流经外界 $S_\rho$ 的能通量, 而 $\displaystyle\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}}F(t)\mathrm{d}t=\Gamma$ 是在一个周期内流经 $S_\rho$ 的总通量.

记 $u=\dfrac{1}{2}(U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\bar{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$, 容易得到

$$\Gamma=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\int\int_{S_\rho}\left(\bar{U}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial\bar{U}}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

如果在 $S_\rho$ 与 $S_{\rho'}$ 之间的环域上对于约化波动方程的两个解 $U$ 及 $\bar{U}$, 使用 Green 公式, 就立即得知这个通量是与 $\rho$ 无关的.

现在假定对于 $U$ 来说, Sommerfeld 条件 (4) 表示为如下的形式：

$$\int\int_{S_\rho}(U_n\bar{U}_n+\omega^2U\bar{U}+\mathrm{i}\omega(\bar{U}U_n-U\bar{U}_n))\mathrm{d}S\to 0$$

或

$$\frac{2\omega}{\pi}\Gamma+\int\int_{S_\rho}(|U_n|^2+\omega^2|U|^2)\mathrm{d}S\to 0,\quad 当\ \rho\to\infty\ 时,$$

其中 $U_n$ 表示 $\dfrac{\partial U}{\partial n}$. 由于 $\Gamma$ 不依赖于 $\rho$, 故知 $\Gamma\leqslant 0$, 这就是说, 在一个周期内因向外流经 $S_\rho$ 的通量使能量消耗了或者至少没有增添. 因此, (4) 确实表示外向辐射现象.

最后证明：$U$ 只能以一种方式分解为一个处处正则的解和一个满足 Sommerfeld 条件的解. 这只需证明满足 (4) 的处处正则的解 $U$ 恒等于 0 就行. 设 $U$ 是这样一个解, 则 $\Gamma=0$, 这是因为 $U$ 和 $\bar{U}$ 都是 $S_\rho$ 内的正则解. 于是有

$$\int\int_{S_\rho}(|U_n|^2+\omega^2|U|^2)\mathrm{d}S\to 0,\quad 当\ \rho\to\infty\ 时.$$

然后对于中心在点 $x'$ 的球 $S_\rho$ 内部的任何点 $x$ 有

$$|U(x)|=\left|\int\int_{S_\rho}(UK_n-KU_n)\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\left(\int\int_{S_\rho}(|U|^2+|U_n|^2)\mathrm{d}S\right)^{1/2}\left(\int\int_{S_\rho}(|K_n|^2+|K|^2)\mathrm{d}S\right)^{1/2}\to 0\quad(\rho\to\infty),$$

因为 $K$ 和 $K_n$ 的数量级是 $\dfrac{1}{\rho}$. 于是证实了前面所说的 $U(x)=0$.

### 4.5.3 散射

散射现象可描述如下：设给定一个“入波”, 就是给定方程 (1) 的一个处处正则的解 $U_1(x)=\chi(x)$(例如, 入波可能就是一个平面波, 也可能是由一个平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\alpha x)}$ 在某个立体角内对单位矢量 $\alpha$ 积分而得到的波束). 这个入波受到某个障碍的阻拦而产生散射波 $U_2$, 其结果得到波 $U=U_1+U_2$. 这障碍可用如下二条件之一来表达：(a) 在边界 $B$ 上要求满足 $U=0$ 或 $\dfrac{\partial U}{\partial n}=0$ 这样一个条件, 而且解只在 $B$ 上及 $B$ 外考虑; 或者 (b) 这障碍用 (2a) 或 (1a) 中的修正项 $g$ 来表示, $g$ 在 $B$ 的外部是等于 0 的. 在 (b) 的情形下, 方程的解是在整个 $x$ 空间考虑的.

在两种情形下, 解 $U=U_1+U_2$ 都与原来给定的入波 $U_1=\chi(x)$ 不同, 而是在已知的入波上增添了一个由障碍而引起的叠加波 $U_2$. 再者, 约定：补偿波 $U_2$ 是外向散射波, 即 $U_2$ 满足 Sommerfeld 条件 (4). 对于给定的入波 $U_1=\chi$, 要寻求 $U_2$, 这就是散射的数学问题.

现在在 (1) 或 (1a) 的解的表达形式 (如 4.5.1 中所述) 的基础上来简短地陈述解法.

在情形 (a), 需要由边界条件定出在 $B$ 外部的 $U_2$, 假定 $U_1=\chi$ 在 $B$ 上是已知的.

在情形 (b), 需要由 (1a) 定出 $U_2$.

问题立即化为 Fredholm 积分方程. 在情形 (a), 这个积分方程涉及 $U$ 在边界 $B$ 上的值以及法向导数 $U_n=\dfrac{\partial U}{\partial n}$ 在边界 $B$ 上的值. 这个积分方程是

$$\frac{1}{2}U_2=\int\int_{\mathrm{B}}(U_2K_n-KU_{2_n})\mathrm{d}S,$$

它在 $B$ 上对 $x$ 是成立的, 这里

$$U_2=U-U_1=U-\chi$$

及法向导数

$$U_2=U_n-\chi_n$$

二量之一在 $B$ 上为已知, 另一要在 $B$ 上确定.

在情形 (b), 得到 $U_2$ 的积分方程要更直接些：

$$U_2(x) = \chi(x) - \int\int_R g(x')K(x'-x)U(x')\mathrm{d}x'$$

或

$$U_2(x) = G(x) + \int\int_R K^*(x,x')U(x')\mathrm{d}x',$$

其中核 $K^*$ 为

$$K^*(x,x') = g(x')K(x-x'),$$

已知项 $G$ 为

$$G(x) = \chi(x) + \int\int_R \chi(x')g(x')K(x-x')\mathrm{d}x'.$$

根据卷 I 第 4 章 4.3.8 的理论, 这个关于散射波 $U_2$ 的 Fredholm 积分方程能够化为变分问题, 如使 $\varphi$ 的泛函

$$\begin{aligned} J(\phi) =& \int\int g\phi^2\mathrm{d}x' + \int\int g(x)g(x')K(x-x')\phi(x)\phi(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \\ & -2\int\int g(x)g(x')\phi(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

的变分为 0 以及诸如此类的等价问题. 这种约化法已被证明对于求散射问题的数值解是很有用的①.

最后, 我们看到, 除了入波受外向辐射所产生的散射问题外, 也可处理与它互补的问题：设给定了收敛波 $U_2'$, 它满足 Sommerfeld 内向辐射条件. 那么问题就是寻找一个由障碍 $R$ 产生的或由修正项 $q$ 产生的处处正则的出波 $U_1'$. 在数学上就是把给定的解 $U$ 分解为二分量之和 $U = U_2' + U_1'$, 这两个分量是满足所规定条件的.

因为 (1) 的一个给定解 $U$ 可按二方式之一分解, 使得要考虑收敛波 $U_2'$, 并寻求使它散射而成的发散波 $U_1'$.

## 4.6　更一般的椭圆型微分方程的边值问题. 解的唯一性

虽然调和方程 $\Delta u = 0$ 是典型的椭圆型微分方程, 但是更一般的理论, 即使限于二阶方程, 也还需要许多新的论证, 而这种论证将超出本书范围, 同时这种理论也尚未发展完善. 所以仅指出文献②, 而在这里只限于简短地叙述有关边值问题及

① 用类似的积分方程或变分问题容易表达出波形因数 $\bar{\psi}(\eta)$(参考 4.5.2).

对于这些变分问题以及许多实际应用, 宜参考 J. Schwinger 的 [1] 及 [2], 还有 B. Lippman and J. Schwinger[1].

② 见 4.1.1 的①中的参考文献. 特别是, Miranda 的书包含着详细的、广泛的书目.

特解的结构的一些要点. 在卷III中我们再从变分法的更一般的观点出发回到线性椭圆型问题的理论上来. 现在来讨论唯一性问题: 在什么条件下边值问题的解是唯一确定的?

### 4.6.1 线性微分方程

设 $L[u]=0$ 是椭圆型微分方程

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu \equiv M[u] + cu = 0, \tag{1}$$

其中 $u_{ik}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, $u_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. 设系数 $a_{ik}=a_{ki}$, $b_i$, $c$ 在 $n$ 维空间 $R_n$ 的有界域 $G$ 内是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数. 假定二次型

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\xi_i\xi_k$$

在 $G$ 的一切点 $x$ 处对参数 $\xi$ 是正定的, 那么可以陈述如下.

**唯一性定理**: 在 $c \leqslant 0$ 的条件下, 即对于方程

$$L[u] \equiv M[u] + cu = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = 0, \quad c \leqslant 0, \tag{1a}$$

至多有一个这样的解: 它在 $G$ 上有直到二阶的导数, 在 $G+\varGamma$ 上连续, 且在 $G$ 的边界上取得预先给定的边界值①. 换句话说, 方程 (1a) 的在 $\varGamma$ 上为 0 的解在 $G$ 上恒等于 0.

先证明: 如果二阶连续可微函数 $u$ 在一个内点 $P$ 处有极大值, 那么在这个点处 $M[u] \leqslant 0$. 再进一步推知, 若 $c(P)<0$ 且 $u(P)>0$, 则在 $P$ 处, $L[u]<0$(这个极大值原理的较强条件的叙述, 见 4.6.4).

因为如果 $u$ 在 $P$ 处有极大值, 那么所有的一阶导数在这儿都等于 0, 而且二阶导数

$$u_{ik}(P) = b_{ik}$$

的矩阵是一个处处非正的二次型的矩阵. 于是在点 $P$ 处, $M[u]$ 等于 $S=\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{ik}$, 它是 $(a_{ik})$ 和 $(b_{ik})$ 两矩阵的乘积的迹, 这个迹不能为正. 因为如果用一个正交变换

① 没有 $c \leqslant 0$ 这一条件, 肯定不可能期望在一般情形下解是唯一的, 因为从微分方程 $\Delta u + cu = 0$, 当 $c$ 是相应于边界条件 $u=0$ 的正本征值之一的情况下, 就可立即看到这一点.

将 $(a_{ik})$ 变换为 $p_i > 0$ 的对角线矩阵 $(p_i)$, 并且用同一个变换把 $(b_{ik})$ 变换为矩阵 $(\beta_{ik})$, 那么值 $S$ 保持不变, 且有

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_{ii}.$$

根据 $(b_{ik})$ 可知矩阵 $(\beta_{ik})$ 也是一个无处为正的二次型的矩阵, 于是得到 $\beta_{ii} \leqslant 0$, 因此 $S \leqslant 0$. 这就证明了我们的断言.

现在假定 $u$ 是 $L[u] = 0$ 的一个解, 这个解在 $\varGamma$ 上为 0 且 $c < 0$. 把上述结论用于 $u$ 和 $-u$, 得知 $u$ 在 $G$ 上没有正的极大也没有负的极小. 这个结果和在 $\varGamma$ 上 $u = 0$ 的假设综合起来, 就表明 $u$ 在 $G$ 上恒等于 0.

用下述的 Picard 给出的方法可把 $c \leqslant 0$ 的情形化为 $c < 0$ 的情形. 设

$$u = z(x)v(x)$$

且对 $v$ 得到一个如下形式的微分方程:

$$z\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}v_{ik} + z\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i + v\left(cz + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i\right) = 0, \tag{2}$$

这里 $\beta_i$ 是某些在 $G$ 上连续的点函数. 如果对 $z$ 选取函数

$$z = C - \mathrm{e}^{\mu x},$$

就得到

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}v_{ik} + \sum_{i=1}\beta_i v_i + c^* v = 0, \tag{3}$$

其中

$$c^* = c - \frac{1}{z}(a_{11}\mu^2 + b_1\mu)\mathrm{e}^{\mu x_1}.$$

因 $a_{11} > 0$, 可以这样来选择常量 $C$ 和 $\mu$, 使得在 $G$ 上处处有 $c^* < 0$, 和 $z > 1$. 根据前面的结果推出 $v$ 以及 $u = zv$ 在 $G$ 上恒为 0. 这就完成了唯一性定理的证明.

### 4.6.2 非线性方程

方程 (1a) 的解的唯一性定理可以用来证明某些二阶非线性方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_{nn}) = 0$$

的解的唯一性, 只要下述条件得到满足: 对于 $G$ 上一切 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以及 $F$ 的其它变量的一切值 方程是椭圆型的, 也就是说, 二次型

$$\sum_{i,k=1} \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \xi_i \xi_k$$

是正定的, 且 $\dfrac{\partial F}{\partial u} \leqslant 0$(这些条件可稍微减弱). 因为如果 $u$ 和 $v$ 是具有相同边界值的解, 那么 $w = u - v$ 就满足方程

$$\sum_{i,j=1} \widetilde{F}_{u_{ij}} w_{ij} + \sum_{i=1} \widetilde{F}_{u_i} w_i + \widetilde{F}_u w = 0,$$

其中 $\widetilde{\phi}$ 表示中值：

$$\widetilde{\phi} = \int_0^1 \phi(x_1, \cdots, x_n, tu + (1-t)v, tu_1 + (1-t)v_1, \cdots, tu_{nn} + (1-t)v_{nn})\mathrm{d}t.$$

这个关于 $w$ 的方程是将

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_{nn}) - F(x_1, \cdots, x_n, v, v_1, \cdots, v_{nn})$$

表示为积分而得到的, 它具有 (1a) 的形式, $c = \widetilde{F}_u \leqslant 0$, 所以结论是 $w = 0$.

现在考虑一个拟线性方程

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + d = 0,$$

并假定系数 $a_{ik}$ 和 $d$ 只是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的函数 (与 $u$ 无关). 我们就可以在较弱的条件下证明边值问题的唯一性.

如果 $u$ 是方程的一个解, 它使得相应的矩阵 $(a_{ik})$ 在 $G$ 上处处是正定的, 那么这方程的任何解 $v$, 只要在边界上与 $u$ 相同, 就在整个 $G$ 上与 $u$ 相同. 注意, 对于函数 $v$ 不必事先假定方程是椭圆型的.

要证明这个定理, 再令 $u - v = w$, 并考虑恒等式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}[u] u_{ik} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}[v] v_{ik} + d[u] - d[v] = 0,$$

这里采用了缩写符号

$$a_{ik}[u] = a_{ik}(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

等等. 这个恒等式可写成

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}[u] w_{ik} + \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}(a_{ik}[u] - a_{ik}[v]) + d[u] - d[v] = 0.$$

对第二个和以及后面的项使用微分中值定理, 得到

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}[u] w_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0,$$

这里 $a_i = a_i[u, v]$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的函数. 如果把我们所考虑的这两个特解 $u$ 和 $v$ 代入 $a_{ik}[u]$ 和 $a_i[u, v]$, 并注意到结果是一个 $w$ 的线性方程, 那么这个方程是椭圆型的并且是 (1a) 的形式, 所以 $w = 0$.

### 4.6.3 关于 Monge-Ampère 微分方程的 Rellich 定理

最后, 作为非线性微分方程中不满足 4.6.2 条件下的一个例子, 我们来谈一下 (非线性的)Monge-Ampère方程:

$$L[u] = E(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0 \tag{4}$$

的边值问题.

设系数 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ 在 $G$ 上是 $x, y$ 的连续函数, 且满足不等式

$$AC - B^2 - DE > 0. \tag{5}$$

那么, 可叙述唯一性定理[①] 如下:

方程 (4) 最多有两个在 $\Gamma$ 上取得相同边界值的解.

证明: 设 $u$ 是 (4) 的一个解, 则根据 (4) 和 (5) 有不等式

$$(Eu_{xx} + C)(Eu_{yy} + A) - (Eu_{xy} - B)^2 > 0. \tag{6}$$

由此可知式 $(Eu_{xx} + C)(Eu_{yy} + A)$ 必大于 0, 所以式中二因子在 $G$ 上都不能为 0, 二者或都恒大于 0 或都恒小于 0. 因此, 只要能证明, 对于在 $G$ 上处处有

$$Eu_{xx} + C > 0 \quad (\text{因而也有} Eu_{yy} + A > 0), \tag{7}$$

以及在 $G$ 上处处有

$$Eu_{xx} + C < 0 \quad (\text{因而也有} Eu_{yy} + A < 0). \tag{8}$$

这两种情况下, 边值问题都最多有一个解, 那么上述定理就证明完毕. 只要考虑 (7) 的情形就够了.

假定此边值问题有两个解 $u$ 和 $v$, 二者都满足不等式 (7), 那么差 $w = u - v$ 必定满足如下二方程:

$$\begin{aligned} 0 = L[w+v] - L[v] =& E(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) + (Ev_{xx} + C)w_{yy} \\ & + (Ev_{yy} + A)w_{xx} - 2(Ev_{xy} - B)w_{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = L[u] - L[u-w] =& -E(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) + (Eu_{xx} + C)w_{yy} \\ & + (Eu_{yy} + A)w_{xx} - 2(Eu_{xy} - B)w_{xy}, \end{aligned}$$

将此二方程相加, 得到关系式

$$Pw_{xx} - 2Qw_{xy} + Rw_{yy} = 0, \tag{9}$$

① 参考 F. Rellich[1].

这里系数

$$P = Ev_{yy} + A + Eu_{yy} + A,$$

$$Q = Ev_{xy} - B + Eu_{xy} - B,$$

$$R = Ev_{xx} + C + Eu_{xx} + C$$

是 $G$ 上的连续的点函数, 根据 (6) 和 (7) 得知二次型

$$P\xi^2 - 2Q\xi\eta + R\eta^2$$

是两个正定的二次型之和, 因而它自己也是正定的. 像 4.6.1 和 4.6.2 一样, 由 (9) 和边界条件 $w = 0$ 得到 $w$ 在 $G$ 上恒为 0 的结论, 于是唯二性定理得到证明.

由简单的例子得知, 一般 有可能 存在两个不同的解. 例如, 在单位圆上具有边界条件

$$u = 0 \tag{10}$$

的方程

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4$$

的边值问题就有两个解

$$u = x^2 + y^2 - 1 \quad 和 \quad v = 1 - x^2 - y^2.$$

对于第一个解, $Eu_{xx} + C = 2$, 对于第二个解, $Ev_{xx} + C = -2$.

另一方面, 如果函数 $E$ 在 $G$ 的任何点处都等于 0, 那么边值问题最多只可能有一个解. 因为在点 $P$ 处有 $Eu_{xx} + C = C(P)$, 又因 $Eu_{xx} + C$ 在 $G$ 上不变号, $(Eu_{xx} + C)$ 的正负号与 $C(P)$ 的正负号处处相同, 这就是说, 对所有的解 $u$, $(Eu_{xx} + C)$ 的正负号是相同的①.

### 4.6.4 极大值原理及应用

回到 $c \leqslant 0$ 情况下的线性方程 (1), 现在用强形式叙述极大值原理.

极大值原理②: 如果函数 $u$ 满足 $M[u] \geqslant 0$ 且在一内点处有极大值, 那么 $u \equiv$ 常数.

---

① 应该提到的是, Monge-Ampere 微分方程能够由一个简单的变分问题得到. 为此我们略去 $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$ 而考虑方程

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = p(x, y).$$

容易验证, 这就是变分式

$$J[u] = \int\int_G [u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx} + 6pu]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的 Euler 方程.

② 这里所述的结果应归功于 E. Hopf[2]. 其证明在这里稍有修改.

结果是, 任何在 $G+\Gamma$ 上连续且在 $G$ 上满足 $M[u]\geqslant 0$ 的函数 $u$ 在边界 $\Gamma$ 上取得极大值 (这叫做极大值原理的弱形). 显然, 可以叙述类似的极小值原理.

4.6.1 的唯一性定理也可由下述的极大值原理的推论得出.

**推论:** 设 $u$ 在 $G$ 上满足方程 (1a). 如果 $u$ 有一个正的内部的极大值, 那么 $u\equiv$ 常数. 于是, 当 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上连续, 在 $\Gamma$ 上非正且在 $G$ 上满足 $L[u]\geqslant 0$ 时, $u$ 在 $G$ 上非正 (即 $u\leqslant 0$).

为了证明这个推论, 假定 $u$ 在内点 $p$ 处有正的极大值. 由于 $u$ 是连续的, 所以它在 $P$ 的某个邻域是正的. 但是在这个邻域上 $M[u]=L[u]-cu\geqslant 0$(因 $c\leqslant 0$), 因此, 根据极大值原理, 在此邻域上 $u\equiv$ 常数. 于是, 极大点的集合在 $G$ 上是开集, 另一方面, 由于 $u$ 的连续性, 它在 $G$ 上也是闭集, 因而这个集就是整个 $G$. 于是可知, $u$ 在 $G$ 上处处等于一个正的常数.

极大值原理的证明基于如下的引理.

**引理:** 设 $S$ 是个开球, $P_0$ 是它的边界上的一个点. 假定 $M[u]$ 的系数在 $S$ 上是有界的, 并且存在一个正的常数 $m$, 使得

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{11}$$

对于一切值 $\xi$ 以及 $S$ 上的一切点 $x$ 都成立. 再假定 $u$ 在 $S$ 上是二次连续可微的, 在 $S+P_0$ 上是连续的, 且在 $S$ 上满足 $M[u]\geqslant 0$ 和 $u<u(P_0)$. 那么外法向导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$(理解为 $\dfrac{\Delta u}{\Delta n}$ 的下极限) 在 $P_0$ 处是正的.

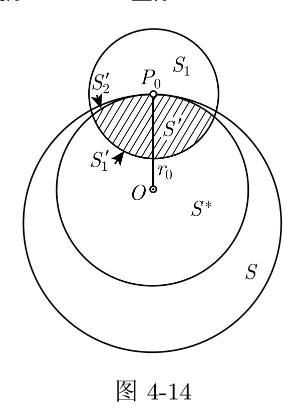



图 4-14

证明: 设 $S^*$ 是在 $P_0$ 处内切于 $S$ 的一个较小的球 (见图 4-14), 则 $P_0$ 是 $u$ 在 $\bar{S}^*$ 上的唯一的极大点, 这里 $\bar{S}^*$ 是 $S^*$ 的闭包. 选取 $S^*$ 的中心为原点并令 $r^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$. 令 $r_0$ 表示 $P_0$ 和原点之间的距离. 用 $S'$ 表示 $\bar{S}^*$ 与一固定闭球 $S_1$ 的交集, 球 $S_1$ 以 $P_0$ 为中心且其半径小于 $r_0$. $S'$ 的边界是由 $S_1$ 的球冠与 $\bar{S}^*$ 的球冠组成的, 分别用 $S_1$ 和 $S_2'$ 表示这两个球冠.

现在引入辅助函数

$$h=\mathrm{e}^{-\alpha r^2}-\mathrm{e}^{-\alpha r_0^2}\quad(\alpha>0),$$

它在 $S^*$ 上是正的且在 $S^*$ 的边界上为零. 取适当大的 $\alpha$ 可使

$$M[h]=\mathrm{e}^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k-2\alpha\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_ix_i)\right]$$

在$S'$的内部为正, 因为在$S'$内$r$以异于 0 的正数为界从而根据(11)得知$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$也以异于 0 的正数为界. 在 $S$ 上函数 $u$ 小于 $u(P_0)$, 事实上, 它与 $u(P_0)$ 是隔开一段距离的. 因此, 对于固定的足够小的正数 $\in$, 函数

$$v = u + \in h$$

在 $S_1'$ 上也小于 $u(P_0)$. 现在在 $S'$ 上来考察函数 $v$. 在 $S'$ 的内部有 $M[v] = M[u] + \in M[h] > 0$. 根据 4.6.1 中的叙述, $\max_{S'} v$ 应出现在 $S'$ 的边界上, 但在 $S_1'$ 上 $v < u(P_0)$, 且在 $S_2'$ 上 (除 $P_0$ 外)$v = u < u(P_0)$, 再者, $v(P_0) = u(P_0)$, 所以 $\max_{S'} v$ 出现在 $P_0$ 处, 于是在 $P_0$ 处有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} + \varepsilon \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} \geqslant 0,$$

又因 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} < 0$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} > 0,$$

引理得证.

极大值原理现在容易推出了. 设 $u$ 在 $G$ 上满足 $M[u] \geqslant 0$. 如果 $u \not\equiv$ 常数且有一个内部极大点, 就能够在 $G$ 上找到一个闭球使得 $u$ 的极大点在它的边界上而不在它的内部. 根据引理, 在这个点处 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} > 0$, 这就违反了 $u$ 的一阶导数在内部极大点处为零的事实.

我们早已察觉, 极大值原理就意味着任何在 $G$ 上满足 $M[u] \geqslant 0$ 的函数在一个边界点 $P_0$ 处取得极大值. 如果在 $G$ 内存在一个开球 $S$, 在 $S$ 的边界上包含着点 $P_0$, 并且如果在 $S$ 内 $M$ 的系数是有界的且满足 (11), 那么引理和极大值原理就提供了如下有用的结论①：或者在 $G$ 上 $u \equiv$ 常数或者它的外法向导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$ 在 $P_0$ 处是正的. 对于这种域 $G$, 例如, 方程 $M[u] = 0$ 的 Green 函数 (它在 $G$ 的边界上为 0 且在一内点处有奇异性) 在每个边界点处满足 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} < 0$, 因为函数在边界上有极小值.

这个结论也为我们对方程 $M[u] = 0$ 的第二类边值问题即 Neumann 问题解的唯一性提供了一个简单的证明, 方程 $M[u] = 0$ 是容易扩展到方程 (1a) 的. 这个问

① 参考 E. Hopf[1]. 应该提到的是, 即使矩阵 $(a_{ik})$ 的最低本征值在 $P_0$ 处为 0, 引理的结论和上述的结论仍成立. 也就是说, 即使方程在 $P_0$ 处不称其为椭圆型了, 只要 $S$ 的边界在 $P_0$ 处不是特征的, 引理和上述结论就成立. 在此情形下, 引理的证明中出现的式子 $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ 在接近 $P_0$ 处仍然以异于 0 的正数为界, 因此论证的其余部分是可用的. 对于有关的结论也可参考 C. Pucci[1].

题的最好叙述方式如下：在 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上定义了一个连续函数 $\phi$, 假定 $P$ 具有连续变化的法线. 要寻找 $M[u]=0$ 的一个解 $u$, 这个解在 $G+\Gamma$ 上是连续的且具有连续的一阶偏导数, 在某个固定的点 $P$ 处取得预先给定的值, 而且在 $\Gamma$ 上它的外法向导数等于 $\phi$ 加上一个常数,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=\phi+C.$$

为了证明唯一性, 必须证明方程 $M[u]=0$ 的在 $\Gamma$ 上满足 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=$ 常数 $=k$ 而在 $P$ 处为 0 的任何这种解是恒等于 0 的, 即 $k=0$. 假定 $M[u]$ 的系数在 $G$ 上有界且满足 (11), 并假定对于 $\Gamma$ 上的每个点 $P_0$, 可找到一个完全在 $G$ 内且 $P_0$ 位于其边界上的开球 $S$. 如果 $u$ 是一个解, 那么极大值原理就表明它在边界 $\Gamma$ 的点处取得极大值和极小值. 根据前面的论证, 在这些点处 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$ 分别为正或为负, 除非 $u$ 恒等于常数. 但 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=k$, 因此, 事实上在 $G$ 上 $u=$ 常数, 又因 $u$ 在 $P$ 处为 0, 故 $u$ 恒等于 0.

除了对于 (1a) 的在 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上具有给定的边界值 $u=\phi$ 的解 $u$ (从而也对 $L[u]=f$ 的解) 提供了唯一性证明外, 极大值原理也可以用来估算 $u$.

如果 $g$ 是满足条件

$$-L[g]\geqslant\max|f|$$

在 $G$ 内和

$$g\geqslant\max|\phi|$$

在 $\Gamma$ 上的任何函数, 则

$$|u|\leqslant g.$$

要证明它, 只要证明 $v=u-g$ 非正就行了. 但这一点可由极大值原理的推论得出, 因为 $v$ 满足条件

$$L[v]=L[u]-L[g]=f-L[g]\geqslant 0,$$

又因在边界上, $v=\phi-g\leqslant 0$.

现在来构造这样一个函数 $g$, 为了方便起见假定有界域 $G$ 位于半空间 $x_1\geqslant 0$ 内. 设有正的常数 $m, b$, 使得在整个 $G$ 上有

$$a_{11}\geqslant m,\quad -b_1\leqslant b.$$

令

$$g=\max|f|(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}_1})+\max|\phi|,$$

在 $G$ 上 $x_1\leqslant\bar{x}$, $\alpha$ 是一个正的常数, 它的选取要使得 $g$ 满足给定的条件. 显然 $g\geqslant\max|\phi|$, 而且, 对于适当大的 $\alpha$

$$-L[g]=\max|f|[\mathrm{e}^{\alpha x}(a_{11}\alpha^2+b_1\alpha)-c(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-\mathrm{e}^{\alpha x_1})]-c\max|\phi|$$

$$\begin{aligned}&\geqslant \max|f|(a_{11}\alpha^2+b_1\alpha)\\&\geqslant \max|f|.\end{aligned}$$

$\alpha$ 的选取只依赖于 $m$ 和 $b$.

于是得到如下的一个先验估计式:

方程(1a)的具有边值 $u=\phi$ 的解 $u$ 由

$$|u|\leqslant \max|\phi|+\max|f|(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1) \tag{12}$$

界定, 这里 $\alpha$ 是一个只依赖于 $b$ 和 $m$ 的正的常数, $\bar{x}$ 是在 $G$ 上使得 $|x_1|\leqslant\bar{x}$ 的一个常数.

即使不假定 $c\leqslant 0$, 仍然能得到一个形如

$$|u|\leqslant k(\max|\phi|+\max|f|) \tag{13}$$

的估计式, 只要域 $G$ 足够窄, 比如说, 在 $x_1$ 的方向足够窄, 或者更确切地说, 只要

$$(\max c)(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1)<1 \tag{14}$$

(常数 $k$ 依赖于 $b,\ m,\max c$ 和 $\bar{x}$). 因为在此情形下, 可将方程写作

$$M[u]+c^-u=(c^--c)u+f=\bar{f},$$

其中 $c^-=\min(c,0)$, 并且可应用先验估计 (12). 得到

$$\begin{aligned}\max|u|&\leqslant \max|\phi|+\max|\bar{f}|(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1)\\&\leqslant \max|\phi|+(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1)(\max|f|+\max|u|\max c)\end{aligned}$$

或

$$\max|u|\leqslant\frac{\max|\phi|+\max|f|(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1)}{1-\max c(\mathrm{e}^{\alpha\bar{x}}-1)}.$$

注意, (13) 就蕴含着解的唯一性.

## 4.7 Schauder 的先验估计及其应用

对于非线性椭圆型方程的边值问题, 最先作过系统研究的是 Serge Bernstein. 在他的主要论文中表明了解非线性边值问题时, 主要的而通常也是最困难的步骤, 在于证明解的某些充分强的先验估计.

对于形如

$$L[u]\equiv\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_i+cu=f \tag{1}$$

的线性椭圆型方程在有界域 $G$ 上的解 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, J. Schauder① 导出了一些这样的先验估计. 利用这些先验估计, 他直接解决了边值问题 (对于 $c \leqslant 0$) 而无需构造方程的基本解.

这些估计, 对于具有有界的 Hölder 连续系数的一致椭圆型方程 (1) 是成立的. 也就是说, 对于满足下列条件的方程是成立的：存在正的常数 $m$, $M$ 及 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 使得在 $G$ 上：

(a) 对于一切实数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 不等式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

成立;

(b) $|a_{ik}|,\ |b_i|,\ |c| \leqslant M, (i, k = 1, 2, \cdots, n)$;

(c) 系数 $a_{ik}$, $b_i$, $c$ 满足具有指数 $\alpha$ 及系数 $M$ 的 Hölder 条件 (见 4.1.2).

我们将只叙述这些估计而不予以证明 (见脚注), 并且说明求解 (1) 的边值问题的 Schauder 方法. 此外, 还要给出这些估计的一些应用, 利用它们, 可导出方程 (1) 的解的诸性质与调和函数的许多性质的相似之处.

### 4.7.1　Schauder 的估计

要想以简洁的形式给出这些估计, 即把它们表示为对 (1) 的解的诸导数的界限, 最方便的办法是引入具有各阶导数的函数类, 以及表示各类中函数“大小”的适当的“范数”. 因此, 规定以 $C_m$($m$ 是非负整数) 表示那些在 $G+\Gamma$ 上具有直到 $m$ 阶的连续偏导数的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所成的类, 并以 $C_{m+\alpha}$($m$ 是非负整数, $0 < \alpha < 1$) 表示 $C_m$ 中其 $m$ 阶导数在 $G+\Gamma$ 上满足具有指数 $\alpha$(见 4.1.2) 的 Hölder 条件的那些函数所成的类. $C_0$(有时也叫 $C$) 表示在 $G+\Gamma$ 上连续的函数所成的类.

用 $D^m u$ 表示 $u$ 的 $m$ 阶导数中的任意一个. 在 $C_m$ 中引入“范数”

$$\|u\|_m = \max_{P\in G+\Gamma}|u(p)| + \max_{P\in G+\Gamma}|D^1u(P)| + \cdots + \max_{P\in G+\Gamma}|D^m u(P)|,$$

这里最大值 (max) 是对符号中所指阶数的所有导数而取的. 用 $H_\alpha[D^m u]$ 表示具有下述性质的最小常数 $K$：$u$ 的所有 $m$ 阶导数在 $G+\Gamma$ 上满足指数为 $\alpha$、系数为 $K$ 的 Hölder 条件. 在 $C_{m+\alpha}$ 中引入

$$\|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_m + H_\alpha[D^m u]$$

作为范数.

① 参考 J. Schauder[2] 及 [1]. C. Miranda[1], A. Douglis, L. Nirenberg 以及另外一些人给出了简化的证明. S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg[1] 对于任意阶的椭圆型方程的一般边值问题导出了类似的估计, 见 536—547 页. 在那里给出了另外一些参考文献.

现在对于每个数 $a \geqslant 0$ 定义了函数类 $C_a$, 显然 $C_a$ 是线性的, 即将 $C_a$ 中的函数用实系数作任意有限次组合所得到的函数仍属于 $C_a$. 容易看出范数 $\|u\|_a$ 具有如下的性质：

$$\|u\|_a \geqslant 0 \quad (\text{仅当 } u=0 \text{ 时} \|u\|_a = 0),$$

对于任何实的常数 $c$

$$\|cu\|_a = |c|\|u\|_a,$$

$$\|u+v\|_a \leqslant \|u\|_a + \|v\|_a \quad (\text{三角不等式}).$$

所以, 函数类 $C_a$ 可看做是一个线性空间, 这空间的元素或“点”就是函数 $u$, 在此空间上范数 $\|u\|_a$ 规定了任何一对函数 $u$, $v$ 之间的度量或距离：$\|u-v\|_a$. 在此空间规定函数序列 $\{u_n\}$ 的收敛：

当且仅当 $\|u_n - u\|_a \to 0$ 时,

$$u_n \to u \text{ 或 } \lim u_n = u.$$

函数的关于范数 $\| \ \|_m$($m$ 是整数) 的收敛等价于 $u$ 及其直到 $m$ 阶的导数在 $G+\varGamma$ 上的一致收敛. 显然, 每个收敛序列 $\{u_n\}$ 是 Cauchy 序列, 即具有如下性质的序列：

$$\text{当 } m, n \to \infty \text{ 时, } \|u_m - u_n\|_a \to 0.$$

再者, 线性赋范空间 $C_a$ 是完备的, 即在 $C_a$ 中每个 Cauchy 序列都收敛. 这个命题的证明留给读者. 于是空间 $C_a$ 是一个完备的线性赋范空间, 即 Banach 空间①. 对于定义在 $G$ 的任何闭子域上的函数, 用 $C_a^B$ 和 $\| \ \|_a^B$ 表示相应的函数类和范数.

除了空间 $C_a$ 之外, 还需要连续可微函数的空间, 这些函数的导数在边界 $\varGamma$ 上按预先指定的方式变为无穷. 令 $d_P$ 表示 $G$ 内的任一点 $P$ 到 $G$ 的边界的距离, 对于任二点 $P$, $Q$, 令 $d_{P,Q} = \min(d_P, d_Q)$. 对于在 $G+\varGamma$ 上连续的且在 $G$ 上有直到 $m$ 阶的连续导数的任何函数 $u$, 规定

$$\widehat{\|u\|}_m = \underset{P\in G}{\mathrm{l.u.b}}\, |u(P)| + \underset{P\in G}{\mathrm{l.u.b.d}}\,{}_P.|D^1 u(P)| + \cdots + \underset{P\in G}{\mathrm{l.u.b.d}}\,{}_p^m.|D^m u(P)|,$$

这里上确界 (l.u.b.) 是对符号中所指阶数的所有导数而取的. $\widehat{\|u\|}_m$ 可以是无穷的. 对于在 $G$ 的每个闭子域上, 其 $m$ 阶导数满足具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 条件的那些函数 $u$, 规定

$$\hat{H}_\alpha |D^m u| = \underset{P,Q\in G}{\mathrm{l.u.b.}}\, d_{P,Q}^{m+\alpha} \cdot \frac{|D^m u(P) - D^m u(Q)|}{|P-Q|^\alpha},$$

① 参考 S. Banach[1] 对于这类空间的研究. 也可参阅 N. Dunford and J. T. Schwartz[1] 及本章的补充 4.15.

这里上确界也是对 $m$ 阶的所有导数来取的, 而 $|P-Q|$ 表示由 $P$ 到 $Q$ 的距离. 再规定

$$\widehat{\|u\|}_{m+\alpha}=\widehat{\|u\|}_m+\hat{H}_\alpha|D^m u|.$$

令 $\hat{C}_m$ 表示在 $G+\Gamma$ 上连续、在 $G$ 上有直到 $m$ 阶的连续导数且 $\widehat{\|u\|}_m$ 是有限的那些函数 $u$ 所形成的函数类. 当 $0<\alpha<1$ 时, 令 $\hat{C}_{m+\alpha}$ 表示 $\hat{C}_m$ 中 $\widehat{\|u\|}_{m+\alpha}$ 为有限的那部分函数所形成的子类. 于是, 对于一切 $a>0$ 规定了函数类 $C_a$ 和相应的"范数" $\|\ \|_a$. 并且, 范数 $\widehat{\|\ \|}_a$ 具有上面对范数 $\|\ \|_a$ 所列举的那些性质, $\hat{C}_a$ 形成一个线性空间, 在范数 $\widehat{\|\ \|}_a$ 的定义之下, 容易看出这个空间是完备的. 因此, $\hat{C}_a$ 是 Banach 空间. 显然, 如果 $u$ 在 $\hat{C}_a$ 中, 它必定在函数类 $C_a$ 关于 $G$ 的任何闭子域所成的函数类之中.

现在可以讲述先验估计了. 首先关于系数的条件, 如 (b) 和 (c), 在现有的符号下可表示得简练些, 即可用

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{2}$$

和

$$\|a_{ik}\|_\alpha,\ \|b_i\|_\alpha,\ \|c\|_\alpha \leqslant 2M \tag{3}$$

代替条件 (a), (b) 和 (c).

估计有两种：在 $G$ 的任何闭子域上的"内部"估计和整个 $G+\Gamma$ 上的"直到边界"的估计. 对于这两种估计需要 $f$ 分别在 $\hat{C}_\alpha$ 和 $C_\alpha$ 之中.

内部估计：如果 $u$ 是 (1) 的解, 它的二阶导数在 $G$ 的每个闭子域上是 Hölder 连续的 (具有指数 $\alpha$), 那么 $\widehat{\|u\|}_{2+\alpha}$ 是有限的而且

$$\widehat{\|u\|}_{2+\alpha} \leqslant K(\widehat{\|u\|}_0+\widehat{\|f\|}_\alpha), \tag{4}$$

这里 $K$ 是只依赖于 $m$, $\alpha$, $M$ 和 $G$ 的直径的一个常数.

在叙述直到边界的估计时, 需要域 $G$ 及 $u$ 的边界值 $\phi$ 足够光滑. 说域 $G$ 光滑就是说它的边界光滑, 也就是说, 能够用具有如下性质的有限个球来覆盖 $\Gamma$：选取一个坐标, 如 $x_n$, 可将包含在每个这种球中的边界部分表示成

$$x_n=g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

其中 $g$ 是有 Hölder 连续的二阶导数的 (具有指数 $\alpha$ 的 Hölder 连续). 而且, 用局部参数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 表示出来的边界值 $\phi$ 也是光滑的, 即也有指数为 $\alpha$ 的 Hölder 连续的二阶导数. 在边界上采用固定的有限个局部参数组, 且在每个球内采用范数 $\|\phi\|_{2+\alpha}$, 就可对函数 $\phi$ 规定一个范数 $\|\phi\|'_{2+\alpha}$ 作为 $\|\phi\|_{2+\alpha}$ 的极大值.

直到边界的估计：在具有光滑边界值 $\phi$ 的光滑域 $G$ 上, 设 $u$ 是 $C_{2+\alpha}$ 中方程 (1) 的一个解, 则

$$\|u\|_{2+\alpha} \leqslant K_1(\|u\|_0 + \|f\|_\alpha + \|\phi\|'_{2+\alpha}), \tag{5}$$

其中 $K_1$ 是只依赖于 $m$, $\alpha$, $M$ 和域 $G$ 的一个常数.

Schauder 估计的推导太冗长了, 在这里不宜介绍. 它以一个很特殊的方程, 即 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 的解的二阶导数的估计为基础. 这些估计中之一 (我们将用于解边值问题的那个估计), 断定如下的命题：如果 $u$ 是使 $f$ 属于 $C_\alpha(0 < \alpha < 1)$ 的那个域上方程 $\Delta u = f$ 的一个解, 那么 $u$ 在每个闭子域上属于 $C_{2+\alpha}$. 这个关于 Poisson 方程的命题可由 4.1 中 (21a) 所给出的诸二阶导数的积分表达式推导出来, 在这些积分表达式中使用了 Laplace 方程的基本解 (在 4.1.2 中只证明了当 $f$ 属于 $C_\alpha$ 时, 4.1 的 (14) 所给出的函数 $u$ 在每个闭子域上属于 $C_2$).

为了求解边值问题, 我们也使用 O. D. Kellogg 提供的关于调和函数的一个定理①：

设 $u$ 是定义在光滑域 $G$ 上且具有光滑边界值的调和函数, 则 $u$ 属于 $C_{2+\alpha}$.

在求解边值问题之前, 要注意到当 (1) 中的 $c \leqslant 0$ 时, 4.6 中的估计 (13) 成立, 且 Schauder 估计 (4) 和 (5) 可写作

$$\widehat{\|u\|}_{2+\alpha} \leqslant K'(\widehat{\|f\|}_\alpha + \|\phi\|'_0), \tag{4a}$$

$$\widehat{\|u\|}_{2+\alpha} \leqslant K'_1(\widehat{\|f\|}_\alpha + \|\phi\|'_{2+\alpha}), \tag{5a}$$

其中 $K'$ 和 $K'_1$ 是只依赖于 $m$, $\alpha$, $M$ 和 $G$ 的直径的常数.

### 4.7.2 边值问题的解

现在讲述求解方程 (1) 的边值问题的 Schauder 方法, 方程 (1) 满足 $c \leqslant 0$ 且系数满足条件 (a), (b), (c) 或 (2) 和 (3). 先假定有界域 $G$ 及边界值 $\phi$ 都是光滑的且 $f$ 属于 $C_\alpha$, 那么就得到如下的定理.

**定理**：方程 (1) 有唯一的解 $u$ 属于 $C_{2+\alpha}$ 且边界值为 $\phi$.

为了证明这个定理, 只要设 $\phi \equiv 0$ 就行. 因为在光滑性的假定下, 肯定存在一个函数 $\bar{\phi}$ 属于 $C_{2+\alpha}$ 且在 $\Gamma$ 上具有边界值 $\phi$. 于是函数 $u - \bar{\phi}$ 在 $\Gamma$ 上为 0 而且是方程 $L[u] = f - L[\bar{\phi}]$ 的解. 我们的目的是要分几步来证明：给定的算子 $L$ 是可以反演的.

用连续法来求解. 作一个单参数的椭圆型算子族

$$L_t[u] \equiv tL[u] + (1-t)\Delta u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

① 参考 O. D. Kellogg[2].

其中 $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$. 我们将证明, 所有的 $L_t$ 以及特殊情形 $L_1$ 都是可以反演的. 令 $T$ 表示在单位区间内使 $L_t$ 有逆算子的那些 $t$ 值所成的集合. 将通过证明下列三点：

1) $T$ 包含 $t = 0$;

2) $T$ 是单位区间内的开集, 即对于 $T$ 内的每个 $t_0$, 存在一个 $\varepsilon(t_0) > 0$, 使得满足 $|t - t_0| < \varepsilon(t_0)$ 的每个 $t$ (单位区间内的) 都在 $T$ 内;

3) $T$ 是闭集;

而证明 $T$ 就是整个单位区间. 只要上面三点得到验证这个结论就立即得出. 因为这时 $T$ 在区间内是非空集, 而且既是开集又是闭集, 所以它是整个区间.

要证明 1), 必须证明 $\Delta u = f$ 有一个在 $G + \varGamma$ 上连续, 在 $\varGamma$ 上为 0, 且属于 $C_{2+\alpha}$ 的解. 将 $f$ 延拓到这样一个球 $S$ 上, 这个球将 $G + \varGamma$ 包含在它内部, 使得 $f$ 在 $S$ 上属于 $C_\alpha$. 在 4.1.2 中, 我们在 $S$ 上作过 $\Delta u = f$ 的一个特解 $v$, 它是用 4.1 中的积分 (14) 给出的. 根据 4.7.1 可知, 这个解在 $S$ 的每个闭子域上, 特别是 $G+\varGamma$ 上, 是属于 $C_{2+\alpha}$ 的. 由此得到它在 $\varGamma$ 上的值是光滑的 (在本小节之前所规定的意义下的光滑性). 设 $w$ 是 $G$ 上的这样一个调和函数, 它在 $\varGamma$ 上等于 $v$. 根据 4.7.1 的 O. D. Kellogg 定理, $w$ 在 $G$ 上是属于 $C_{2+\alpha}$ 的. 所以函数 $u = v - w$ 就是所求的解.

在证明 2) 与 3) 之前, 要注意到, 由于 (a), (b), (c) 的假定, 并由于 $L_t$ 的形式得知, 存在常数 $m_1$, $M_1$, $\alpha$ 使得 $L_t$ 的系数对一切 $t$ 满足条件 (a), (b), (c)(这里 (a), (b), (c) 中的常数 $m$, $M$ 已经替换成 $m_1$, $M_1$ 了). 由估计式 (5a) 得知, 存在一个常数 $K_2$ 使得所求的 $L_t[u] = f$ 的解 $u_t$(对任何 $t$) 满足

$$\|u_t\|_{2+\alpha} \leqslant K_2 \|f\|_\alpha. \tag{6}$$

接着证明 2). 设 $t_0$ 属于 $T$, 并设 $f$ 是 $C_\alpha$ 中的任何函数. 当 $t$ 足够接近 $t_0$ 时, 想要求出方程

$$L_t[u] = f$$

的在边界上为 0 且属于 $C_{2+\alpha}$ 的解 $u$. 这个方程可写作

$$L_{t_0}[u] = L_{t_0}[u] - L_t[u] + f$$

或

$$L_{t_0}[u] = (t - t_0)(\Delta u - L[u]) + f.$$

将 $C_{2+\alpha}$ 中的任一函数 $u$ 代入右边的式子就得到 $C_\alpha$ 中的一个函数 $F$. 由于 $t_0$ 属于 $T$, 故存在一个属于 $C_{2+\alpha}$ 的函数 $v$, 满足

$$L_{t_0}[v] = (t - t_0)(\Delta u - L[u]) + f \equiv F,$$

且在边界上有 $v=0$. 可将 $v$ 看做是对 $u$ 作一个非齐次线性变换而定出的函数：

$$v=A(u).$$

经过迭代可找到这个变换的“不动点”, 即函数 $u$, 使得

$$u=A(u).$$

依靠假设 (b) 和 (c), 容易算出不等式

$$\widehat{\|F\|}_\alpha \leqslant K_3|t-t_0|\|u\|_{2+\alpha}+\|f\|_\alpha,$$

其中 $K_3$ 是与 $u$ 无关的固定的常数. 应用先验估计 (6), 得

$$\|v\|_{2+\alpha} \leqslant K_2K_3|t-t_0|\|u\|_{2+\alpha}+K_2\|f\|_\alpha. \tag{7}$$

由此推知, 不等式 $\|u\|_{2+\alpha} \leqslant 2K_2\|f\|_\alpha$ 就意味着

$$\|A(u)\|_{2+\alpha}=\|v\|_{2+\alpha} \leqslant 2K_2\|f\|_\alpha,$$

只要 $2K_2K_3|t-t_0| \leqslant 1$.

另外, 若令 $v_1=A(u_1),\ v_2=A(u_2)$, 则 $v_1-v_2$ 是

$$L_{t_0}[v_1-v_2]=(t-t_0)(\Delta(u_1-u_2)-L[u_1-u_2])$$

的解, 它在边界上具有 0 值. 当 $2K_2K_3|t-t_0| \leqslant 1$ 时, 利用估计 (7) 得到

$$\begin{aligned}\|v_1-v_2\|_{2+\alpha} &\leqslant K_2K_3|t-t_0|\|u_1-u_2\|_{2+\alpha}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_{2+\alpha}.\end{aligned} \tag{8}$$

如果取 $t$ 如此接近 $t_0$ 使得 $2K_2K_3|t-t_0| \leqslant 1$, 那么变换 $A(u)$ 就把满足 $\|u\|_{2+\alpha} \leqslant 2K_2\|f\|_\alpha$ 的函数集映射为它自己, 并由 (8) 得知此变换是收缩的.

如果从这个集合中的某个函数 $u_{(0)}$ 开始, 并规定

$$u_{(i+1)}=A(u_{(i)}) \quad (i=0,1,\cdots),$$

那么 $u_{(i)}$ 一致收敛于 $C_{2+\alpha}$ 中满足

$$u=A(u)$$

的函数 $u$. 于是 $u$ 是方程 $L_t[u]=f$ 的解, 此解在边界上具有 0 值. 因此区间 $|t-t_0| \leqslant \dfrac{1}{2K_2K_3}$ 属于 $T$, 且 $T$ 是开集.

为了证明 3), 令 $t$ 是 $T$ 中序列 $\{t_i\}$ 的极限点并考虑 $C_\alpha$ 中任一函数 $f$. 对应于此序列, 在 $C_{2+\alpha}$ 中有解的序列 $\{u_i\}$, 使得

$$L_t[u_{(i)}]=f,$$

且在 $\Gamma$ 上有 $u_{(i)} = 0$. 应用估计 (6), 得

$$\|u_{(i)}\|_{2+\alpha} \leqslant K_2 \|f\|_\alpha.$$

于是, $u_{(i)}$ 及其一阶和二阶导数在 $G + \Gamma$ 上是同等连续的. 选取一个子序列, 仍用 $u_{(i)}$ 表示, 这个子序列收敛于 $u$, 同时它的一阶和二阶导数分别收敛于 $u$ 的一阶和二阶导数, 收敛性在每个闭子域上是一致的. 显然, $u$ 属于 $C_{2+\alpha}$ 且满足方程

$$L_t[u] = f,$$

且在 $\Gamma$ 上 $u = 0$. 于是 $u$ 就是所要求的 $L_t$ 的解, 且 $t$ 属于 $T$. 这就完成了定理的证明.

利用这个定理以及内部估计, 可在下述较弱的条件下解方程 (1).

**定理:** 如果有界域 $G$ 是光滑的, $f$ 属于 $\hat{C}_\alpha$ 且边界值 $\phi$ 是连续的, 那么方程(1) 有唯一的解 $u$, 且 $u$ 属于 $\hat{G}_{2+\alpha}$.

为了证明这个定理, 我们用三次可微函数 $\phi_n$ 和可微函数 $f_n$(范数 $\|\widehat{f_n}\|$ 是一致有界的) 来一致逼近 $\phi$ 和 $f$. 根据前面的定理, 在 $C_{2+\alpha}$ 中存在

$$L[u_n] = f_n$$

的解 $u_n$, 在 $\Gamma$ 上有 $u_n = \phi_n$. 将 4.6 的不等式 (13) 应用于 $u_n - u_m$, 可看出 $u_n$ 一致收敛于连续函数 $u$. 由内部估计 (4a) 得知范数 $\widehat{\|u_n\|}_{2+\alpha}$ 是一致有界的, 因此, $u$ 属于 $\hat{C}_{2+\alpha}$ 且其导数是 $u_n$ 的一个适当的子序列的导数的极限 (在闭子域上是一致收敛的). 函数 $u$ 就是所求的解.

借助于内部估计, 可在更广泛的一类不光滑的域上来解边值问题. 设 $G$ 是一个有界域, 它可表示为光滑域的序列 $G_n$ 的并集, 这里每个 $G_n$ 都包含在后面一个 $G_{n+1}$ 之中且具有边界 $\Gamma_n$. 假定对于 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上的每个点 $Q$ 都存在一个"强闸函数", 即存在一个函数 $w'_Q$, 它在 $G$ 上是二次连续可微的, 在 $G + \Gamma$ 上连续且非负, 仅在 $Q$ 点为 0, 且满足

$$L[w_Q] \leqslant -1$$

(在下一小节中将对某类域构造这种函数). 现在可以叙述如下更一般的定理.

**定理:** 假设在刚才所说的那种域 $G$ 上, $f$ 属于 $\hat{C}_\alpha$, 且在 $G+\Gamma$ 上 $\phi$ 是连续函数, 那么方程 (1) 有唯一的属于 $\hat{C}_{2+\alpha}$ 的解 $u$, 它在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$.

证明: 根据前面的定理得知, 在 $G_n$ 上方程 $L[n] = f$ 有一个解 $u_n$, 它在 $\Gamma_n$ 上等于 $\phi$. 应用内部估计 (4a) 证出在 $G_n$ 上 $u_n$ 的范数 $\widehat{\|u_n\|}_{2+\alpha}$ 是一致有界的, 由此可知函数 $u_n$ 的一个子序列收敛 (在 $G$ 的每个闭子域上一致地收敛) 于函数 $u$, 这个 $u$ 在 $G$ 上具有有限的范数 $\widehat{\|u\|}_{2+\alpha}$ 且满足微分方程 $L[u] = f$. 现在若规定 $u$ 在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$, 剩下只需证明 $u$ 在 $G + \Gamma$ 上是连续的.

为此目的, 设 $Q$ 是 $\Gamma$ 上一点, $w_Q$ 是连带的强闸函数. 根据 $w_Q$ 的性质得知, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $k$, 使得

$$|\phi-\phi(Q)|\leqslant\varepsilon+kw_Q$$

在 $G+\Gamma$ 上成立. 若令

$$W=\varepsilon+k_1w_Q,$$

其中 $k_1=\max(k,\ \text{l.u.b.}|f-c\phi(Q)|)$, 则

$$|\phi-\phi(Q)|\leqslant W$$

在 $G+\Gamma$ 上成立. 再有

$$\begin{aligned}L[W]&=c\in+k_1L[w_Q]\\&\leqslant-\text{l.u.b.}|f-c\phi(Q)|,\end{aligned}$$

因为 $c\leqslant 0$, 且 $L[w_Q]\leqslant-1$.

根据 $W$ 的构造得知

$$W\pm(u_n-\phi(Q))\geqslant 0$$

在 $\Gamma_n$ 上成立, 且

$$L[W\pm(u_n-\phi(Q))]=L[W]\pm(f-c\phi(Q))\leqslant 0$$

在 $G_n$ 上成立. 将极大值原理用于 $W\pm(u_n-\phi(Q))$, 得知在 $G_n$ 上有

$$|u_n-\phi(Q)|\leqslant W,$$

取极限, 得

$$|u-\phi(Q)|\leqslant W$$

在 $G$ 上成立. 但是, 由 $w_Q$ 的连续性, 在 $Q$ 的某邻域内有 $W\leqslant 2\varepsilon$, 因此, $u$ 在 $Q$ 点连续. 又因 $Q$ 是任一边界点, 故 $u$ 在 $G+\Gamma$ 上连续, 定理证明完毕.

### 4.7.3 强闸函数及其应用

现在我们指出对边界点 $Q$ 如何构造强闸函数 $w_Q$, 以便完成边值问题的讨论. 所论点 $Q$ 是具有下述性质的: 存在一个闭球 $S_Q$, 它与 $G+\Gamma$ 的交集只是 $Q$ 一个点. 取 $S_Q$ 的中心为原点, 设 $R$ 是 $S_Q$ 的半径, 并令 $r$ 表示到 $S_Q$ 的中心的距离. 假定 (1) 所给出的算子 $L$ 是一致椭圆型的, 也就是满足 (a) 和 (b) 的, 并假定 $c$ 是非正的.

令

$$w_Q=k_1(R^{-p}-r^{-p}),$$

这里 $k_1$ 及 $p$ 是正的常数. 显然 $w_Q$ 在 $G+\Gamma$ 上是非负的且仅在点 $Q$ 为零. 根据 (a) 和不等式 $c \leqslant 0$ 可直接算出

$$\begin{aligned} L[w_Q] &= k_1 p r^{-p-4}\left[-(p+2)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + r^2\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_i x_i)\right] + c w_Q \\ &\leqslant k_1 p r^{-p-2}\left[-(p+2)m + \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_i x_i)\right]. \end{aligned}$$

现在若选取足够大的 $p$, 然后选取足够大的 $k_1$, 则得到

$$L[w_Q] \leqslant -1.$$

因此, 适当地选取了 $k_1$ 及 $p$(只依赖于 $R$、$m$、$M$ 及 $G$) 之后, 函数 $w_Q$ 就具有强闸函数所应有的性质了.

应该指出①, 借助于强闸函数, 可将求解 Laplace 方程的 Perron 方法 (参考 4.4.5) 推广到求解 4.6 中的一般齐次椭圆型方程 (1a), 即

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = 0 \quad (c \leqslant 0)$$

的 Dirichlet 问题, 只要这个问题在小范围内是可解的, 即只要对足够小的球存在着具有任意连续边界值的解. 在此情形下, 可定义下调和 (上调和) 函数的类似函数: 如果对于 $G$ 内每个足够小的球 $C$, 连续函数 $u$ 满足 $u \leqslant (\geqslant) M_C[u]$, 那么 $u$ 是一个广义下调和 (上调和) 函数. 这里 $M_C[u]$ 在 $C$ 的外部等于 $u$, 在 $C$ 内, 它是 4.6 中方程 (1a) 的在 $C$ 的边界上等于 $u$ 的那个解. 借助于 4.6 中关于方程 (1a) 的 (由 4.6.4 中的推论所表示的那种形式的) 极大值原理, 容易把 4.4.5 中给出的关于下调和函数的性质 1)、2)、3) 推广到广义下调和函数上面去.

如果想要求出 4.6 中 (1a) 的具有给定的边界值 $\phi$ 的解 $u$, 定义适当的广义下函数 (上函数), 它们像那些广义下调和 (上调和) 函数一样, 在边界上不大于 (小于)$\phi$. 跟调和函数的情形一样, 所求的解 $u$ 就是所有下函数的上确界. 要想证明 $u$ 是 4.6 中 (1a) 的解, 必须对球内的解 $u$ 能得到一个关于一阶导数在更小的同心球内的估计, 这种估计只依赖于解的界限和球. 也必须断定 4.6 中 (1a) 的诸解的一致极限是一个解 (参考 4.4.5). 对于具有 Hölder 连续系数的函数来说, 由 Schauder 的内部估计就得出这些结论. 要证明 $u$ 在边界上等于 $\phi$ 就要利用强闸函数.

强闸函数也可用来估计 (1) 的在边界上为 0 的那些解在边界点上的一阶导数.

① 这个说明是 P. D. Lax 提供的. 也可参阅 G. Tautz[1] 和 E. F. Beckeubach, 还有 L. K. Jackson[1], N. Simouoff[1] 也利用了 Perron 方法的一种修改形式去解二阶非线性椭圆型方程, 这个方程是在这样的假设之下：对于小区域可求得一个具有预先给定的连续边界值的解.

**引理**: 设 $u$ 是当 $c \leqslant 0$ 时

$$L[u] = f \tag{1a}$$

的解, 这里 $L$ 是一致椭圆型的, 即满足 (a) 和 (b) 的. 假定 $u$ 及其一阶导数在 $G+\Gamma$ 上连续且 $u$ 在 $\Gamma$ 上为 0. 再假定域 $G$ 是有界的, 在边界上有连续转动的切平面, 且具有如下的性质: 存在一个正的常数 $R$, 使得对边界 $\Gamma$ 上每个点 $Q$ 有一个半径为 $R$ 的闭球, 它与 $G+\Gamma$ 的交集只是 $Q$ 一个点. 那么在每个边界点处有

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant k_2 \text{l.u.b.}|f| \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{9}$$

这里 $k_2$ 是只依赖于 $m$, $M$ 和 $G$ 的常数.

证明: 设 $Q$ 是任一边界点. 因 $u$ 在 $\Gamma$ 上为 0 且因

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|,$$

所以只要估计在 $Q$ 处的内法向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 就够了. 设 $w_Q$ 是如上构造出的强闸函数, 根据构造过程可知, 对于只依赖 $m$, $M$ 和 $G$, 而不依赖边界点 $Q$ 的选取的某个常数 $k_2$, 在 $Q$ 处有

$$\left|\frac{\partial w_Q}{\partial n}\right| \leqslant k_2.$$

令 $v = w_Q \text{l.u.b.}|f|$, 显然

$$L[v \pm u] \leqslant 0.$$

因 $u$ 在边界上为 0, 应用极大值原理于 $v \pm u$, 得知在 $G$ 上有

$$|u| \leqslant v.$$

$u$ 和 $v$ 二者都在 $Q$ 点等于 0, 因此在这点处有

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leqslant \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \leqslant k_2 \text{l.u.b.}|f|,$$

由此立即得到不等式 (9).

### 4.7.4 $L[u] = f$ 的解的某些性质

这里假定 $f$ 属于 $C_\alpha$, 且假定本节开头的条件 (a), (b), (c) 在 $G$ 上成立. 对于任何有关 $G$ 的闭子域上的解的命题, 上述要求只在每个闭子域上成立.

先推导如下的性质: 若 $u$ 是方程 (1) 的一个二次连续可微的解, 则 $u$ 的二阶导数在 $G$ 的每个闭子域上是 Hölder 连续的.

这个结论只要在位于 $G$ 内的诸球上成立就行了. 在 $G$ 内的一个闭球 $S$ 上, 把方程 (1) 写成

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = f - cu.$$

根据前面的定理, 方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = f - cu$$

在 $S$ 上有一个解 $v$, 这个解在边界上等于 $u$. 再者, $v$ 的二阶导数在任何更小的同心球上满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件. 但方程对 $v$ 的解是唯一的, 因此 $u \equiv v$, 从而得到 $u$ 的二阶导数的 Hölder 连续性. 从现在起假定所有的解都具有这个性质. 利用内部估计式 (4), 立即得到与 4.2.3 中调和函数的列紧性定理相似的定理.

方程 (1) 在 $G$ 上的解的任何一致有界集都有在 $G$ 的每个闭子域 $B$ 上一致收敛于某个解的子序列.

并且, (1) 的解的一致极限也是一个解.

还可对方程 (1a) 的解作些推论. 在此情形下内部估计式 (4a) 是成立的. 因此得到与调和函数的 Weierstrass 收敛定理 (参考 4.2.3) 相似的定理：

(1a) 的在 $G$ 的闭包上连续且具有一致收敛的边界值 $\phi_n$ 的解 $u_n$ 的序列, 一致收敛于边界值为 $\phi = \lim \phi_n$ 的解 $u$.

这个定理是将估计 (4a) 应用于差式 $u_n - u_m$ 而得到的：

$$\|\widehat{u_n - u_m}\|_{2+\alpha} \leqslant K_0' \|\phi_n - \phi_m\|_0' \to 0.$$

也可用内部估计 (4) 将调和函数的一个基本性质推广到 (1) 的解上面去：方程 (1) 的每个解是无限次可微的, 只要 $f$ 和方程的系数是无限次可微的. 事实上, $f$ 和系数的解析性就包含着任何解的解析性, 不过, 在这里不去证明它 (见下小节的参考书).

证明一个精确形式的可微性定理①：

如果 $f$ 和系数都属于 $C_{m+\alpha}$, 其中 $m$ 是一个非负的整数且 $0 < \alpha < 1$, 那么对于每个闭子域 $B$, 任何二次可微的解 $u$ 都属于 $C^B_{m+2+\alpha}$.

对于 $m = 0$ 的情形已经证明过了. 现在给出 $m = 1$ 时的证明 (对于 $m > 1$, 可简单地重复这个论证). 设 $B'$ 和 $B''$ 是 $G$ 的闭子域, 在它们的内部分别包含着 $B$ 和 $B'$. 设 $h_0 > 0$ 是这样小的数, 使得对于 $h \leqslant h_0$ 和 $B'$ 内一切点 $P : (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 点 $P_h : (x_1 + h, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $B''$ 内. 由 $P_h$ 处的 (1) 减去 $P$ 处的 (1) 并除以 $h$. 然后把这些具有固定值 $h$ 的差商表示为

① 参考 E. Hopf[1], 那里对 $m = 0$ 的情形给出了定理的证明 (也给出了解析方程的解的解析性的证明) 而不用边值问题的存在定理. 也可参考 S. Agmon, A. Douglis, L. Nireuberg[1] 中的附录 5.

$$u^h = \frac{1}{h}(u(P_h) - u(P)), \quad a_{ik}^h = \frac{1}{h}(a_{ik}(P_h) - a_{ik}(P)),$$

$$b_i^h = \frac{1}{h}(b_i(P_h) - b_i(P)), \quad c^h = \frac{1}{h}(c(P_h) - c(P)),$$

$$f^h = \frac{1}{h}(f(P_h) - f(P)),$$

并将以原算子 $L$ 的这些差商为系数的算子表示为 $L^h$, 就可将最后得到的方程写作

$$L[u^h(P)] = -L^h[u(P_h)] + f^h \equiv F_h. \tag{10}$$

因为 $f$ 和系数都属于 $C_{1+\alpha}$, 它们的差商都可表示为积分, 例如,

$$a_{ik}^h = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} a_{ik}(P_{th})\mathrm{d}t,$$

这里 $P_{th}$ 是点 $(x_1 + th, x_2, \cdots, x_n)$, 所以, 它们属于 $C_\alpha^{B'}$. 且因解 $u$ 属于 $C_{2+\alpha}^{B''}$, 所以 $F_n$(它含有 $u$ 在 $B''$ 的点处的导数) 属于 $C_\alpha^{B'}$. 再有

$$\|F_h\|_\alpha^{B'} \leqslant K_4,$$

$K_4$ 是不依赖于 $h$ 的常数. 注意到 $u^h$ 是方程 (10) 的解, 当 $B$ 是 $B'$ 的闭子域时, 可应用内部估计 (4), 得到估计

$$\|u^h\|_{2+\alpha}^B \leqslant K_5,$$

$K_5$ 是不依赖于 $h$ 的常数.

由这个估计推出：存在一个序列 $\{h_n\} \to 0$, 对于这个序列来说, $\{u^{h_n}\}$, $\{u_i^{h_n}\}$, $\{u_{ik}^{h_n}\}$ 在 $B$ 上各自一致地收敛于函数 $v$ 和它的导数 $v_i$, $v_{ik}$. 并且, 函数 $v$ 属于 $C_{2+\alpha}^B$. 但是当 $h \to 0$ 时, $u^h$ 就收敛于 $u_{x_i}$, 所以, 证明了 $u_{x_i}$ 属于 $C_{2+\alpha}^B$. 仿此, 可以证明 $u_{x_i}$ 属于 $C_{2+\alpha}^B(i = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $u$ 属于 $C_{3+\alpha}^B$.

容易把这个方法用于一般的非线性二阶方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_1, u_2, \cdots, u_{nn}) = 0,$$

它是椭圆型的, 就是说, 二次型

$$\sum_{i,k=1}^n F_{u_{ik}} \xi_i \xi_k$$

处处是正定的. 再者, 如果使用线性椭圆型方程解的可微性定理, 那么容易证明, 非线性方程的任何属于 $C_{2+\alpha}(0 < \alpha < 1)$ 的解 $u$ 是无限次可微的, 只要 $F$ 对它的所有变量都有一切阶的导数. 事实上, 已经证明了即使 $u$ 属于 $C_2$, 命题也是成立的①. 还有, 当 $F$ 是解析的时候, 解也是解析的 (参阅下一小节).

① 参考 L. NirenBerg[3] 和 [1]. 也可参考 C. B. Morrey[4].

### 4.7.5　关于椭圆型方程的进一步的结果. 在边界上的性态

在前小节中, 借助于 Schauder 不等式, 证明了当二阶椭圆型方程的系数足够光滑且在一开头就假定了解的某种光滑性时, 这方程就具有强的光滑性.

从 S. Bernstein 对二阶方程的经典而基本的著作①起, 许多数学家研究了微分方程解的可微性和解析性问题. E. Hopf 的论文②对后来的工作有很大的影响. 在这篇论文中, E. Hopf 使用一种“参助函数”(parametrix) 得到了解的导数的积分表达式. (parametrix 是一种近似微分方程的基本解, 这种微分方程只有二阶项, 它们的系数等于给定的方程在某固定点的相应的系数.)在非线性方程解的解析性的证明中, 这些表达式被推广到自变量为复值的情况.

C. B. Morrey③证明了任意阶的一般非线性椭圆型方程解的解析性, 也运用了推广到复数域的积分公式. 他还证明了这种方程 (假定已给的那些东西都是解析的) 的 Dirichlet 问题的解在边界上的解析性. A. Friedman④对解 $u$ 的一切导数进行估计, 得到了相似的结果, 并证明了 $u$ 的 Taylor 级数收敛于 $u$.

上面提到的解析性的证明都是在开头假定了解具有某种程度的光滑性. 对于任意阶的线性椭圆型方程来说, 已经对广泛的一类边界条件在稍加限制的情况下证明了解在边界上的可微性. 特别指出 L. Nirenberg⑤作为进一步的参考. 对于非线性方程在减弱可微性方面, 还待进行工作. 对于两个自变量的情形, G. B. Morrey⑥已经着手这方面的许多工作. 对于高维的情形, 已于新近出现在 E. de Giorgi⑦、J. Nash⑧和 J. Moser⑨等人的论文中, 还要提到 E. Heinz⑩对于 Monge-Ampère 方程的有趣的工作, 他把 H. Lewy(参考 Heinz 的论文) 的结果推广到非解析方程.

对于一般类型的方程, L. Hörmander⑪已经指出, 对于一切常系数的微分算子 $L$ 来说, 只要 $f$ 是 $L[u] = f$ 的解, 则 $u$ 也是无限次可微的. 对于变系数的线性方程, Hörmander⑫和 B. Malgrange⑬两人都推广了这一特性.

现在转到满足微分边界条件的微分方程的解在边界上的正则性问题. Hörman-

① 参考 S. Bernstein[1].
② 参考 E. Hopf[4].
③ 参考 C. B. Morrey[2].
④ 参考 A. Friedman[1].
⑤ 参考 L. Nirenberg[2].
⑥ 参考 G. B. Morrey[3] 和 [1].
⑦ 参考 E. de Giorgi[1].
⑧ 参考 J. Nash[1].
⑨ 参考 J. Moser[1].
⑩ 参考 E. Heinz[2].
⑪ 参考 L. Hörmander[4].
⑫ 参考 L. Hörmander[2].
⑬ 参考 B. Malgrange[2].

der①研究了在半空间的常系数微分方程 $L[u]=f$ 的解, 这方程在平面边界上满足微分边界条件 (也是常系数的). 他论述了具有如下性质的那些算子和边界条件, 即当给定的函数 ($f$ 以及作用于 $u$ 的各边界算子的值) 是无限次可微时, 解在边界上是无限次可微的. 至于变系数线性椭圆型方程的满足边界条件的解在边界上的可微性, 已经对广泛的一类边界条件作了证明. 对于 Dirichlet 边界条件的情形, 在 L. Nirenberg②的著作中讲解得很清楚.

在某些所谓“自由边界”问题中, 当设置了给定的边界条件时, 问题的一部分是要确定某种椭圆型方程的解的存在域. 这些问题是气体动力学以及水波理论中产生的. 因此不仅要证明解在未知的边界上是解析的, 还要证明边界也是解析的. 这方面的基本工作应归功于 H. Lewy③.

我们来阐明如何将前小节的可微性定理推广到 Dirichlet 问题的解在边界上的可微性, 用以结束本小节. 因为它是局部的状态问题, 假定边界的一部分 $\Gamma_1$ 位于平面 (如 $x_n=0$) 内, 并在 $\Gamma_1$ 上及 $\Gamma_1$ 的邻近 (假定它是 $x_n=0$ 内的一个开域) 建立解的可微性. 对于“光滑的”边界来说, 作一个局部的变量变换, 这种情形就能实现. 减去一个适当的函数就可假定 $u$ 在 $\Gamma_1$ 上为零.

设 $\Gamma_1$ 在域 $G$ 的边界上, 现在在 $G$ 上来研究 (1) 的二次连续可微的解. 假定 4.7 开头的条件 (a), (b), (c) 都被满足, 且 $u$ 在 $G+\Gamma_1$ 上属于 $C_{1+\alpha}$, 在 $\Gamma_1$ 上为 0. 那么就有如下的定理：

如果 $f$ 和各个系数都属于 $C_{m+\alpha}$, $m$ 是非负的整数, 且 $0<\alpha<1$, 那么对于每个闭包属于 $G+\Gamma_1$ 的有界子域 $B$, $u$ 都属于 $C_{m+2+\alpha}$.

由于这种情形, 我们首先注意到只要局部地, 即对小的 $B$, 证明定理就行了, 例如 $B$ 是中心在 $\Gamma_1$ 上的小的半球. 然后也可假定系数 $c$ 为 0, 这可将 $u$ 除以 $B$ 内的齐次方程的一个正解就能达到. 有一个 $G$ 的子域 $A$, 具有光滑边界, 将 $B$ 的闭包包含于它的内部, 而它的闭包又在 $G+\Gamma_1$ 内. 设 $\zeta$ 是定义在 $G$ 的子域 $A$ 上的无限次可微函数, 它在 $B$ 上等于 1, 且在 $A$ 的边界点处连同它的各阶导数都为 0.

先就 $m=0$ 的情形来证明定理. 令 $v=\zeta u$, 容易看出 $L[v]$ 在 $A$ 的闭包上属于 $C_\alpha$. 使用基本的存在定理和唯一性定理, 得知 $v$ 属于 $C^A_{2+\alpha}$, 所以 $u$ 属于 $C^B_{2+\alpha}$. 现在概述 $m=1$ 情形下的证明. 仿照第 271 页上定理的证明, 考虑差商 $u^h$, 在平行于首 $n-1$ 个轴的方向, 即平行于含 $\Gamma_1$ 的平面的那个方向上取差分. $u^h$ 满足

$$L[u^h(P)]=-L^h[u(P_h)]+f^h.$$

令 $v_h=\zeta u^h$, 容易看出, $\|L[v_h]\|^A_{2+\alpha}$ 以一个不依赖 $h$ 的常数为界, 从而得知函数

① 参考 L. Hörmander[3].
② 参考 L. Nirenberg[6].
③ 参考 H. Lewy[2], 也可参考 P. Carabedian, H. Lewy and M. Schiffer[1].

$u_{x_i}(i=1,\cdots,n-1)$ 属于 $C^B_{2+\alpha}$. 因此, $u$ 的一切形如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(i<n,\ j\leqslant n)$ 的导数属于 $C^B_{1+\alpha}$. 借助于微分方程, 可将导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 用上面那些导数以及更低阶的导数表示出来, 因此, 它也属于 $C^B_{1+\alpha}$. 于是 $u\in C^B_{3+\alpha}$. 对于 $m>1$ 的情形, 这个论证也适用.

仿此, 我们可以证明非线性方程 $F=0$ 在边界上为 0 的解 $u$ 的任意次可微性, 只要 $u$ 属于 $C_{2+\alpha}$ 而且边界及 $F$ 都是足够光滑的. 在这方面的一般结果可参考 Agmon, A. Douglis 和 L. Nirenberg①的论文.

## 4.8 Beltrami 方程的解

在第 3 章 3.1.1 中, 曾经指出, 用变换 $\sigma(x,y),\ \rho(x,y)$ 将任何椭圆型方程

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+\cdots=0$$

局部地简化为

$$u_{\sigma\sigma}+u_{\rho\rho}+\cdots=0$$

的问题, 相当于求 Beltrami 方程

$$\sigma_x=\frac{b\rho_x+c\rho_y}{\sqrt{ac-b^2}},\quad -\sigma_y=\frac{a\rho_x+b\rho_y}{\sqrt{ac-b^2}} \tag{1}$$

$(\sigma_x\rho_y-\sigma_y\rho_x\neq 0)$ 的解. 本节中我们在函数 $a,\ b,\ c$ 满足指数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 Hölder 条件的假定下来作出这样一个解②.

对于任何 $x,\ y$ 的可微复值函数 $w(z)(z=x+\mathrm{i}y)$ 引入形式的微分算子

$$\frac{\partial w}{\partial z}\equiv w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\equiv w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

显然这两个微分算子是可交换的, 而且保持通常的微分法则:

$$\frac{\partial}{\partial z}(u(z)w(z))=uw_z+u_zw$$

且

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u(z)w(z))=uw_{\bar{z}}+u_{\bar{z}}w.$$

① 参考 S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg[1].

② 这个结果和证明的思路应归于 A. Korn 和 L. Lichtenstein. 这里所述是由 L. Bers 和 S. S. Chern 各自独立得到的. C. B. Morrey 证明了当 $\mu(x)$ 是可测函数, $|\mu|\leqslant\theta<1$ 时, Beltram 方程 (1) 或 (3) 可在更广泛的意义下解出. 参考 L. Ahlfors and L. Bers[1].

如果 $f$ 是 $w$ 的可微复值函数, 那么

$$[f(w(z))]_z = f_w w_z + f_{\bar{w}} \bar{w}_z$$

且

$$[f(w(z))]_{\bar{z}} = f_w w_{\bar{z}} + f_{\bar{w}} \bar{w}_{\bar{z}}.$$

Green 恒等式取如下形式:

$$\int\int (u_z + w_{\bar{z}}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}}{2} \oint (u\mathrm{d}\bar{z} - w\mathrm{d}z), \tag{2}$$

这里 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$ 而 $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$, 并且 Laplace 算子 $\Delta w$ 等于 $4w_{z\bar{z}}$. $w(z)$ 是 $z$ 的解析函数这一断言可用

$$w_{\bar{z}} = 0$$

表示出来.

现在考虑 Beltrami 方程 (1) 并令

$$w = \sigma + \mathrm{i}\rho.$$

可立即推出方程:

$$2w_{\bar{z}}\sqrt{ac-b^2} = (b - \mathrm{i}a + \mathrm{i}\sqrt{ac-b^2})\rho_x + (c - \mathrm{i}b - \sqrt{ac-b^2})\rho_y,$$

$$2w_z\sqrt{ac-b^2} = (b + \mathrm{i}a + \mathrm{i}\sqrt{ac-b^2})\rho_x + (c + \mathrm{i}b + \sqrt{ac-b^2})\rho_y.$$

经过简单的运算得知右边的系数 $\rho_x$ 和 $\rho_y$ 是成正比的, 而且得到

$$\frac{w_{\bar{z}}}{w_z} = \frac{c - a - 2\mathrm{i}b}{c + a + 2\sqrt{ac-b^2}}$$

或

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z, \quad \mu = \frac{c - a - 2\mathrm{i}b}{c + a + 2\sqrt{ac-b^2}}. \tag{3}$$

容易看出, (1) 可反过来由 (3) 推出, 所以 (1) 和 (3) 是等价的. 根据加给函数 $a$, $b$, $c$ 的条件以及函数 $\mu$ 的绝对值是小于 1 的, 得知 $\mu$ 是 Hölder 连续的 (见 4.1.2).

为了证明只要在问题中的诸点处解出方程 (3) 的一个满足 $w_z \neq 0$ 的解 $w$ 就行, 把条件 $\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x \neq 0$ 用 $w = \sigma + \mathrm{i}\rho$ 来叙述. 注意到

$$\sigma_x\rho_y - \sigma_y\rho_x = \frac{a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2}{\sqrt{ac-b^2}},$$

所以上述条件等价于 $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \rho_x^2 + \rho_y^2 \neq 0$, 对于 (3) 的解来说, 它可以表示为

$$w_z \neq 0.$$

Beltrami 方程的形式 (3) 意味着这个方程组有非常特殊的性质. 首先注意：如果 $f$ 是一个解析函数而 $w$ 是一个解, 那么 $f(w(z))$ 也是一个解, 因为

$$f_{\bar{z}} - \mu f_z = f_w(w_{\bar{z}} - \mu w_z) = 0.$$

反之, 如果 $w$ 是 (3) 的一个特解, 它将 $z$ 平面的域 $G$ 一一连续地映射为 $w$ 平面的域 $G'$, 而且在此域上 $w_z \neq 0$, 那么 (3) 在 $G$ 上的任何别的解 $v$ 在 $G'$ 上是 $w$ 的解析函数. 因为由 (3) 得到

$$0 = v_{\bar{z}} - \mu v_z = v_w(w_{\bar{z}} - \mu w_z) + v_{\bar{w}}(\bar{w}_{\bar{z}} - \mu \bar{w}_z) = v_{\bar{w}}\bar{w}_{\bar{z}}(1 - |\mu|^2),$$

所以 $v_{\bar{w}} = 0$.

因此, 如果有一个特解 $w$, 它具有所需要的映射性质, 那么, 寻求一个满足其他条件 (例如在边界上的条件) 的解的问题, 就化为求一个满足某种与这些相应的条件的解析函数 $f(w)$ 的问题. 例如, 要在 $G$ 的一个圆 $S$ 上求 (3) 的解, 使这个解在边界上具有给定的实部, 且在特别点 $P$ 处具有给定的值, 这个问题就化为如下的问题：即在 $S$ 的象 $S'$ 上求一个解析函数, 使它在边界上具有给定的实部, 且在 $P'$ 处具有给定的值. 所以, 可以认为这个问题解决了.

为了做出 (3) 的一个这样的特解, 它至少在一个小邻域内具备着所需的映射性质, 我们须建立如下的定理：

如果 $\mu(z)$ 在 $z = 0$ 的某个邻域内满足指数为 $\alpha$ 的Hölder条件且 $|\mu(z)| < 1$, 那么, 方程 (3) 在原点的邻域有一个解 $w(z)$, 使得 $w_z(0) \neq 0$ 且 $w(z)$ 的导数满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件.

只要在 $\mu(0) = 0$ 的假定之下来证明这定理就行了. 因为如果引入新变量 $\zeta = z + \mu(0)\bar{z}$, 那么

$$w_z = w_\zeta + w_{\bar{\zeta}}\overline{\mu(0)}, \quad w_{\bar{z}} = w_\zeta \mu(0) + w_{\bar{\zeta}},$$

方程 (3) 就变为

$$w_{\bar{\zeta}} = \hat{\mu}(\zeta) w_\zeta,$$

其中

$$\hat{\mu}(\zeta) = \frac{\mu(z) - \mu(0)}{1 - \overline{\mu(0)}\mu(z)}.$$

注意到当 $|\mu| < 1$ 时, 变换 $z \to \zeta$ 有一个正的函数行列式 (Jacobian) 且 $|\hat{\mu}| < 1$. 此外, $\hat{\mu}(\zeta)$ 满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件且 $\hat{\mu}(0) = 0$.

为了证明上述定理, 我们先研究方程 $u_{\bar{z}} = f$, 这里假定了 $f$ 是在圆 $S_r : |z| < r$ 上满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件的. 令

$$\pi v = \int\int_{S_r} f(\xi, \eta) \log|\zeta - z| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

并注意 $\Delta v = 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial\bar{z}\partial z} = f(\xi,\eta)$, 就得出了如下的引理.

**引理**: 函数

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta)$$

在 $S_r$ 内有如下形式的连续偏导数:

$$u_{\bar{z}}(z) = f(z), \quad u_z(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

因而 $u$ 是方程 $u_{\bar{z}} = f$ 的一个特解.

这个引理的证明留给读者, 它和 4.1.2 中第二个定理的证明相似. 在那里论证了 Hölder 连续质量分布的位势函数的可微性, 并且得到了导数的表达式.

**引理**: 在 $S_r$ 上, 设 $f(z)$ 满足具有指数 $\alpha$ 和系数 $H$ 的 Hölder 条件, 并令

$$p(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

那么存在一个只依赖于 $\alpha$ 的常数 $C$, 使得

$$|p(z)| \leqslant CHr^{\alpha}, \tag{4}$$

且 $p(z)$ 满足具有指数 $\alpha$ 和系数 $CH$ 的 Hölder 条件.

证明: 在 $p(z)$ 的表达式中的积分号下取绝对值并利用不等式

$$|f(\zeta) - f(z)| \leqslant H|\zeta - z|^{\alpha},$$

就导出 (4). 为了证明 $p(z)$ 的 Hölder 连续性, 设 $z_1$ 和 $z_3(\neq z_1)$ 是固定在 $S_r$ 内的, 并令 $\delta = |z_1 - z_3|$. 设 $z_2$ 是 $S_r$ 内满足 $|z_2 - z_1| \leqslant \delta$, $|z_2 - z_3| \leqslant \delta$ 和 $1 - |z_2| \geqslant \dfrac{\delta}{10}$ 的点, 我们将证明, 对于某个常数 $\tilde{C}_1$, 有

$$|p(z_i) - p(z_2)| \leqslant \tilde{C}H\delta^{\alpha} \quad (i = 1, 3),$$

由此就得到所需的不等式

$$|p(z_1) - p(z_3)| \leqslant 2\tilde{C}H\delta^{\alpha}.$$

现在只考虑 $i = 1$ 的情形:

$$p(z_1) - p(z_2) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} g(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{5}$$

其中

$$g(\zeta) \equiv \frac{f(z_1) - f(\zeta)}{(z_1 - \zeta)^2} - \frac{f(z_2) - f(\zeta)}{(z_2 - \zeta)^2}.$$

设 $\Delta_1$(以 $\Delta_1$ 表示其边界) 是 $S_r$ 与中心在 $z_1$ 半径为 $2\delta=2|z_1-z_2|$ 的圆的交集, 并用 $\Delta_2$ 表示 $\Delta_1$ 在 $S_r$ 内的余集, 那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_1}|g|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant&\frac{H}{\pi}\iint_{|\zeta-z_1|<2\delta}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|\zeta-z_1|^{2-\alpha}}\\&+\frac{H}{\pi}\iint_{|\zeta-z_2|<3\delta}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|\zeta-z_2|^{2-\alpha}}\leqslant C_1H\delta^{\alpha},\end{aligned}$$

这里 $C_1$ 是只依赖于 $\alpha$ 的常数. 为了估计 $g$ 在 $\Delta_2$ 上的积分, 先注意

$$\begin{aligned}g(\zeta)&=\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_2-\zeta)^2}+(f(z_1)-f(\zeta))\left[\frac{1}{(z_1-\zeta)^2}-\frac{1}{(z_2-\zeta)^2}\right]\\&\equiv\frac{f(z_1)-f(z_2)}{(z_2-\zeta)^2}+\frac{(f(z_1)-f(\zeta))(z_2-z_1)}{(z_1-\zeta)^3}\cdot\frac{z_1-\zeta}{z_2-\zeta}\left(1+\frac{z_1-\zeta}{z_2-\zeta}\right)\\&\equiv g_1(\zeta)+g_2(\zeta).\end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_2}g_1(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{1}{\pi}(f(z_1)-f(z_2))\iint_{\Delta_2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{(z_2-\zeta)^2}.$$

根据 Green 恒等式 (2) 并令 $u=\dfrac{1}{z_2-\zeta}$, $w=0$, 得到

$$\iint_{\Delta_2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{(z_2-\zeta)^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{|\zeta|=r}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{z_2-\zeta}-\frac{\mathrm{i}}{2}\oint_{\Delta_1}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{z_2-\zeta}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{\Delta_1}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{z_2-\zeta},$$

因为在 $|\zeta|=r$ 上的积分为 0. 因此

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_2}g_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right|\leqslant\frac{H}{2\pi}\delta^{\alpha}\oint_{\Delta_1}\frac{|\mathrm{d}\bar{\zeta}|}{|z_2-\zeta|}\leqslant C_2H\delta^{\alpha},\tag{6}$$

这里 $C_2$ 是个绝对常数, 因为当 $\zeta\in\Delta_1$ 时, $|z_2-\zeta|\geqslant\dfrac{\delta}{10}$.

最后注意到在 $\Delta_2$ 内

$$\left|\frac{z_1-\zeta}{z_2-\zeta}\right|\leqslant 2,$$

所以

$$|g_2(\zeta)|\leqslant\frac{6H\delta}{|z_1-\zeta|^{3-\alpha}}$$

且

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta_1}|g_2(\zeta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqslant\frac{6H\delta}{\pi}\iint_{|\zeta-z_1|>2\delta}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|z_1-\zeta|^{3-\alpha}}\leqslant C_3H\delta^{\alpha},$$

这里 $C_3$ 是只依赖于 $\alpha$ 的常数. 这个式子和 (5)、(6) 联合起来就得到所求的不等式

$$|p(z_1)-p(z_2)|\leqslant(C_1+C_2+C_3)H|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

现在证明定理. 假定 $w$ 是所求的解, 那么, 根据引理 1, $w_z$ 与

$$-\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{\mu(\zeta)w_z(\zeta)-\mu(z)w_z(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

相差一个解析函数. 取常数 1 作为这个解析函数, 进而解下列关于 $w_z$ 的方程:

$$w_z=-\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{\mu(\zeta)w_z(\zeta)-\mu(z)w_z(z)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+1.$$

本节末将证明容易解出 $w$, 且 $w$ 满足方程 (3).

设以 $C(r,\alpha)$ 表示定义于 $S_r$ 上且满足指数为 $\alpha<1$ 的 Hölder 条件的复值函数 $\omega(z)$ 的集合. 对属于 $C(r,\alpha)$ 的 $\omega$, 引入范数

$$\|\omega\|_r=\text{l.u.b.}|\omega(z)|+r^\alpha \underset{z_1\neq z_2}{\text{l.u.b.}}\frac{|\omega(z_1)-\omega(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha},$$

则 $C(r,\alpha)$ 是一个 Banach 空间. 容易看出, 对于 $C(r,\alpha)$ 中的 $\omega$ 和 $\tau$ 来说,

$$\|\omega\tau\|_r\leqslant\|\omega\|_r\|\tau\|_r.$$

现在令 $\mu(z)$ 是定义于 $S_r$ 上的已知函数, 它满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件, 并且

$$\mu(0)=0.$$

在 $C(r,\alpha)$ 上用

$$T[\omega]=-\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r}\frac{\mu(\zeta)\omega(\zeta)-\mu(z)\omega(z)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

定义算子 $T$. 显然, $T$ 是线性算子, 且根据引理 2, 有

$$\begin{aligned}\|T[\omega]\|_r&\leqslant Kr^\alpha r^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r+r^\alpha Kr^{-\alpha}\|\mu\omega\|_r\\&\leqslant 2K\|\mu\|_r\|\omega\|_r.\end{aligned}$$

由于 $\mu(0)=0$, 当 $r\to 0$ 时, 范数 $\|\mu\|_r$ 趋于 0. 所以, 对于适当小的 $r$, 就说 $r<r_0$ 吧, 有

$$2K\|\mu\|_r<\frac{1}{2},$$

于是当 $r<r_0$ 时, 得

$$\|T[\omega]\|_r<\frac{1}{2}\|\omega\|_r. \tag{7}$$

现在我们在半径 $r<r_0$ 的圆 $S_r$ 上来解方程

$$\omega=T[\omega]+1\equiv\hat{T}[\omega].$$

根据 (7), 变换 $\hat{T}$ 将 $C(r,\alpha)$ 中满足

$$\|\omega\|_r < 2$$

的函数类映射为它本身. 变换 $\hat{T}$ 是压缩的, 因为

$$\|\hat{T}[\omega_1] - \hat{T}[\omega_2]\|_r \leqslant \frac{1}{2}\|\omega_1 - \omega_2\|_r.$$

根据熟知的判别法, 用递推式

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{n+1} = T[\omega_n] + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

定义的函数 $\omega_n$, 依范数 $\| \ \|_r$ 收敛于满足

$$\omega = T[\omega] + 1$$

且 $\|\omega\|_r < 2$ 的函数 $\omega$. 再有

$$|\omega(z) - 1| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

所以在 $S_r$ 上 $\omega(z) \neq 0$.

下面证明了函数

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{S_r} \frac{\mu(\zeta)\omega(\zeta)}{(\zeta - z)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + z$$

具有所需的性质之后, 就完成了定理的证明. 根据引理 1, $w$ 具有由

$$w_{\bar{z}} = \mu\omega$$

给出的连续偏导数, 且

$$w_z = T[\omega] + 1 = \omega,$$

于是, $w$ 满足微分方程 (3) 且 $w_z \neq 0$. 由于 $\omega$ 属于 $C(r,\alpha)$, 所以 $w$ 的导数在 $S_r$ 上满足指数为 $\alpha$ 的 Hölder 条件.

## 4.9　关于一个特殊拟线性方程的边值问题. Leray 和 Schauder 的不动点法

在这一节中, 我们将阐述在证明存在定理时的一个拓扑方法的应用. “不动点法”源于 Poincaré的思想而为 G. D. Birkhoff 和 O. D. Kellogg 所阐明, 并由 Schauder 和 Leray[①] 发展成为有力的工具.

① 参考 G. D. Birkhoff and O. D. Kellogg[1] 和 J. Leray and J. Schauder[1].

我们不讲 Schauder 和 Leray 的一般理论, 而仅用其一个特殊的结论, 即

**Schauder的不动点定理**：*若 $T$ 是由 Banach 空间中一个闭的凸列紧集到自身的连续映射, 则 $T$ 有一个不动点.*

在 $4''.15$ 中有这定理的证明和“Banach 空间的凸列紧集”的定义.

在有界域 $G$ 上考虑拟线性椭圆型方程

$$A(x,y,z)z_{xx}+2B(x,y,z)z_{xy}+C(x,y,z)z_{yy}=0, \tag{1}$$

域 $G$ 的边界是由有限个不同的闭曲线 $T$ 组成的. 假定 $G$ 是光滑域 (像 4.7.1 中的一样) 且 $\phi$ 是定义在边界 $\Gamma$ 上的光滑函数. 这里 $G$ 和 $\phi$ 的光滑性可用 $\Gamma$ 上的弧长 $s$ 表出如下：函数 $x(s)$, $y(s)$ 描绘出一条边界曲线, 而函数 $\phi(s)$ 具有指数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 Hölder 连续的一阶及二阶导数. 对于具有某些性质 (列举于后) 的函数 $A$, $B$, $C$, 寻求 (1) 的在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$ 的解 $z(x,y)$. 根据最大值原理, 任何解都要满足不等式

$$|z|\leqslant \max|\phi|=M_0.$$

因此只考虑 $A$, $B$, $C$ 在 $G+\Gamma$ 上对 $(x,y)$ 是定义了的而且 $|z|\leqslant M_0$, 并规定有下列性质：

(a) 对一切实的 $\xi,\eta$, $A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2\geqslant m(\xi^2+\eta^2)$,

(b) $|A|$, $|B|$, $|C|\leqslant M$,

(c) $A$, $B$, $C$ 关于 $x$, $y$, $z$ 满足具有指数 $\alpha$ 及系数 $M$ 的 Hölder 条件. (这里 $m$, $M$, $\alpha$ 是几个固定的正的常数).

利用 4.7 中 Schauder 的线性椭圆型方程理论, 我们来证明下面的存在定理：

*在条件 (a), (b), (c) 以及对 $G$ 和 $\phi$ 所假定的条件下, 方程 (1) 有一个在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$ 的解 $z(x,y)$. 并且, $z$ 属于 $C_{2+\alpha}$(见 4.7.1).*

证明的基础在于对线性椭圆型方程

$$L[u]\equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=0 \tag{2}$$

在有界域 $G$ 上的解的一种先验估计, 域 $G$ 的边界是由有限个闭曲线组成的, 这些闭曲线都具有连续转动的切线. 此外, 再假定 $G$ 有如下的性质：对于某个正数 $R$ 和边界 $\Gamma$ 上的每个点 $Q$, 存在一个半径为 $R$ 的圆, 它与 $G+\Gamma$ 只有公共点 $Q$. 我们还假定系数 $a$, $b$, $c$ 在 $G$ 上是 Hölder 连续的而且方程是一致椭圆型的, 也就是, 对于某两个正的常数 $m$ 与 $M$, 不等式

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2\geqslant m(\xi^2+\eta^2), |a|, |b|, |c|\leqslant M \tag{3}$$

在 $G$ 上成立.

先验估计：令 $u$ 是 (2) 的一个解, 它和它的一阶导数在 $G+\Gamma$ 上都是连续的. 假定在 $G+\Gamma$ 上存在一个二次连续可微的函数 $\bar{u}$, 它在 $\Gamma$ 上等于 $u$, 它和它的一阶

导数在 $G+\Gamma$ 上是连续的, 并且它的一阶及二阶导数的绝对值以常数 $K$ 为界. 那么, 就存在一个只依赖于 $m$, $M$ 和 $G$(即不依赖于系数) 的常数 $k$, 使得在整个 $G$ 上有

$$|u_x|,\ |u_y| \leqslant kK. \tag{4}$$

我们将在本节的末尾建立这个先验估计.

要把这个一般的估计应用于我们的非线性方程, 首先要注意到, 根据对 $G$ 和 $\phi$ 所假定的光滑性, 不难造出一个在 $G+\Gamma$ 上连续的函数 $\bar{z}$, 它在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$, 它的一阶及二阶导数的绝对值以某个常数 $\bar{K}$ 为界并且各自在 $G+\Gamma$ 上及 $G$ 上是连续的. 然后, 如果注意到所要求的 (1) 的解 $z$ 就是具有 $a(x,y)=A(x,y,z(x,y))$ 等的形如 (2) 的线性方程的解, 那么, 由估计 (4) 就得出

$$|z_x|,\ |z_y| \leqslant k\bar{K}. \tag{5}$$

还要注意到, 如果函数 $z$ 在 $G+\Gamma$ 上有连续的一阶导数, 且导数的绝对值以 $k\bar{K}$ 为界, 那么它就对 $G+\Gamma$ 上的一切 $P$ 及 $Q$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|z(p)-z(Q)| \leqslant \kappa k\bar{K}|p-Q|,$$

其中 $\kappa$ 是只依赖于域 $G$ 的常数. 现在来证明上面所叙述的存在定理. 考虑 $G+\Gamma$ 上的连续函数 $z$ 所形成的 Banach 空间 $C_0$(见 4.7.1), $z$ 的范数是

$$\|z\| = \max|z|.$$

用 $S$ 表示 $C_0$ 中满足

$$|z| \leqslant \max|\phi|$$

及 Lipschitz 条件

$$\frac{|z(P)-z(Q)|}{|P-Q|} \leqslant \kappa k\bar{K} \quad (\text{对 } G+\Gamma \text{ 上所有的 } P \text{ 及 } Q) \tag{6}$$

的函数 $z$ 所成的子集. 容易看出 $S$ 是 $C_0$ 的列紧凸子集①.

有了这些准备之后, 我们来进行一种典型的迭代过程: 如果在 (1) 的系数 $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ 和 $C(x,y,z)$ 中对 $z$ 用一个属于 $S$ 的函数 $z(x,y)$ 代入, 那么 $A$, $B$, $C$ 就变成只是 $x,y$ 的函数 $a$, $b$, $c$ 了. 根据 $A$, $B$, $C$ 的 Hölder 连续性 (条件 (c)) 并根据 (6), 可知 $a$, $b$, $c$ 满足具有指数 $\alpha$ 并具有某个与函数 $z(x,y)$ 无关的确定系数的 Hölder 条件.

用这样的函数 $z(x,y)$ 代入之后, 我们来求关于函数 $u$ 的线性椭圆型方程

$$A(x,y,z(x,y))u_{xx}+2B(x,y,z(x,y))u_{xy}+C(x,y,z(x,y))u_{yy}=0$$

① 关于列紧凸子集的定义见 4″.15.

在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$ 的解. 由 4.7.2 的第一个定理得知这是可能的. 在这儿我们利用对 $G$ 和 $\phi$ 所假定的“光滑性”. 解 $u$ 是唯一的、属于 $C_{2+\alpha}$ 且满足 $|u| \leqslant \max|\phi|$. 根据先验估计, $u$ 满足 (5), 因而满足 (6), 所以 $u$ 在 $S$ 中. 因此, 这个被定义为线性问题的“解算子”的变换

$$u = T[z]$$

是到它自身 $S$ 的变换.

如果我们能够证明 $T$ 是连续变换, 那么根据 Schauder 的不动点定理, $T$ 就有一个不动点 $z$. 在这种情形下, $z$ 属于 $C_{2+\alpha}$ 而且是所求的方程 (1) 的解. 要想证明 $T$ 的连续性, 令 $\{z^{(n)}\}$ 是 $S$ 中的函数序列, 它一致地收敛于 $S$ 中的函数 $z$, 且令 $u^{(n)} = T[z^{(n)}]$. 函数 $u^{(n)}$ 是系数满足 (a), (b) 且满足与 $n$ 无关的一致 Hölder 条件的那些方程的解, 并有 $|u^{(n)}| \leqslant \max|\phi|$. 在闭域上利用 Schauder 估计, 推出范数 $\|u^{(n)}\|_{2+\alpha}$ 是一致有界的. 所以, 可选出 $u^{(n)}$ 的一个子序列, 这个子序列连同它的一阶及二阶导数分别收敛于一个函数 $u$ 以及 $u$ 的相应的导数. 但是, $u$ 满足极限微分方程

$$A(x,y,z(x,y))u_{xx} + 2B(x,y,z(x,y))u_{xy} + C(x,y,z(x,y))u_{yy} = 0,$$

且在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$, 也就是 $u = T[z]$. 因此, $u^{(n)}$ 的一个子序列收敛于 $T[z]$. 根据极限函数的唯一性, 得知原来的序列 $\{u^{(n)}\}$ 收敛于 $T[z]$, 于是推出了 $T$ 的连续性.

在本节的最后我们来推导先验估计 (4). 证明分为两部分. 首先证明函数 $u_x$ 和 $u_y$ 是在边界上达到它们的极大值和极小值的, 然后再证明不等式 (4) 对所有边界点成立, 因而可知 (4) 在整个 $G$ 上成立.

在方程 (2) 的系数是 Hölder 连续的假定下, 我们来导出对于 $u_x$ 和 $u_y$ 的一种极大值原理 (还有一种推导法, 在那里只需要方程的椭圆性 (3)). 为此, 只需考虑函数 $u_x$, 并且只要证明在 $G$ 内的任何圆 $D$ 上它的极大值都出现在边界上就行了 (然后就能推出 $u_x$ 的极小值也出现在边界上).

当 $u$ 有连续的三阶导数且系数 $a$, $b$, $c$ 可微分一次时, 用 $c$ 除 (2) 并对 $x$ 微分, 就会发现 $u_1 = u_x$ 满足椭圆型微分方程

$$\left(\frac{a}{c}u_{1x} + \frac{2b}{c}u_{1y}\right)_x + u_{1yy} = 0,$$

因此 4.6.4 的极大值原理可用于这个方程, 从而得到所要的结果.

若系数 $a$, $b$, $c$ 在圆 $D$ 上只是 Hölder 连续的, 我们可用满足一致 Hölder 条件的二次可微函数 $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ 来一致地逼近它们. 根据 Schauder 的线性方程理论, 方程

$$a^{(n)}u^{(n)}_{xx} + 2b^{(n)}u^{(n)}_{xy} + c^{(n)}u^{(n)}_{yy} = 0$$

在 $D$ 上将有解 $u^{(n)}$, 这些解在 $D$ 的边界上等于 $u$, 且在 $D$ 上 $u_n$ 一致地收敛于 $u$, 并且, 有 $u_x^{(n)} \to u_x$, $u_y^{(n)} \to u_y$. 因为 $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ 是二次可微的, 函数 $u^{(n)}$ 有连续的三阶导数 (见 4.7.4). 所以, 根据前一段可知 $\max u_x^{(n)}$ 出现在 $D$ 的边界上, 因而 $\max u_x$ 也出现在 $D$ 的边界上.

要证明 (4) 在边界上成立, 令 $w = u - \bar{u}$. 因为 $w$ 在 $\Gamma$ 上等于零且满足微分方程

$$L[w] = -L[\bar{u}] = f,$$

又因根据对 $\bar{u}$ 的假定可知

$$|f| \leqslant 3M\bar{K}, \tag{7}$$

所以函数 $w$ 和域 $G$ 满足在 4.7.3 末尾的引理中的全部条件. 从而得知在 $\Gamma$ 上有

$$|w_x|,\ |w_y| \leqslant 3k_2 M\bar{K},$$

其中 $k_2$ 是只依赖于 $m$, $M$ 和 $G$ 的常数. 于是在 $\Gamma$ 上有

$$\begin{aligned}|u_x|,\ |u_y| &\leqslant \bar{K} + 3k_2 M\bar{K}\\ &\leqslant (1 + 3Mk_2)\bar{K},\end{aligned}$$

这就是所要求的在边界上的不等式 (4).

## 4.10　用积分方程法解椭圆型微分方程

作为上节的补充, 这里简短地讲述一下椭圆型偏微分方程的一种不同的解法, 它推广和扩充了 4.4.3 中的积分方程法①.

本书中多处明显或不明显地提到泛函分析的一般论述, 从这些地方可以捉摸出积分方程的用处.

考虑线性椭圆型微分算子 $L[u] = f$, 并试图找出逆算子

$$u = R[f] = L^{-1}[f],$$

其中 $f$ 是在适当限制的函数空间中任意给定的 (例如 $f$ 在 $G + \Gamma$ 上连续) 且对 $u$ 指定了适当的边界条件 (例如, 在二阶算子 $L$ 的情形下 $u$ 在 $\Gamma$ 上等于 0).

现在微分算子 $L[u]$ 将一个函数变换为另一个函数, $L[u] = f$, 这个变换之后的函数往往具有较低阶的正则性, 例如, 将一个二次连续可微的函数变换为一个仅仅是连续的函数. 更确切地说, 这个算子将某个它所适用的函数空间 $S$ 变换为更广泛的函数空间 $S$. 反之, 逆变换 $L^{-1}[f]$ 将 $\tilde{S}$ 变换为子空间 $S$. 在此意义下 (就是 4.7

① 这个以“参助函数”概念为基础的方法, 是在 E. E. Levi[4] 上其后又在 D. Hilbert[1] 上发表的. 关于进一步的简化以及完整的结果和证明, 参考 F. John[1].

的建立在范数概念上的严格意义下), 它是一个光滑变换. 这种变换原则上是容易掌握的. 对我们来说, 是把光滑变换 $L^{-1}$ 用积分算子表示出来的解析技巧问题, 以便将求解 $u$ 引导到 Fredholm 理论的收敛过程 (参考卷 I 第 3 章).

### 4.10.1 特解的构造. 基本解. 参助函数

先考虑关于双自变量函数 $u(x,y)$ 的二阶线性微分方程的情形, 并假定微分方程的形式为

$$L[u] \equiv \Delta u + a u_x + b u_y + cu = f, \tag{1}$$

其中 $a$, $b$, $c$, $f$ 在 $G+\Gamma$ 上是连续可微的.

根据第 1 章 1.7.4 的 Cauchy-Kowalewski 存在定理, 对于解析的系数 $a$, $b$, $c$, (1) 在足够小的域 $G$ 上的解的存在问题已经有了肯定的回答. 不过, 在 $a$, $b$, $c$, $f$ 较少限制的假定下, 即使是 (1) 的一个特解的存在的证明也需要其他的方法, 例如, 下面 E. E. Levi 所介绍的就是方法之一.

考虑叫做“parametrix”的函数 (参助函数)

$$\psi(x,y;\xi,\eta) = -\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = -\log r, \tag{2}$$

这是 $x$, $y$ 和参变点 $(\xi,\eta)$ 的函数, 它在 $x=\xi$, $y=\eta$ 处具有由 $L[u]$ 的主部 $\Delta u$ 所显示出的特征奇异性. 这个参助函数不满足微分方程, 但 $L[\psi]$ 在 $x=\xi$, $y=\eta$ 处有关于 $\dfrac{1}{r}$ 的一阶奇异性.

采取任意的连续可微函数 $\rho(x,y)$, 积分

$$u = \int\int_G \psi(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{3}$$

以及更一般的式子

$$u = \omega(x,y) + \int\int_G \psi(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4}$$

不满足 (1), 如果选取 $\omega(x,y)$ 在 $G$ 上是三阶连续可微的而其他方面是任意的. 不过, 对于给定的 $\omega$, 适当地选择 $\rho$, 可以作出一个满足 (1) 的 $u$.

为了证明这点, 将 (4) 代入 (1). 由于对 $\rho$ 的可微性假设, 有 (参阅卷 I 第 5 章 5.14.5)

$$\Delta u = \Delta\omega - 2\pi\rho,$$

并且

$$L[u] = L[\omega] - 2\pi\rho + \int\int_G (a\psi_x + b\psi_y + c\psi)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

为简便计若令

$$K(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}(a\psi_x+b\psi_y+c\psi)$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\left[a(x,y)\frac{x-\xi}{r^2}+b(x,y)\frac{y-\eta}{r^2}+c(x,y)\log r\right] \tag{5}$$

以及

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi}(L[\omega]-f),$$

则得关于 $\rho$ 的积分方程

$$\rho(x,y)=\int\int_G K(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+g(x,y). \tag{6}$$

Fredholm 理论不能直接用于这个积分方程, 因为核 (5) 在点 $x=\xi,\ y=\eta$ 处像 $\frac{1}{r}$ 一样变为无穷, 从而不是平方可积的. 但是容易看出, 叠核

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\int\int_G K(x,y;s,t)K(s,t;\xi,\eta)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

是平方可积的. 所以先考虑叠 (累) 积分方程

$$\rho(x,y)=\int\int_G K_2(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+h(x,y), \tag{7}$$

其中

$$h=g+\int\int_G K(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

用以取代 (6). 对于这个方程可以使用 Fredholm 定理.

对应于 (7) 的齐次积分方程

$$\rho(x,y)=\int\int_G K_2(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{8}$$

能有一个解 $\rho$, 只要

$$\int\int_G\left[\int\int_G K_2^2(x,y;\xi,\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\geqslant 1,$$

这个解就不会恒等于 0. 所以, 如果将域 $G$ 取得足够小, 使得上式左边的积分小于 1, 那么 (8) 就只有 $\rho\equiv 0$ 的解.

函数 $g(x,y)=\frac{1}{2\pi}(L[\omega]-f)$ 在 $G$ 上是连续的而且是连续可微的, 所以函数 $h(x,y)$ 也同样, 因为 4.1.2 中对三个变量所证明的定理对两个变量也成立.

于是由 Fredholm 定理得知：对于足够小的域 $G$ 和任意的 $h$, 积分方程 (7) 有一个解. 这个解是连续可微的且满足原积分方程 (6). 事实上, 如果暂令

$$v = g + \int\int_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{6a}$$

那么 (7) 就是

$$\rho = \int\int_G K(v - g)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + h.$$

乘以 $K$ 并积分之后得到

$$v - g = \int\int_G K_2(v - g)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int\int_G Kh\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

或

$$v = \int\int_G K_2 v\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + h.$$

即 $v$ 也满足方程 (7), 且由于解的唯一性, 它也必定与 $\rho$ 重合. 因 $v = \rho$, 故 (6a) 恒等于积分方程 (6). 现在如将这个 $\rho(x, y)$ 用于 (4) 式

$$u = \omega(x, y) + \int\int_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

中, 则

$$L[u] = L[\omega] + 2\pi\left\{\int\int_G K\rho\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta - \rho\right\} = f,$$

即 $u$ 是 (1) 的解, 这个解在 $G$ 上有直到二阶的连续导数, 还依赖于任意函数 $\omega$. 于是在一个足够小的域 $G$ 上证明了微分方程的解的存在性.

特别是, 若令

$$\omega = -\log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

并围绕点 $(x_0, y_0)$ 选取一个足够小的域 $G^*$ 作为 $G$, 不过要用一个半径为 $\delta$ 的小圆盘将点 $(x_0, y_0)$ 排除在域 $G^*$ 之处, 根据上面的结果, 就得到 $G^*$ 上的解, 其形式如下：

$$u^*(x, y) = -\log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \int\int_{G^*} \psi(x, y; \xi, \eta)\rho^*(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

容易证明, 当 $\delta \to 0$ 时取极限, 函数 $\rho^*$ 收敛于函数 $\rho$, 使得

$$\int\int_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

在极限域 $G=\lim G^*$ 上具有直到二阶的连续导数, 那么函数

$$\gamma(x,y;x_0,y_0)=-\log\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\int\int_G\psi(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (9)$$

在 $G$ 上除点 $x=x_0,\ y=y_0$ 外, 处处满足方程 $L[\gamma]=f$. 又因 $\gamma-\log\frac{1}{r}$ 在 $G$ 上处处是正则的, 所以函数 $\gamma(x,y;x_0,y_0)$ 是方程 (1) 的基本解.

### 4.10.2　附注

这个方法的特殊困难在于所得积分方程的核是奇异的. 我们在这儿是采用了过渡到叠积分的办法来克服这个困难的, 更好的办法是把这个方法修改一下①, 以便得到一个较易于使用的方法. 可将上面的拟基本解 $\psi$ 换成另一个拟基本解 $\psi'(x,y;\xi,\eta)$, 这个函数使 $L[\psi']$ 在 $x=\xi,\ y=\eta$ 处具有阶数低于 $L[\psi]$ 的奇异性, 然后用 $\psi'$ 运算.

广义的拟基本解法可以扩展到任意个自变量和更高阶的线性微分方程以及方程组上面去.

关于边值问题解的详尽的以及再深入一步的问题, 请读者参阅文献①.

① 参考 F. John[1].

# 第 4 章附录 I　非线性方程

关于一般的非线性微分方程 (多于两个自变量的)①

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn}) = 0 \tag{1}$$

的边值问题知道得很少, 这里假定 $F$ 在 $p$ 维空间域上对它的 $p = \dfrac{1}{2}(n^2+n)+2n+1$ 个变量是二次连续可微的.

## 4′.1　扰 动 理 论

在光滑域 $G$(如第 4 章 4.7.1) 上考虑方程 (1) 的解 $u$, (1) 在 $G$ 上是椭圆型的. 不失一般性, 我们可假定 $u \equiv 0$, 在此情形下, 矩阵

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)\right)$$

在 $G$ 的每个点处都是正定的. 设

$$R(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn})$$

是给定的二次连续可微函数. 问: 对于足够小的 $\in$ 以及 $\|\phi\|'_{2+\alpha} < \in$(见第 4 章 4.7.1), 方程

$$\begin{aligned}
&F(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn})\\
=&\in R(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn})
\end{aligned} \tag{2}$$

是否有一个在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$ 的解 $u$.

在

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) \leqslant 0$$

的情形下, 答案是肯定的.

---

① 请读者参考 4.4.5 中所列举的论文和这里给出的几种附加参考文献. 对于 $u = 2$ 的情形, 已经作了很可观的工作. 首先提出 C. B. Morrey[3] 的基本论文. 有关的工作见 L. Nirenberg[3] 和 [1] 和 C. B. Morrey[4], 连同他们的书目, 还有 L. Bers and L. Nirenberg[1] 及 [2]. E. Heinz[1] 的论文包含着更进一步的参考文献, 特别是 A. V. Pogorelov 的著述. 关于 Mouge-Ampère 型的方程的著述, 我们已在 4.7.5 中指出了 E. Heinz[2] 的论文, 其中包含着对 H. Lewy 的著述的参考.

关于高维空间中的这种方程, 我们还提出 A. D. Aleksandrov[1]. 联系到气体动力学中的亚音速流的方程, 请参考 L. Bers[3], 它有一个广泛的书目.

关于高维的著述, 还可参考 H. O. Cordes[2]. 也可参考 R. Finu and D. Gilbarg[1] 以及 A. A. Kiselev and O. A. Ladyzhenskaya[1].

为了证明这个命题, 把方程写成如下的形式:

$$
\begin{aligned}
L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) u_{ij} \\
+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i}(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) u_i \\
+ \frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) u \\
= L[u] - F(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn}) \\
+ \in R(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n, u_{11}, \cdots, u_{nn}) \\
= Q[u],
\end{aligned}
$$

也就是, 把 $F$ 关于 $u$ 及其诸导数的展开式的线性 (或一阶) 部分放在方程的左边, 而把非线性的部分合并在算子 $Q[u]$ 中. 作为方程

$$L[u_m] = Q[u_{m-1}]$$

在 $\Gamma$ 上满足 $u_m = \phi(m = 1, 2, \cdots)$ 且 $u_0 = 0$ 的解, 依次定出函数序列 $u_m$. 解 $u_m$ 的存在是由第 4 章 4.7.2 的 Schauder 理论和假设 $\dfrac{\partial F}{\partial u} \leqslant 0$ 得出的.

借助于第 4 章 4.7.1 的 Schauder 估计, 不难证明对于足够小的 $\in$ 函数 $u_m$ 收敛于 (2) 的解.

对于任意阶椭圆型方程的相似的扰动理论, 已在 S. Agmon, A. Douglis 和 L. Nirenberg① 的论文中作为 Schauder 估计对这类方程的一个应用而得到证明.

## 4′.2　方程 $\Delta u = f(x, u)$

考虑边值问题

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) = f(x, u), \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = \phi, \tag{3}$$

其中 $f$ 对于 $G + \Gamma$ 上的一切 $x$ 和所有的 $u$ 都是有定义的且有连续的一阶导数.

a) 假定 $f$ 是有界的,

$$|f(x, u)| \leqslant N, \tag{4}$$

我们来证明 (3) 有一个解.

① 参考 S. Agmon, A. Douglis 和 L. Nirenberg[1].

假定边界和边界值都是光滑的 (如第 4 章 4.7.1 中所述), 事实上可假定 $\phi = 0$. 因为, 令 $u = v + h$, $h$ 是在 $\Gamma$ 上等于 $\phi$ 的调和函数, 就得到关于 $v$ 的等价的边值问题:

$$\Delta v = f(x, v+h), \quad 在\ \Gamma\ 上\ v = 0.$$

若域 $G$ 不够小, 则 (3) 的解不一定是唯一的. 例如, 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上考虑单自变量 $x$ 的方程 $u_{xx} = f(u)$, 其中 $f(u)$ 是有界函数且当 $-1 \leqslant u \leqslant 1$ 时, $f(u) = -u$, 函数 $u = \lambda \sin x$, $|\lambda| \leqslant 1$, 是在端点等于 0 的解. 对于各种维数的情形, 都能作出相似的例子.

在进行求解 (3) 之前, 先提出一个一般性不等式, 它对于一切在 $G+\Gamma$ 上连续、在 $\Gamma$ 上为 0、且在 $G$ 上有连续的一阶和二阶导数的函数 $u$ 都成立: 对于 $G$ 的每个列紧子域 $a$, 有

$$\max_a \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant c \operatorname*{l.u.b.}_G |\Delta u|, \tag{5}$$

其中常数 $c$ 依赖于 $a$ 和 $G$. ((5) 的更强的形式, 以 $G$ 代 $a$ 成立) 为了验证 (5), 我们注意到, 如果 $K(x-y)$ 是对于 Laplace 算子的基本解 (当 $n > 2$ 时, $K(x) = \Omega|x|^{2-n}$, 当 $n = 2$ 时, $K(x) = \Omega \log|x|$, $\Omega$ 是依赖于 $n$ 的一个适当的常数) 而 $\zeta(y)$ 是一个二次连续可微函数, 它在 $a$ 上恒等于 1 且在 $\Gamma$ 上和 $\Gamma$ 的邻域等于零, 那么

$$u(x) = \int_G \zeta(y) K(x-y) \Delta_y u(y) \mathrm{d}y - \int_G u(y) \Delta_y (\zeta(y) K(x-y)) \mathrm{d}y, \ x \in a,$$

利用第 4 章 4.1.2 的结果, 可以证明

$$\max_a \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant c' \operatorname*{l.u.b.}_G |\Delta u| + \operatorname*{l.u.b.}_G |u|,$$

$c'$ 是一个适当的常数. 不过, 因 $u$ 在 $\Gamma$ 上等于 0, 由第 4 章 4.6 的不等式 (13), 得到 $|u| \leqslant K \operatorname*{l.u.b.}_G |\Delta u|$, 把它代入上面的估计式中, 就得到 (5).

借助于 Schauder 的不动点定理 (见第 4 章 4.7) 可导出 (3) 的解, 不过我们要用递推法给出一个证明. 设 $v(x)$ 是

$$\Delta v = -N$$

的解, 在 $\Gamma$ 上 $v = 0$, $N$ 是由 (4) 取来的. 根据第 4 章 4.6.4 的极大值原理得到 $v \geqslant 0$. 对于 $G$ 上的一切 $x$, 令 $k = \text{l.u.b.}\left(\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right)$, 且令 $-\max v \leqslant u \leqslant \max v$, 于是对于 $-\max v \leqslant u \leqslant w \leqslant \max v$ 有

$$f(x,u) - f(x,w) - k(u-w) \geqslant 0. \tag{6}$$

(3) 的解将由函数序列 $u_m$ 的极限得出. $u_m$ 是由方程

$$L[u_m] \equiv \Delta u_m - k u_m = f(x, u_{m-1}) - k u_{m-1}, \text{ 在 } \Gamma \text{ 上 } u_m = 0, \ u_0 = v \tag{7}$$

确定的. 根据第 4 章 4.7.2 的 Schauder 理论, 这些函数 $u_m$ 是都存在的.

首先注意到

$$L[u_1] = f(x, v) - kv \geqslant -N - kv = Lv.$$

应用极大值原理, 得知 $u_1 \leqslant v$, 并由前面的不等式得到

$$\Delta u_1 = k(u_1 - v) + f(x, v) \leqslant N = -\Delta v,$$

于是可知 $u_1 > -v$, 所以

$$-v \leqslant u_1 \leqslant v.$$

用归纳法来证明

$$-v \leqslant u_m \leqslant u_{m-1} \leqslant v \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

对于 $m = 1$ 时, (8) 是成立的, 假定它对某个 $m$ 成立, 那么根据 (6),

$$L[u_{m+1} - u_m] = f(x, u_m) - f(x, u_{m-1}) - k(u_m - u_{m-1}) \geqslant 0.$$

于是, 根据极大值原理, $u_{m+1} \leqslant u_m$. 又因

$$\Delta u_{m+1} = k(u_{m+1} - u_m) + f(x, u_m) \leqslant N = -\Delta v,$$

再利用极大值原理, 得 $-v \leqslant u_{m+1}$, 于是 (8) 对 $m+1$ 得到证实, 因而对一切 $m$ 成立.

函数 $|u_m|$ 是一致有界的, 因此, 根据 (7), $|\Delta u_m|$ 的值也是一致有界的. 于是不等式 (5) 就表明 $u_m$ 的一阶导数的绝对值, 以及由 (7), $\Delta u_m$ 的一阶导数的绝对值在 $G$ 的列紧子集 $a$ 上都是一致有界的. 根据第 4 章 4.7.1 中 Schauder 的内部估计得知, $u_m$ 的二阶导数在每个列紧子域上是同等连续的, 且它们的绝对值在每个列紧子域上是一致有界的. 根据 Arzela 定理 (以及通常的对角线法) 可知子序列 $\{u_{m_i}\}$(连同它的一阶及二阶导数序列) 在 $G$ 上收敛于函数 $u$(和它的相应的导数). 但因序列 $\{u_m\}$ 是单调的, 所以整个序列收敛于 $u$. 在 (8) 中令 $m \to \infty$ 得到 $-v \leqslant u \leqslant v$, 因此在 $\Gamma$ 上若令 $u = 0$, 则 $u$ 在 $G + \Gamma$ 上连续. 在 (7) 中令 $m \to \infty$, 则得到 $u$ 是 (3) 的解的结论.

容易看出刚才作出的解 $u$ 是最大的解. 因为, 如果 $w$ 是 (3) 的任何别的解, 则由极大值原理, $|w| \leqslant v$, 再用归纳法, 得

$$w \leqslant u_m \quad (m = 0, 1, \cdots).$$

又因递推过程是由 $u_0 = -v$ 开始的, 所以也已获得最小的解.

b) 再考察问题 (3), 作更一般的假定：$f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)$, 其中 $|f_2|$ 是

有界的且 $\dfrac{\partial f_1}{\partial u} \geqslant 0$(例如, 在一些数学物理问题中出现的是 $f = \mathrm{e}^u$). 像前面一样假定 $\phi = 0$. 根据中值定理, 可将 (3) 改写为

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, \tilde{u})u = f_1(x,0) + f_2(x,u), \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = 0,$$

其中 $\tilde{u}(x)$ 介于 0 与 $u(x)$ 之间. 于是得估计式

$$|u| \leqslant K \max |f_1(x,0) + f_2(x,u)| \leqslant M, \tag{9}$$

它是第 4 章 4.6 的不等式 (13) 应用于上面的 $L[u]$ 的结果.

我们将由解一个修改了的问题而得到 (3) 的解, 对于这个修改了的问题可利用 a) 的结果. 设 $\hat{u}(u)$ 对 $-\infty < u < +\infty$ 是连续可微的单调增大函数, 使当 $|u| \leqslant M$ 时, $\hat{u}(u) = u$, 且对于所有的 $u$ 有 $|\hat{u}(u)| \leqslant 2M$. 对于 $\hat{f}_1(x,u) = f_1(x, \hat{u}(u))$ 考虑修改了的方程

$$\Delta u = \hat{f}_1(x,u) + f_2(x,u) = \hat{f}(x,u), \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = 0. \tag{3a}$$

显然 $\dfrac{\partial \hat{f}_1}{\partial u} \geqslant 0$ 且 $\hat{f}_1(x,0) = f_1(x,0)$. 由 (9) 得知 (3a) 的解的绝对值以 $M$ 为界, 所以也是 (3) 的解. 又因对于某个常数 $N$ 有

$$|\hat{f}(x,u)| \leqslant \underset{|u| \leqslant 2M}{\text{l.u.b.}} |f_1(x,u) + f_2(x,u)| \leqslant N,$$

由 a) 可归结出 (3a)有解, 从而 (3) 有解.

如果 $\dfrac{\partial f}{\partial u} \geqslant 0$, 则根据第 4 章 4.6.2 的唯一性定理, (3) 的解是唯一的. 在此情形下也可用连续法去解 (3), 就是当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时, 考虑单参数的问题族

$$\Delta u = t f(x,u), \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上 } u = 0. \tag{3b}$$

当 $t = 0$ 时, 它的解是 $u = 0$. 根据 a) 中的讨论, 使得 (3b) 在 $C_{2+\alpha}$ 中 (参阅第 4 章 4.7.2) 有解的那些 $t$ 值所成的集 $T$ 是开集. 为了完成连续法, 只需证明 $T$ 也是闭集. 于是非空集 $T$ 既是开的又是闭的, 它必定是整个区间.

要想知道 $T$ 是闭的, 令 $u_m$ 是 (3b) 对应于值 $t_m$ 的解所成的序列, $t_m$ 收敛于某个值 $\bar{t}$, 需要证明 (3b) 对 $t$ 有一个解. 根据 (9), 函数 $|u_m|$, 从而 $|f(x,u_m)|$ 都是一致有界的. 由 (5)(在它的强形式下) 得知 $u_m$ 以及 $f(x, u_m(x))$ 的一阶导数的绝对值也都是一致有界的. 应用 Schauder 估计和 Arzela 定理得知 $u_m$ 的一个子序列收敛于 (3b) 的解 $u$, 这就完成了用连续法有解存在的证明.

c) 一般说来, 只要基本域 $G$ 选取得足够小, 微分方程

$$\Delta u = f(x_1, \cdots, x_n, u, u_1, \cdots, u_n) = F[u] \tag{10}$$

的边值问题的可解性是能够证明的. 我们将限于半径为 $R$ 的球 $G$ 和在 $\varGamma$ 上边界值 $u=0$, 假定 $f$ 对于所有的变量是连续的且有连续的一阶导数.

首先注意到由 (5) 的强形式可得不等式

$$\max_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant cR \operatorname*{l.u.b.}_G |\Delta u|, \tag{11}$$

其中常数 $c$ 只依赖于维数 $n$.

现在来证明当 $R$ 足够小时, 由

$$\begin{aligned}
&\Delta u_{(m)} = F[u_{(m-1)}],\\
&\text{在 } \varGamma \text{ 上 } u_{(m)} = 0 \quad (m=1,2,\cdots),\\
&u_0 = 0
\end{aligned}$$

所定义的函数序列收敛于 (10) 的解.

引入范数 (参考第 4 章 4.7.1)

$$\|u\|_1 = \max|u| + \max\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|,$$

用 $\mu$ 表示一个正的常数, 当 $\|u\|_1 \leqslant 1$ 时, $|f|$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|$ 和 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u_i}\right|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都以 $\mu$ 为界. 如果 $\|u_{(m)}\|_1 \leqslant 1$, 则由 (11) 得知

$$\left|\frac{\partial u_{(m+1)}}{\partial x_i}\right| \leqslant cR\mu,$$

且因在 $\varGamma$ 上 $u_{(m+1)} = 0$, 故有

$$|u_{(m+1)}| \leqslant cR^2\mu.$$

如果这样选取 $R$, 使得 $cR\mu + cR^2\mu \leqslant 1$, 则用归纳法得到一般的 $\|u_{(j)}\|_1 \leqslant 1$. 利用中值定理进而得到

$$\begin{aligned}
|\Delta(u_{(m+1)} - u_{(m)})| &= |F[u_{(m)}] - F[u_{(m-1)}]|\\
&\leqslant n\mu\|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.
\end{aligned}$$

由 (11) 总结出

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant (cR + cR^2)n\mu\|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1.$$

限制 $R$, 使之符合要求：$(cR + cR^2)n\mu \leqslant \dfrac{1}{2}$, 则得

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\|u_{(m)} - u_{(m-1)}\|_1,$$

所以

$$\|u_{(m+1)} - u_{(m)}\|_1 \leqslant 2^{-m}\|u_{(1)} - u_{(0)}\|_1,$$

由此可知 $u_{(m)}$ 及其一阶导数各自一致地收敛于函数 $u$ 和 $u$ 的一阶导数.

借助于 Schauder 内部估计, 容易看出 $u_{(m)}$ 的二阶导数在 $G$ 的每个列紧子集上也是一致收敛的, 因此 $u$ 在 $G$ 上有连续的二阶导数且满足 (10).

# 第 4 章附录 II　椭圆型偏微分方程理论的函数论观

平面上 Laplace 方程的理论和复变解析函数的理论实质上是等同的. 对于含一个未知的二元函数的每个线性椭圆型偏微分方程, 人们都可以把它和一种推广的解析函数 —— 所谓准解析函数 —— 结合起来. 关于这种理论, 我们将扼要地阐述某些突出的事实①; 还将指出函数论与椭圆型方程的其他联系.

## $4''.1$　准解析函数的定义

首先, 我们回忆一下复变解析函数是如何与 Laplace 方程相联系起来的. 设 $\Phi(x,y)$ 是一个调和函数, 它是 Laplace 方程

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$$

的解. 令 $u = \Phi_x, v = -\Phi_y$. 于是函数 $u(x,y), v(x,y)$ 适合 Cauchy-Riemann 方程组

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0,$$

因而复的梯度 $w = u + \mathrm{i}v$ 是复变数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一个解析函数. 此外, $u$ 和 $v$ 它们自身也都是调和函数. 另一方面, 借助于 Cauchy-Riemann 方程组

$$\begin{aligned} \Phi_x - \Psi_y = 0, \\ \Phi_y + \Psi_x = 0, \end{aligned}$$

人们可以找到一个共轭调和函数 $\Psi$. 函数 $\Phi$ 是复解析函数 $\Omega = \Phi + \mathrm{i}\Psi$ 的实部. 函数 $\Omega$ 与 $w$ 之间的关系是 $w(z) = \mathrm{d}\Omega(z)/\mathrm{d}z$.

现在来考虑一般的椭圆型线性偏微分方程

$$a_{11}\varphi_{\xi\xi} + 2a_{12}\varphi_{\xi\eta} + a_{22}\varphi_{\eta\eta} + a_1\varphi_\xi + a_2\varphi_\eta + a_0\varphi = 0. \tag{1}$$

假设二阶项的系数 $a_{ij}(\xi,\eta)$ 在所论的区域上具有 Hölder 连续的偏导数, 并且方程具有一个正解 $\Phi_0(\xi,\eta)$. 如果引入新自变量 $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$, 使得映射 $(\xi,\eta) \to (x,y)$ 是一个同胚映射②, 它适合与尺度

$$a_{22}\mathrm{d}\xi^2 - 2a_{12}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + a_{11}\mathrm{d}\eta^2$$

相联系着的 Beltrami 方程 (参看第 3 章 3.2 和第 4 章 4.8), 并且如果再引入新的未知函数 $\Phi = \phi/\phi_0$, 那么方程 (1) 就取得典型形式

---

① 这个理论是 L. Bers 首创的; I. Vekua 给出过一个独立的发展. 在 L. Bers [1] 里给出了这个理论的一个阐述和完备的书目, 并参看 I. Vekua[1].

② 同胚映射是一个拓扑映射, 即它和它的逆映射都是一对一的而且是连续的.

$$\Delta\Phi+\alpha(x,y)\Phi_x+\beta(x,y)\Phi_y=0. \tag{1a}$$

今后我们只考虑这样的方程.

和前边一样, 令 $u=\Phi_x, v=-\Phi_y$. 这两个函数适合微分方程组

$$\begin{aligned}u_x-v_y&=-\alpha u+\beta v,\\ u_y+v_x&=0,\end{aligned} \tag{2}$$

它是首先被 Hilbert 与 Garleman 研究过的椭圆型方程组

$$\begin{aligned}u_x-v_y&=\alpha_{11}u+\alpha_{12}v,\\ u_y+v_x&=\alpha_{21}u+\alpha_{22}v\end{aligned} \tag{3}$$

的一种特例. 利用第 4 章 4.8 里所引入的复数记法, 可以把 (3) 写成

$$w_{\bar z}=a(z)w+b(z)\bar w, \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}4a&=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\mathrm{i}\alpha_{21}-\mathrm{i}\alpha_{12},\\ 4b&=\alpha_{11}-\alpha_{22}+\mathrm{i}\alpha_{21}+\mathrm{i}\alpha_{12}.\end{aligned}$$

称方程 (4) 的一个连续可微解为由方程组 (3) 定义的一个**第一类准解析函数**, 或一个 $[a,b]$ 准解析函数. 方程 (1a) 的每一个解的复梯度都是一个 $[a,\bar a]$ 准解析函数, 这里 $4a=-\alpha-\mathrm{i}\beta$.

另一方面, 我们将在 4.4 中证明: 给定了形式如 (1a) 的一个方程之后, 能够在颇为一般的条件下找出适合方程组

$$\begin{aligned}\sigma_x-\tau_y&=\alpha\sigma,\\ \sigma_y+\tau_x&=\beta\sigma\end{aligned} \tag{5}$$

(这也是形式如 (3) 的一个方程组) 的两个实值函数 $\tau(x,y)$ 和 $\sigma(x,y)>0$. 这些关系表明, 方程 (1a) 和椭圆型方程组

$$\begin{aligned}\sigma\phi_x+\tau\phi_y&=\psi_y,\\ \sigma\phi_y-\tau\phi_x&=-\psi_x\end{aligned} \tag{6}$$

是等价的, 由 (6) 消去 $\psi$ 就可以得到 (1a). 由具有 Hölder 连续性的系数的椭圆型方程组 (6) 的一组解构成的函数 $\phi+\mathrm{i}\psi$ 称为属于这个方程组的一个**第二类准解析函数**. 于是方程 (1a) 的每一个解都是一个第二类准解析函数的实部.

注意, 两个准解析函数的以实数为系数的组性组合仍是一个准解析函数, 但是两个准解析函数的乘积一般说来不是准解析函数.

下边将要证明: 准解析函数具有与通常的解析函数共同的重要性质, 并且应当把第一类准解析函数和第二类准解析函数看成是同一个数学对象的两种表现.

## 4″.2 一个积分方程

在研究 4″.1 中方程 (4) 的解时, 也就是研究第一类准解析函数时, 将假定系数 $a(z), b(z)$ 处处有定义适合 Hölder 条件, 并且在某个大圆 $|z| = R$ 之外恒等于零 (这些假定仅仅是为了简单的缘故, 所推得的结果在广泛得多的条件下都成立).

4″.1 中方程 (4) 的处理是基于复值二重积分

$$q(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

的某些性质, 这里 $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$. 假定复值函数 $\rho(z)$ 在圆 $|z| = R$ 外是零并且适合不等式 $|\rho| \leqslant M$. 于是, 对于每个 $\epsilon(0 < \epsilon < 1)$ 都有

$$|q(z)| \leqslant \frac{KM}{1 + |z|^\epsilon}, \quad |q(z_1) - q(z_2)| \leqslant KM|z_1 - z_2|^\epsilon,$$

其中常数 $K$ 仅依赖于 $\epsilon$ 和 $R$. 再者, 如果在某点的邻域内函数 $\rho(z)$ 适合一个 Hölder 条件, 那么; 函数 $q(z)$ 在这个邻域内就具有 Hölder 连续的偏导数并且是方程

$$q_z = \rho \tag{1}$$

的一个解.

所有这些陈述都可以用第 4 章 4.8 中所述的方法予以证明.

我们还要注意, 如果存在着某个适合 $Q_{\bar{z}} = \rho$ 的连续可微函数 $Q(z)$, 那么即使不假定 $\rho$ 具有 Hölder 连续性, 关系 (1) 仍然成立. 这个论断可由 Green 恒等式推得, 读者不难证明它.

设 $w(z)$ 是一个定义在区域 $D$ 上的有界连续函数. 那么, 当且仅当由公式

$$f(z) = w(z) + \frac{1}{\pi}\int\int_D \frac{a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2}$$

定义的函数 $f(z)$ 在 $D$ 上是解析的时候, $w(z)$ 是 $[a, b]$ 准解析的.

为了证明这个断言, 注意 (2) 里的二重积分是 $z$ 的一个 Hölder 连续函数, 所以函数 $w$ 或 $f$ 两者之中任一个的 Hölder 连续性包含着另一个的 Hölder 连续性. 此外, 如果 $w$ 是 Hölder 连续的, 那么函数 $w$ 或 $f$ 两者之中任一个的连续可微性也包含着另一个的连续可微性. 将 (2) 对 $\bar{z}$ 求导并利用 (1), 得到 $w$ 在 $D$ 上的微分方程

$$f_{\bar{z}} = w_{\bar{z}} - aw - b\bar{w}.$$

可见, 当且仅当 $f \equiv 0$ 时, 即当且仅当 $f(z)$ 是解析的时候, $w$ 适合 4″.2 中 (4).

作为这个结果的一个推论, 我们得到关于可去奇异性定理: 如果 $w(z)$ 在域 $0<|z-z_0|<r$ 上是准解析的并且是有界的, 那么可以定义它在 $z_0$ 处的值使得它在整个圆盘 $|z-z_0|<r$ 上是准解析的. 注意到关于解析函数的相应的定理成立以及二重积分当去掉其积分域内一个点时不改变其值, 即得证明.

对于给定的函数 $f(z)$, 可以把方程 (2) 看成是关于未知函数 $w(z)$ 的一个线性积分方程. Vekua 曾经证明, 这个方程恒有唯一的解. 不过, 我们将不引用这个事实.

## 4″.3 相似性原理

我们称定义在域 $D$ 上的两个复值函数 $w(z)$ 与 $f(z)$ 为 相似的, 如果比值 $w/f$ 是有界的, 具有大于零的下界, 并且在该域的闭包上是连续的. 我们将证明四个定理, 它们断定每一个准解析函数相似于某个解析函数, 反之亦真.

a) 设 $w(z)$ 是区域 $D$ 上的 $[a,b]$ 准解析函数. 那么, 存在着一个解析函数 $f(z)$ 和一个复值的连续函数 $s(z)$ 使得

$$w(z)=\mathrm{e}^{s(z)}f(z). \tag{1}$$

而且, $s(z)$ 在 $D$ 的闭包上是连续的、有界的、并具有仅依赖于系数 $a,b$ 的 Hölder 连续的模.

证明无非就是摆出函数 $s(z)$ 的情况. 若 $w(z)\equiv 0$, 那就没有什么要证的. 若 $w(z)$ 不恒等于零, 令 $D_0$ 表示 $D$ 的使 $w(z)\neq 0$ 的开子集, 并设

$$s(z)=\frac{-1}{\pi}\int\int_{D_0}\left[a(\zeta)+b(\zeta)\frac{\bar{w}(\zeta)}{w(\zeta)}\right]\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta-z},$$
$$f(z)=\mathrm{e}^{-s(z)}w(z).$$

函数 $s(z)$ 是处处连续的; 它在 $D_0$ 上是连续可微的并且适合方程 $s_{\bar{z}}=a+b\bar{w}/w$. 因此, 在 $D_0$ 上 $f_{\bar{z}}\equiv 0$, 所以 $f(z)$ 在 $D_0$ 上是解析的. 由解析函数的可去奇异性定理可知 $f(z)$ 在补集 $D-D_0$ 的每个孤立点处也是解析的.

现在设 $z_0$ 是 $D-D_0$ 的一个非孤立点. 那么存在着一个点列 $\{z_\nu\}$, 它适合 $w(z_\nu)=0, \nu=1,2,\cdots$, 并且 $z_\nu\to z_0$. 选出适当的子序列, 还可以假定 $z_\nu-z_0$ 的幅角收敛于一个角 $\theta$. 直接应用中值定理可以证明在 $z_0$ 处 $w_x\cos\theta+w_y\sin\theta=0$. 另一方面, $w(z_0)=0$, 因此, 由 (4) 又得到在 $z_0$ 上还有 $2w_{\bar{z}}=w_x+\mathrm{i}w_y=0$. 于是, $w_x(z_0)=w_y(z_0)=0$, 所以 $\lim\limits_{z\to z_0}[w(z)/(z-z_0)]=0$ 并且 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)/(z-z_0)]=0$. 从而得知 $f(z)$ 在 $D-D_0$ 的每一个非孤立点上有复的导数, 所以 $f(z)$ 在整个区域 $D$ 上是解析的.

由于一个不恒等于零的解析函数的零点是孤立的, 从而推知 $D-D_0$ 仅由孤立点组成, 所以我们可以写

$$s(z)=\frac{-1}{\pi}\int\int_D\left[a(\zeta)+b(\zeta)\frac{\bar{w}(\zeta)}{w(\zeta)}\right]\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta-z}. \tag{2}$$

由 4″.2 中的论断可知这个函数具有所需要的性质.

b) 在 a) 的假设下, 假定 $D$ 的边界是一个二次连续可微的简单闭曲线 $C$, 并且 $D$ 完全处于 $C$ 之内或完全处于 $C$ 之外. 那么, 可以选取函数 $s(z)$ 要它在 $C$ 上的值是实数并且在 $C$ 上的一个指定的点 $z_0$ 处为零.

我们将仅就 $C$ 为单位圆周而 $D$ 为单位圆盘的一个子域的情况来证明这个定理. $C$ 为一般曲线的情况可以相仿地处理, 或者可以借助于共形变换把它化为单位圆的情况.

证明的基础是关于共轭函数的一个古典定理 (出自 A.Korn 与 I. I. Privaloff). 设 $g(z)=U+\mathrm{i}V$ 在单位圆盘上为解析的. 若 $V(x,y)$ 在单位圆周上是连续的且在那里适合一个以 $H$ 为常数而以 $\alpha<1$ 为指数的 Hölder 条件, 则函数 $g(z)$ 在单位闭圆盘上适合一个以 $\alpha$ 为指数而以 $kH$ 为常数的 Hölder 条件, 其中 $k$ 仅与 $\alpha$ 有关. 这个 4″.14 里给出了 Privaloff 定理的证明.

为了证明定理 b), 设 $s$ 为 (10) 所定义的函数并令

$$t(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\mathrm{Im}s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

$$s_0(z)=s(z)-\mathrm{i}t(z)-s(z_0)+\mathrm{i}t(z_0).$$

由 Privaloff 的定理得知, 解析函数 $t(z)$(它的实部在 $|z|=1$ 上等于 $\mathrm{Im}s(z)$) 在单位闭圆盘上是连续的、有界的, 并且有一个仅依赖于系数 $a,b$ 的 Hölder 连续模. 显然函数 $\mathrm{e}^{-s_0(z)}w(z)$ 是解析的. 另一方面, $s_0(z)$ 在 $|z|=1$ 上是实的并且在 $z_0$ 处为零.

c) 设 $f(z)$ 为定义在域 $D$ 上的一个解析函数. 那么, 存在着那样的一个函数 $s(z)$, 它在 $D$ 的闭包上是连续的, 在一个指定的点 $z_0$ 处为零, 并且使得 $w(z)=\mathrm{e}^{s(z)}f(z)$ 是 $[a,b]$ 准解析的. 可以选择函数 $s(z)$ 要它是有界的并且具有一个仅依赖于 $a$, $b$ 的 Hölder 连续模.

鉴于前边所证明的可去奇异性定理, 我们把解析函数 $f$ 在域 $D$ 上的一切零点都去掉, 这无损于一般性. 于是可以假定在 $D$ 上 $f(z)\neq 0$. 如果能够找到适合微分方程

$$s_{\bar{z}}=a+b\frac{\bar{f}}{f}\mathrm{e}^{\bar{s}-s} \tag{3}$$

的一个函数 $s(z)$, 那么函数 $\mathrm{e}^s f$ 就是 $[a,b]$ 准解析的.

为了寻找 $s$, 考虑算子 $T$, 它把域 $D$ 上的一个有界连续函数 $s(z)$ 变换为函数 $\sigma(z)-\sigma(z_0)$, 其中

$$\sigma(z)=-\frac{1}{\pi}\int\int_D\left[a(\zeta)+b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)}\mathrm{e}^{\bar{s}(\zeta)-s(\zeta)}\right]\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta-z}. \tag{4}$$

由于两个有界连续函数的一个实系数的线性组合仍然是有界的并且是连续的, 所以 $D$ 上的有界连续函数构成一个实的矢量空间 $B$. 在这个空间里我们可以引进范数 $||s||=\text{l.u.b.}|s(z)|$. 如果 $\{s_n\}$ 是一个在此种范数意义下的 Cauchy 序列, 即如果 $\lim_{m,n\to\infty}||s_n-s_m||=0$, 那么就存在着一个适合 $||s_n-s||\to 0$ 的有界连续函数 $s(z)$. 于是, 空间 $B$ 是一个完备的赋范矢量空间 —— 一个 Banach 空间①. 由 4″.2 中所讨论的二重积分的性质可知, 每一个函数 $\bar{\sigma}=Ts$ 都是有界的并且有一个仅依赖于 $a,b$ 的连续模, 而且, 若 $D$ 为无界域, 则当 $z\to\infty$ 时, $\bar{\sigma}$ 为一致的 $O(|z|^{-\epsilon})$. 令 $\Lambda$ 表示一切有这个界和这个连续模并且对于无界域 $D$ 在无穷远处有这个性质的函数的集合. 集合 $\Lambda$ 是凸集 (参看 4″.15). 再者, 由 Arzela 定理 (参看卷 I 第 2 章 2.2) 可知由属于 $\Lambda$ 的函数的每个序列可以选出一个一致收敛的子序列, 即, 依 $B$ 中的范数收敛的一个子序列. 因此 $\Lambda$ 是 $B$ 的一个列紧子集. 不难看出, $T$ 是一个由 $B$ 到 $\Lambda$ 的连续映射, 而且特别是 $\Lambda$ 到它自身的一个连续映射.

现在我们引用 Schauder 不动点定理②(参看 4″.9 和 4″.15), 由 Banach 空间里一个列紧凸集到它自身的一个连续映射必有一个不动点. 这定理说明了在 $\Lambda$ 里存在着一个适合 $s=Ts$ 的函数 $s(z)$; 即

$$s(z)=-\frac{1}{\pi}\int\int_D\left[a(\zeta)+b(\zeta)\frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)}\mathrm{e}^{\bar{s}(\zeta)-s(\zeta)}\right]\left[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

这个函数适合所需的微分方程 (3), 并且在 $z_0$ 上等于零.

d) 设域 $D$ 和曲线 $C$ 满足定理 b) 中的要求, 并设 $f(z)$ 是定义在 $D$ 上的一个已知的解析函数. 那么可以选取函数 $s(z)$ (定理 c)(已经断定了它的存在性), 要它在 $C$ 上是实的并且在 $C$ 的一个指定的点 $z_0$ 上等于零.

证明与定理 b) 的证明非常相仿. 我们仍然只考虑单位圆的情况. 为了寻求方程 (3) 的解, 考虑算子 $T_1$, 它把 $D$ 上的一个有界连续函数 $s(z)$ 变换为函数 $\sigma_1(z)-\sigma_1(z_0)$, 其中

$$\sigma_1(z)=\sigma(z)-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\mathrm{Im}\sigma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

($\sigma(z)$ 由 (4) 定义), 并且对于方程 $s=T_1s$ 引用 Schauder 不动点定理. 由 Privaloff 的定理可知 $T_1$ 把 $B$ 映射到一个列紧的凸子集.

① 参考 4″.15.

② 可以避而不用 Schauder 的不动点定理, 但论证较为冗长.

## 4″.4　相似性原理的应用

作为第一个应用, 我们给出关于准解析函数的局部性质的一个定理. 设 $w(z)$ 在域 $0 < |z - z_0| < r$ 上是准解析的. 那么, 或者当 $z \to z_0$ (本性奇点) 时, $w(z)$ 任意接近于每一个复数, 或者存在着适合于

$$w(z) \sim \frac{\alpha}{(z - z_0)^n}, \quad z \to z_0 \tag{1}$$

的一个正整数 $n$ 和一个复数 $\alpha \neq 0$ (这意味着 $w$ 有一个 $n$ 阶极点), 或者 $z_0$ 是 $w(z)$ 的可去奇点. 如果 $w(z)$ 在 $z_0$ 点是正则的而且 $w(z_0) = 0, w \not\equiv 0$, 那么存在着一个正整数 $n$ 和一个复数 $\alpha \neq 0$, 它们适合

$$w(z) \sim \alpha(z - z_0)^n, \quad z \to z_0 \tag{2}$$

($n$ 阶零点).

由相似性原理 a) 和关于解析函数的相应的古典命题立即可以推出这个断言. 作为一个推论, 得到熟知的 Carleman 定理, 它说, 4″.1 中 (4) 的任一个不恒等于零的解的零点必是孤立的, 并且这解的任一零点都只能是有限阶的. 特别是, 这个定理暗含着一个推论：一个准解析函数在任一开集上的那些值唯一地决定了这个准解析函数. 相同的命题对于 4″.1 中具有光滑但非解析系数的椭圆型微分方程 (1) 也必然成立. 这个唯一延拓定理还可改用各种方法推广到形式如 4″.1 中 (1) 而具有有界可测系数的椭圆型方程. Aronszajn① 曾经把这个唯一延拓定理推广到 $n$ 维空间里具有充分光滑系数的二阶方程.

以上应用了相似性原理中描述准解析函数的结构的那一部分. 现在我们来给出这个原理的存在性命题的一个应用. 我们将要证明，形式如 4″.1(1a) 的一个椭圆型方程对于由任意二次连续可微简单闭曲线 $C$ 所界定的任何区域皆有 Green 函数. 为了造出这个函数, 令 $g(z_0, z)$ 为 Laplace 方程的属于所论区域的 Green 函数, $z_0$ 是它的奇点, 并设 $4a = -\alpha - \mathrm{i}\beta$. 相似性原理 d) 断言, 在域 $D$ 上存在着一个 $[a, \bar{a}]$ 准解析函数 $w(z)$, 使得 $w/(g_x - \mathrm{i}g_y)$ 是一致连续的, 在 $C$ 上是实的而且异于零. 对于 $C$ 上的某个点 $z_1$, 令

$$G(z_0, z) = \mathrm{Re}\int_{z}^{z} w(z)\mathrm{d}z.$$

① 参考 N. Aronszajn[1]. 同样的结果还被 H. O. Cordes[1] 独立地证明过. A. P. Calderón[1] 曾经对于初值问题证明过一个颇为一般的唯一性定理. 这些文章推广了 T. Carleman[1] 的基本观念 B. Malgrange[1] 和 P. D. Lax[1] 曾经各自独立地证明了关于椭圆型方程的唯一延拓性质与 Runge 性质之间有趣的关系. 而后, A. Plis[3][1] 和 P. Cohen[1] 独立地给出了椭圆型方程的例子, 唯一延拓定理对于它们不能成立.

当改变积分路线而不触及奇点 $z_0$ 时, 这个曲线积分的值不变. 事实上, 如果 $C$ 是区域 $D$ 内的一个闭曲线, 它的内部 $G$ 不包含 $z_0$, 则由 Green 定理知

$$\mathrm{Re}\oint_C w\mathrm{d}z = \mathrm{Re}2\mathrm{i}\iint_G w_{\bar{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

为了证明函数 $G(z_0, z)$ 是单值的, 还必须证明, 沿着某个围绕奇点的闭曲线而计算时, 这个曲线积分的值等于零. 但是在 $C$ 上 $g = 0$, 因而 $g_x\mathrm{d}x + g_y\mathrm{d}y = 0$, 所以在 $C$ 上有

$$\mathrm{Re}(w\mathrm{d}z) = 0,$$

于是

$$\oint_C \mathrm{d}G = \mathrm{Re}\oint_C w\mathrm{d}z = 0,$$

由此可推得上述论断. 函数 $G(z_0, z)$ 是 4″.1 中方程 (1a) 的一个解. 它在 $C$ 上是常数, 并且显而易见点 $z_0$ 是它的对数奇点. 所以它就是所求的 Green 函数. 注意这个构造方法立即给出了 Green 函数在边界上的法向导数的存在性与连续性.

相仿地, 我们可以构造 4″.1 中方程 (1a) 的一个解, 要它在曲线 $C$ 的一个弧段上为零而在其余弧段上等于 1. 一旦有了这个函数, 就不难解决 4″.1 中方程 (1a) 的第一边值问题.

相似性原理的另一个应用是下述的结果：有且仅有一个有界的 $[a, b]$ 准解析函数$w(z)$, 它在整个平面上有定义且在一个指定的点 $z_0$ 上取给定的值 $\alpha$. 事实上, 由 c) 知道存在着形状为 $\alpha\mathrm{e}^{s(z)}$ 的一个准解析函数, 其中 $s(z)$ 在整个平面上是有界的并且 $s(z_0) = 0$. 唯一性的论断得自定理 a), 它暗含着一个事实, 即每一个定义在整个平面上的有界的准解析函数的形状必是 $\mathrm{e}^{s(z)}f(z)$, 其中 $f(z)$ 是一个有界的整解析函数, 因而由 Liouville 定理知道它是一个常数. 所以, 一个有界的 “整” 准解析函数或者无零点, 或者恒等于零.

我们现在有可能去证明 4″.1 里所给的命题了, 它说, 4″.1 中方程 (1a) 等价于形式如 4″.1(6) 的一个方程组. 假定系数 $\alpha, \beta$ 是 Hölder 连续的并且在一个大圆之外恒等于零. 由刚才所证明的定理可知存在着方程组 4″.1(5) 的一个有界解 $(\sigma_0, \tau_0)$, 它在整个平面上有定义并且在点 $z = 0$ 上 $\sigma_0 = 1, \tau_0 = 0$. 我们断定 $\sigma_0$ 处处大于零. 事实上, 假定在某点 $z_0$ 处 $\sigma_0 = 0$, 那么 (5) 的有界解 $\sigma = \sigma_0, \tau = \tau_0 - \tau_0(z_0)$ 在点 $z_0$ 处等于零, 并且因而恒等于零, 而这是荒谬的.

## 4″.5 形 式 幂

假定方程 4″.1 中 (4) 的系数适合 4″.2 中所作的假设, 于是相似原理可用于整个平面. 按照这个原理, 存在着一个第一类的准解析函数, 它和解析函数 $\alpha(z - z_0)^n$

相似, 其中 $n$ 为正的或负的整数. 我们用 $w(z) = Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ 表示这个函数并称之为一个形式幂. 它当 $z \to z_0$ 时渐近于 $\alpha(z-z_0)^n$ 且在无穷远点是 $O(|z|^n)$. 利用相似性原理, 容易看出这些性质唯一地决定了函数 $Z^{(n)}$. 由相似性原理还可推知存在着一个仅依赖于所论方程的常数 $K$, 它适合

$$\frac{1}{K}|\alpha||z-z_0|^n \leqslant |Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)| \leqslant K|\alpha||z-z_0|^n.$$

形式幂适合下列关系

$$Z^{(n)}(\lambda\alpha + \mu\beta, z_0, z) = \lambda Z^{(n)}(\alpha, z_0, z) + \mu Z^{(n)}(\beta, z_0, z),$$

其中 $\lambda$ 与 $\mu$ 是实数. 证实了等号右端具有那些能够唯一地刻画左端的函数的性质, 也就证明了这个关系. 还可以证明 $Z^{(n)}(\alpha, z_0, z)$ 是 $z_0$ 的连续函数.

借助于形式幂, 可以给出任一准解析函数的解析表达式, 它类似于函数论中的古典结论. 我们将仅陈述这些公式而不予证明.

令 $w(z)$ 为定义在以光滑的简单闭曲线 $C$ 为边界的区域 $D$ 上的一个准解析函数, 并假定 $w$ 在 $C$ 上是连续的. 那么 Cauchy 公式

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C Z^{(-1)}[\mathrm{i}w(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \zeta, z] \tag{1}$$

对于 $D$ 上的 $z$ 成立. 这个积分应按下边的意义去解释：若曲线 $C$ 的参数表达式是 $\zeta(s), 0 \leqslant s \leqslant L$, 则对于定义在 $C$ 上的任一函数 $\chi$ 来说,

$$\int_C Z^{(n)}[\chi(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \zeta, z] = \int_0^L Z^{(n)}\{\chi[\zeta(s)]\zeta'(s), \zeta(s), z\}\mathrm{d}s.$$

若点 $z$ 位于 $C$ 的外部, 则 (15) 中的积分为零.

现在考虑定义在域 $0 < |z-z_0| < R$ 上的一个准解析函数. 那么 $w(z)$ 可有唯一的展开式

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, z_0, z),$$

它在这个域上收敛. 如果系数 $\alpha_n$ 中 $n < 0$ 的有无限多个异于零, 则 $z_0$ 为此函数的本性奇点. 如果系数 $\alpha_n$ 中 $n < 0$ 的仅有有限多个异于零, 则 $z_0$ 为此函数的极点. 如果展形式中仅出现 $n$ 为正的系数 $\alpha_n$, 则此函数在 $z_0$ 处为正则的.

这些结论当然可以作为关于二阶椭圆型偏微分方程的解的结论而重予陈述, 其中无须涉及准解析函数.

## 4″.6 准解析函数的微分与积分

如果 4″.1 中方程 (4) 的两个解 $F(z)$ 与 $G(z)$ 都无零点且比值 $G/F$ 的虚部是正的, 则称它们构成一对母元. 于是, 对于 Cauchy-Riemann 方程组来说, 函数 1 和 $\iota$ 构成一对母元, 同样函数 $\mathrm{e}^z$ 和 $\mathrm{i}\mathrm{e}^z$ 也构成一对母元. 在颇为一般的条件下, 可以证明母元总是存在的. 例如, 在 4″.2 里所提的假设之下, 如果取 4″.1 中 (4) 的在原点上分别取值 1 和 $\iota$ 的两个有界整解作为母元, 则由 4″.4 里所述的后一个定理可知母元确实是存在的.

设 $(F,G)$ 为 4″.1 中方程 (4) 的一对母元. 每一个复值函数 $w(z)$ 可以唯一地写成下列形式

$$w(z)=\phi(z)F(z)+\psi(z)G(z), \tag{1}$$

其中函数 $\phi$ 与 $\psi$ 为实值的. 把每一个函数 $\omega$ 与函数 $\omega(z)=\phi+\mathrm{i}\psi$ 联系起来是方便的. 下边即将证明, 若 $w$ 是第一类准解析函数, 则 $\omega$ 是第二类准解析函数.

由于任何两个充分光滑的函数 $F$ 和 $G$, 如果它们不等于零且 $G/F$ 的虚部是正的, 则都构成形状如 4″.1 中 (4) 的某个方程的一对母元, 所以以后将称 $(F,G)$ 准解析函数.

函数 (1) 当且仅当

$$\phi_{\bar z}F+\psi_{\bar z}G=0 \tag{2}$$

时为 $(F,G)$ 准解析的. 事实上, 由假设可知

$$F_{\bar z}=aF+b\bar F,$$

$$G_{\bar z}=aG+b\bar G,$$

所以

$$w_{\bar z}-aw-b\bar w=\phi_{\bar z}F+\psi_{\bar z}G.$$

现在用关系 $\sigma-\mathrm{i}\tau=\mathrm{i}F/G$ 定义实值函数 $\tau(z)$ 和 $\sigma(z)>0$. 于是方程 (2) 等同于 4″.1 中方程组 (6), 从而证实了我们的术语是名符其实的.

如果 (1) 是一个 $(F,G)$ 准解析函数, 那么它的 $(F,G)$ 导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}w}{\mathrm{d}z}=\dot w=\phi_zF+\psi_zG. \tag{3}$$

若 $A(z)$, $B(z)$ 为由方程组

$$F_z=AF+B\bar F,$$

$$G_z=AG+B\bar G$$

所确定的函数, 则 (3) 还可以写成下边的形式

$$\dot{w} = w_z - Aw - B\bar{w}.$$

若已知 $\dot{w}$, 则函数 $w$, 或者更确切地说相应的第二类准解析函数 $w$, 可以由积分而获得. 实际上, 先用关系式

$$\begin{cases} FF^* - GG^* \equiv 2, \\ \bar{F}F^* - \bar{G}G^* \equiv 0 \end{cases}$$

定义对偶母元偶 $(F,G)^* = (F^*, G^*)$, 然后由 (2) 和 (3) 知 $2\phi_z = F^*\dot{w}$, $2\psi_z = -G^*\dot{w}$. 于是

$$\omega(z_2) - \omega(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{Re}(F^*\dot{w}\mathrm{d}z) - \mathrm{iRe}(G^*\dot{w}\mathrm{d}z)]. \tag{4}$$

值得注意的是, 一个 $(F,G)$ 准解析函数的 $(F,G)$ 导数自身还是一个准解析函数, 虽然一般地说是关于另一母元偶的. 为了证明这个论断, 我们计算[①] $\dot{w}_{\bar{z}}$ 而得

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\bar{z}} =& (\phi_z F + \psi_z G)_{\bar{z}} \\ =& \phi_{\bar{z}}(aF + b\bar{F}) + \psi_{\bar{z}}(aG + b\bar{G}) \\ &+ (\phi_{\bar{z}}F + \psi_{\bar{z}}G)_z - \phi_{\bar{z}}(AF + B\bar{F}) - \psi_{\bar{z}}(AG + B\bar{G}), \end{aligned}$$

注意到 $(\phi_z^1 F + \psi_z^1 G)_z \equiv 0$, 并用 (2), (3) 以 $\dot{w}$ 与 $\bar{\dot{w}}$ 表达 $\phi_z$, $\phi_{\bar{z}}$, $\psi_z, \psi_{\bar{z}}$, 得到方程

$$\dot{w}_{\bar{z}} = a\dot{w} - B\bar{\dot{w}},$$

它表明了 $\dot{w}$ 是 $[a, -B]$ 准解析的.

属于方程

$$w_z^1 = aw - B\bar{w}$$

的一对母元 $(F_1, G_1)$ 称为 $(F,G)$ 的一个后继. 原来的母元偶 $(F,G)$ 自身是母元偶 $(F_{-1}, G_{-1})$ 的一个后继. $(F_{-1}, G_{-1})$ 可如下求得：它是 $(F,G)$ 的一个对偶的后继的对偶. 这个命题的简易证明留给读者. 于是一个给定的母元偶 $(F,G)$ 可以嵌入 (实际上有无限多方式) 一个母元偶序列

$$\cdots, (F_{-2}, G_{-2}), (F_{-1}, G_{-1}), (F_0, G_0), (F_1, G_1), (F_2, G_2), \cdots, \tag{5}$$

其中 $(F_\nu, G_\nu)$ 是 $(F_{\nu-1}, G_{\nu-1})$ 的后继. 如果 $(F_n, G_n) = (F_0, G_0)$, 则称此序列是以 $n$ 为周期的. 对于 $(F_0, G_0)$ 可以嵌入的任何序列均能成立的这种 $n$ 值的最小者称为 $(F_0, G_0)$ 的最小周期; 如果 $(F_0, G_0)$ 不能嵌入一个周期序列, 则说它的最小周期是 $\infty$. Protter 曾经证明, 具有给定的最小周期的母元是存在的[②].

① 利用关于 $4''.1$ 中方程 (1a) 的存在性定理可以证明 $\dot{w}$ 是连续可微的.

② 参考 N. H. Protter[1].

关于一个母元序列 (5), $(F_0, G_0)$ 准解析函数 $w(z)$ 具有按下列递推关系

$$w^{[0]} = w, \quad w^{[n+1]} = \frac{\mathrm{d}_{(F_n,G_n)} w^{[n]}}{\mathrm{d}z} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

定义的各阶导数. 可以证明, 恰如解析函数的情况那样, 对于某个固定的 $z_0$, 数列 $\{w^{[n]}(z_0)\}$ 唯一地确定了函数 $w$.

利用一个母元序列 (5) 和上边所说的积分步骤, 可以用积分构造一个特定的 $(F_\nu, G_\nu)$ 准解析函数的序列, 这些准解析函数叫做局部形式幂并记为 $Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)$, 它们是由下列递推关系定义的:

$$Z_\nu^{(0)}(\alpha, z_0, z) = \alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}_{(F_\nu,G_\nu)} Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z)}{\mathrm{d}z} = Z_{\nu+1}^{(n-1)}(n\alpha, z_0, z) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 $\alpha$ 和 $z_0$ 都是复的常数. 注意当 $(F_\nu, G_\nu) = (1, \mathrm{i})(\nu = 0, \pm 1, \cdots)$ 时, $Z_\nu^{(n)}(\alpha, z_0, z) = \alpha(z - z_0)^n$, 这说明把它叫做“幂”是合理的. 4″.5 里所说的全平面上的形式幂是局部形式幂的特殊情况.

## 4″.7 例. 混合型方程

取函数 $F \equiv 1$, $G \equiv \mathrm{i}\beta(y)(\beta(y)$ 为一个正函数), 则得特别简单的一类准解析函数. 由 4″.6 中 (2) 知, 当且仅当 $\phi$ 与 $\psi$ 适合方程组①

$$\left.\begin{aligned} \phi_x &= \beta(y)\psi_y, \\ \phi_y &= -\beta(y)\psi_x \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

时, 函数 $\phi + \mathrm{i}\beta\psi$ 是 $(1, \mathrm{i}\beta)$ 准解析的. 不必引证 $(F, G)$ 微分与积分的一般理论, 可以立即证明: 若 $(\phi, \psi)$ 是 (1) 的一组解, 则 $(\phi', \psi')$

$$\phi' = \phi_x, \quad \psi' = \psi_x$$

以及由下列与路线无关的积分

$$\varPhi = \int (\phi \mathrm{d}x - \beta\psi \mathrm{d}y),$$

$$\varPsi = \int \left( (\psi \mathrm{d}x + \frac{\phi}{\beta} \mathrm{d}y \right), \tag{2}$$

所定义的一组函数 $(\phi, \psi)$ 都是 (1) 的解. 母元偶 $(1, \mathrm{i}\beta(y))$ 是它自己的后继, $\phi' + \mathrm{i}\beta\psi'$ 是 $\phi + \mathrm{i}\beta\psi$ 的 $(1, \mathrm{i}\beta)$ 导数, $\phi + \mathrm{i}\beta\psi$ 又是 $\varPhi + \mathrm{i}\beta\varPsi$ 的 $(1, \mathrm{i}\beta)$ 导数.

① 参考 L. Bers and A. Gellbart[1].

上边所定义的局部形式幂可以明显地写出来. 为简单计, 我们仅考察形式幂 $Z^{(n)}(a,0,z)$. 令

$$
\begin{aligned}
&Y^{(0)}(y)=1, \quad Y^{(1)}(y)=\int_0^y \frac{\mathrm{d}\eta}{\beta(\eta)},\\
&Y^{(2)}(y)=2!\int_0^y \beta(\eta)Y^{(1)}(\eta)\mathrm{d}\eta,\\
&Y^{(3)}(y)=3!\int_0^y \frac{Y^{(2)}(\eta)}{\beta(\eta)}\mathrm{d}\eta,\cdots,\\
&\tilde{Y}^{(0)}(y)=1, \quad \tilde{Y}^{(1)}(y)=\int_0^y \beta(\eta)\mathrm{d}\eta,\\
&\tilde{Y}^{(2)}(y)=2!\int_0^y \frac{\tilde{Y}^{(1)}(\eta)}{\beta(\eta)}\mathrm{d}\eta,\\
&\tilde{Y}^{(3)}(y)=3!\int_0^y \beta(\eta)\tilde{Y}^{(2)}(\eta)\mathrm{d}\eta,\cdots.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

于是, 对于实的 $\lambda$ 和 $\mu$ 而 $n=1,2,\cdots$, 则有

$$
Z^{(n)}(\lambda+\mathrm{i}\mu,0,x+\mathrm{i}y)=\lambda\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} x^{n-j}\mathrm{i}^{j Y^{(j)}}(y)+\mathrm{i}\mu\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} x^{n-j}\mathrm{i}^{j\tilde{Y}^{(j)}}(y). \tag{4}
$$

重要的是注意同样的形式推导对于下列方程组所得的结果,

$$
\begin{aligned}
\phi_x &= \beta_1(y)\psi_y,\\
\phi_y &= -\beta_2(y)\psi_x,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中我们并不假定实值函数 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是正的. 为此只需要在公式 (2) 到 (4) 中把 $\beta$ 换为 $\beta_2$、$1/\beta$ 换为 $1/\beta_1$. 这里方程组 (5) 可以是椭圆型的、双曲型的或者混合型的. 作为混合型方程组的一个例子, 考察

$$
\begin{aligned}
\phi_x &= \psi_y,\\
\phi_y &= -y\psi_x.
\end{aligned}
$$

消去 $\phi$ 则引出所谓 Tricomi 方程①

$$
y\psi_{xx}+\psi_{yy}=0.
$$

它在跨音速空气动力学里是重要的. 我们的形式推导提供了一系列的适合这个方程的多项式.

① 这个方程的理论创始于 F. Tricomi 的著名的论文 [1]. 在 L. Bers[3] 里可以找到关于混合型方程的丰富的文献目录.

以相仿的初等方式, 可以处理方程组:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1(x)\phi_x = \beta_1(y)\psi_y,\\ \alpha_2(x)\phi_y = -\beta_2(y)\psi_x.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

下列微分公式和积分公式

$$\phi' = \alpha_1\phi_x \quad \psi' = \psi_x/\alpha_2,$$

$$\varPhi = \int(\alpha_2\phi\mathrm{d}x - \beta_2\psi\mathrm{d}y), \quad \varPsi = \int[(\psi/\alpha_1)\mathrm{d}x + (\phi/\beta_1)\mathrm{d}y]$$

由 (6) 的一组解 $(\phi, \psi)$ 引出方程组

$$\frac{\varPhi_x}{\alpha_2} = \beta_1\varPsi_y, \quad \frac{\varPhi_y}{\alpha_1} = -\beta_2\varPsi_x \tag{7}$$

的解. 若 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta > 0$, 则方程组 (6) 表示函数 $\phi + \mathrm{i}\psi$ 是关于母元 $F = (\alpha/\beta)^{1/2}$, $G = \mathrm{i}(\beta/\alpha)^{1/2}$ 的第二类准解析函数. 容易计算 $\phi F + \psi G$ 的 $(F, G)$ 导函数是

$$(\alpha/\beta)^{1/2}\phi_x + \mathrm{i}(\beta/\alpha)^{1/2}\psi_x = F_1\phi' + G_1\psi',$$

其中

$$F_1 = (\alpha\beta)^{-1/2}, \quad G_1 = \mathrm{i}(\alpha\beta)^{1/2}.$$

这个导函数是 $(F_1, G_1)$ 准解析的, 因为 $\phi'$ 和 $\psi'$ 适合 (7). 于是 $(F_1, G_1)$ 是 $(F, G)$ 的一个后继. 由同样的标志可知 $(F, G)$ 也是 $(F_1, G_1)$ 的一个后继. 所以, 除了 $\alpha$ 是常数的情况外, 这对母元的最小周期是 2.

## 4″.8 准解析函数的一般定义

我们转到准解析函数的一般理论, 并且注意 4″.6 里所定义的 $(F, G)$ 导数可以通过一个极限步骤而得到, 这个极限步骤是通常复变函数求导步骤的一种推广.

确切地说, 设 $w(z)$ 已表示为 4″.6 中 (1) 的形状, 其中 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是固定的复值连续函数, $\mathrm{Im}(G/F) > 0$ 且 $\phi$ 和 $\psi$ 是实值的. 作"差商"

$$\frac{1}{h}[\phi(z+h)F(z) + \psi(z+h)G(z) - \phi(z)F(z) - \psi(z)G(z)], \tag{1}$$

并问当复数 $h$ 按一切可能的方式趋于 0 时这个差商是否有极限. 假定这个极限存在, 那么特别地当 $h = \delta \to 0$ 和 $h = \mathrm{i}\delta \to 0$($\delta$ 为一实变量) 时, 它也应存在. 当然, 所说的这两个极限就是

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}F + \frac{\partial\psi}{\partial x}G \quad 和 \quad \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}F + \frac{\partial\psi}{\partial y}G\right).$$

这两个极限应该相等. 这个条件立即导致 4″.6 中方程 (2). 如果用 $\dot{w}$ 记它们的共同值, 就得到 4″.6 中 (3).

在准解析函数的一般理论里, 由两个母元 $F(z)$, $G(z)$ 出发, 并不假定它们是可微的, 并且如果在一个区域的每个点 $z$ 处比值 (1) 当 $h\to 0$ 时有有限的极限, 则称 4″.6 中函数 (1) 在这个区域上是 $(F,G)$ 准解析的. 如果 $F$ 和 $G$ 都是 Hölder 连续的, 则前边所述诸定理的大多数都仍旧成立. 还可以用 4″.1 中微分方程 (6) 刻画准解析函数; 不过, 一般地说, 它们不再适合形状为 4″.1 中 (4) 的一个方程组, 相似原理也不再成立了.

## 4″.9 拟共形性[①] 和一个一般表示定理

在研究准解析函数的几何性质的时候, 采用第二类准解析函数是方便的. 借助于一个微分不等式, 它是 4″.1 中微分方程 (6) 的一个推理, 可证明这些函数在某种意义上分享解析函数的许多几何性质.

作为平面的映射, 一个复变解析函数在它的导数不等于零的每个点处是共形的. 这个意思是, 在每个这样的点处, 映射在小范围上是一个相似变换：它把无穷小的圆变换为无穷小的圆. 进一步考虑把无穷小圆变换为具有一致有界的离心率的无穷小椭圆的变换是自然的, 事实证明也是很有用的. 这样的映射就叫做拟共形映射.

对于一个具有连续偏导数和不等于零的 Jacobi 式的映射 $w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 方才所说的几何条件可以用下列三个等价的微分不等式

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|w_x\cos\theta+w_y\sin\theta|^2\leqslant Q(u_xv_y-u_yv_x),\tag{1}$$

$$u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\leqslant 2K(u_xv_y-u_yv_x),\tag{1a}$$

$$|w_{\bar{z}}|\leqslant k|w_z|.\tag{1b}$$

中任何一个表达, 这里 $Q\geqslant 1$, $K\geqslant 1$, $0\leqslant k<1$, 且常数 $Q$, $K$, $k$ 由下列关系联系着：

$$K=\frac{1}{2}\left(Q+\frac{1}{Q}\right),\quad k=\frac{Q-1}{Q+1}.$$

容易证明, 每一个第二类准解析函数 $\omega=\phi+\mathrm{i}\psi$, 或者更一般地一个椭圆型方程组

$$\begin{cases} u_x=\alpha_{11}v_x+\alpha_{12}v_y,\\ -u_y=\alpha_{21}v_x+\alpha_{22}v_y\end{cases}$$

① 拟共形映射理论是由 Grötzsch 创始而被 Ahlfors, Lavrentieff, Morrey, Teithmüller 和其他人发展起来的. 在 H. P Künzi[1] 里可以找到一个丰富的文献目录.

的每一个解 $\omega = \phi + \mathrm{i}\psi$ 将适合这些微分不等式, 如果这个方程组是一致椭圆型的, 即如果 $\alpha_{12} > 0$ 且

$$0 < \frac{(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2}{4\alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})^2} < \text{常数};$$

拟共形性的常数 $Q$ 仅依赖于这个不等式中的常数.

以更一般的方式定义拟共形性是有益的. 在不等式 (1) 里本来要那些偏导数是连续的, 代替这个要求, 我们将仅仅假定那些导数存在, 几乎处处适合这些不等式, 且是平方可积的, 并且假定连续函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 对于一个自变量的几乎一切固定的值是另一个自变量的绝对连续函数.

拟共形函数的主要性质可由下列定理表明, 在这里述而不证 (所给的也不是它的最一般的形式):

设 $w(z)$ 是定义在单位圆盘上的拟共形函数. 那么 $w$ 可以表示如下:

$$w(z) = f[\chi(z)], \tag{2}$$

其中 $\zeta = \chi(z)$ 是由 $|z| \leqslant 1$ 到 $|\zeta| \leqslant 1$ 且 $\chi(0) = 0,\ \chi(1) = 1$ 的同胚映射 (一对一而且双连续的映射), 它连同它的逆映射 $\chi^{-1}$ 都适合一个仅依赖于 (1) 中的常数 $Q$ 的一致 Hölder 条件, 并且 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| < 1$ 上是复变量 $\zeta$ 的一个解析函数.

在这个定理里, 任意一个拟共形函数被分解为一个解析函数和一个已知其 Hölder 条件的函数. 在 4″.3 里我们对于适合 4″.1 中微分方程 (4) 的函数推出了有点相仿的分解 (4″.3 中方程 (1)). 不难证明, 对于适合下列取某常数 $k'$ 的不等式

$$|w_{\bar{z}}| \leqslant k'|w| \tag{3}$$

的函数, 4″.3 中同一的分解式 (9) 成立. 这两个结果 —— 微分不等式 (3) 的解的相似原理和拟共形函数的分解定理 (2)—— 都是一个更一般的表示定理的特殊情况, 现在我们就给出这个定理, 仍然不作证明①.

设函数 $w(z)$ 在单位圆盘上有定义且适合微分不等式

$$|w_{\bar{z}}| \leqslant k|w_z| + k'|w| + k''. \tag{4}$$

(这里 $k < 1$ 且这些偏导数和前边一样适合某些条件.)那么函数 $w$ 可以表示如下:

$$w(z) = \mathrm{e}^{s(z)} f[\chi(z)] + s_0(z), \tag{5}$$

其中 $\zeta = \chi(z)$ 是由单位圆盘到它自身上的一个同胚映射, $\chi(0) = 0$ 且 $\chi(1) = 1$; $s(z)$ 和 $s_0(z)$ 在闭单位圆盘上是连续的, 在其周界上是实的且在 $z = 1$ 上为零, 并且 $f(\zeta)$

① 表示式 (30) 是 C. B. Morrey[3] 给出的而表示式 (5) 是 L. Bers and L. Nirenberg[1] 给出的. 并参考 B. V. Boyarskii[1].

是复变量 $\zeta$ 的解析函数. 函数 $s$, $s_0, \chi$ 和逆同胚映射 $\chi^{-1}$ 都是有界的并有仅依赖于 (4) 里的常数的 Hölder 连续模 (特殊情况: 若 $k''=0$, 则 $s_0\equiv 0$).

这个表示定理的重要性在于下述事实: 具有有界系数的一个一致椭圆型方程组

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}v_x+\alpha_{12}v_y+\beta_{11}u+\beta_{12}v+\gamma_1,\\ -u_y &= \alpha_{21}v_x+\alpha_{22}v_y+\beta_{21}u+\beta_{22}v+\gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

的每一组解必然适合形状为 (4) 的一个微分不等式. 特别是, 若方程组是齐次的 $(\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 0)$, 则由表示定理可知解是具有 唯一延拓性质 的: 它不能在一个开集上为零而不恒等于零. 这个结论是 $4''.4$ 里所讨论的 Carleman 定理的一个推广 (但不是直接的推论).

## $4''.10$ 一个非线性边值问题

前节里所述的表示定理可以用来获得非线性椭圆型方程的边值问题的先验估计和存在性定理. 我们在这里仅考虑一个比较简单的例子以资说明.

我们要解形式为

$$a(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{xx}+2b(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{xy}+c(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{yy}=0 \tag{1}$$

的一个拟线性方程的 Neumann 问题. 假设系数 $a$, $b$, $c$ 在 $x^2+y^2<1$ 上和对 $\phi$, $\phi_x$, $\phi_y$ 的一切值有定义且适合一个一致的 Hölder 条件, 并且方程是一致椭圆型的, 即①

$$a>0,\quad ac-b^2\equiv 1,\quad a+c\leqslant \text{常数}. \tag{2}$$

令 $\tau(z)$ 为定义在单位圆上且适合一个一致 Hölder 条件的实值函数. Neumann 问题就是寻求这个方程的一个解 $\phi$, 要它在单位圆盘上有定义且是连续可微的, 并且在其边界上适合条件

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial n}=x\phi_x+y\phi_y=\tau+k, &&\text{当 } |z|=1,\\ &\phi=0, &&\text{当 } z=1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $k$ 是一个待定的常数.

我们将证明, 这个问题恒有一个解. 证明的基础如下.

先验估计: 假定已知 Neumann 问题的一个解. 那么函数 $\phi$ 和它的一阶导数 $\phi_x,\phi_y$ 是有界的, 而且这些一阶导数适合 Hölder 条件, 这个界值和 Hölder 条件仅依赖于(2) 中的常数和已知的边界函数 $\tau$.

① 这个例子是从 L. Bers and L. Nirenberg[2] 取来的.

证明：首先注意一阶导数的界值暗含着函数的一个界值. 其次来估计常数 $k$. 因为方程 (1) 的一个非常数解不能在一个内点上取得它的极大值或极小值, 所以法向导数在边界上必然要变号. 因此 $k$ 不可能超过 $|\tau|$ 的最大值. 于是我们知道了函数 $\tau(z)+k$ 的一个界值和一个 Hölder 连续模. 在边界的某些点上, $\phi$ 的切向导数必等于零. 在这个点上

$$w \equiv \phi_x - \mathrm{i}\phi_y = \bar{z}(\tau + k).$$

因此, 只需给 $w$ 找到一个 Hölder 连续模. 这个函数可以写成下边的样子：

$$w = u + \mathrm{i}v,$$

其中 $u = \phi_x,\ v = -\phi_y$. 因为方程 (1) 等价于

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2b}{a}v_x + \frac{c}{a}v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

所以函数 $w(z)$ 是拟共形的, 它有一个仅依赖于 (2) 的常数. 因此, $w(z)$ 有形式为 4″.9 中 (2) 的表示式. 边界条件 (3) 现在可以写成

$$\mathrm{Re}[zw(z)] = \tau(z) + k, \quad |z| = 1,$$

即

$$\mathrm{Re}[\chi^{-1}(\zeta)f(\zeta)] = \tau[\chi^{-1}(\zeta)] + k, \quad |\zeta| = 1.$$

由于已知映射 $\zeta = \chi(z),\ z = \chi^{-1}(\zeta)$ 的 Hölder 连续性, 可以把这个条件写成

$$\mathrm{Re}[\zeta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\zeta)} f(\zeta)] = \sigma(\zeta), \quad |\zeta| = 1,$$

其中 $\lambda$ 是实的且函数 $\lambda$ 和 $\sigma$ 有已知的界值和 Hölder 连续模. Privaloff 的定理 (述证于后, 参看 4″.14) 的一个容易的推广给出 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leqslant 1$ 上的一个 Hölder 条件. 由 $w(z) = f[\chi(z)]$ 可得关于 $w$ 的一个 Hölder 条件.

现在对于形如 (1) 的一个线性方程 (其系数 $a,\ b,\ c$ 仅依赖于 $x$ 和 $y$) 来考虑 Neumann 问题, 并首先陈述.

存在性和唯一性定理：对于一个形状为 (1) 的线性一致椭圆型方程, Neumann 问题有解且仅有一个解.

前边已经指出过, 非常数解的法向导数在单位圆上必定变号. 由此立即可得唯一性的证明. 另一方面, 存在性的论断则是下列引理的推论.

连续性引理：考虑方程序列

$$a^{(n)}(x,y)\phi_{xx} + 2b^{(n)}(x,y)\phi_{xy} + c^{(n)}(x,y)\phi_{yy} = 0. \tag{4}$$

我们假定所有的方程都是按相同的常数为一致椭圆型的, 并且它们的系数适合相同的 Hölder 条件. 我们还假定当 $n \to \infty$ 时, 这些系数在单位圆盘内的一切点上分别收敛于方程

$$a(x,y)\phi_{xx} + 2b(x,y)\phi_{xy} + c(x,y)\phi_{yy} = 0 \tag{5}$$

的系数. 对于每个 $n$ 令 $\phi^{(n)}$ 为方程 (4) 的适合 Neumann 问题的边界条件的解. 那么, 函数序列 $\phi^{(n)}$ 连同它的各个一阶导函数在闭单位圆盘上一致收敛于方程 (5) 的 Neumann 问题的解.

证明: 由先验估计知所有的函数 $\phi^{(n)}$, $\phi_x^{(n)}$, $\phi_y^{(n)}$ 是一致有界且同等连续的. 所以由 Arzela 定理可知我们可以选出一个子序列 $\{\phi^{(n)}\}$, 要它和它的一阶导函数一致收敛于函数 $\phi(x,y)$. 显然, 这个函数适合 Neumann 问题的边界条件. 另一方面, 由 Schauder 估计 (参看第 4 章 4.7) 可知在单位闭圆盘的每个闭子域上函数 $\phi^{(n)}$ 的二阶导函数是一致收敛的. 所以, 这个极限函数适合方程 (5). 由已经证明了的唯一性命题, 反推得知子序列的选择是不必要的并且 $\phi^{(n)} \to \phi$.

由连续性引理可以推出, 如果能够用已经解决了的 Neumann 问题的方程的系数逼近线性方程 (5) 的系数, 那么这个方程的 Neumann 问题也是可解的. 我们知道, 对于具有非常光滑的系数的方程来说这是可以办得到的, 譬如, 用积分方程法 (参看第 4 章, 4.10). 于是, 解的存在性得到了一般的证明 (我们指出, 用同样的方法可以证明一致椭圆型方程解的存在性, 方程的系数不仅不必是 Hölder 连续的, 它们甚至可以是间断的).

现在我们转到方程 (1), 令 $\mathfrak{B}$ 表示闭单位圆盘上的连续可微函数 $\varPhi$ 的 Banach 空间, 其范数为

$$\|\varPhi\| = \max|\varPhi| + \max|\varPhi_x - \mathrm{i}\varPhi_y|.$$

令 $\varLambda$ 表示由那些函数构成的子集, 它们适合 Neumann 问题的边界条件和对于这个问题的解所作的先验估计. 容易看出 $\varLambda$ 是 $\mathfrak{B}$ 的凸列紧子集. 设 $\varPhi$ 为属于 $\varLambda$ 的任何一个函数. 借助于这个函数, 我们构成线性方程

$$\begin{aligned}&a(x,y,\varPhi(x,y),\varPhi_x(x,y),\varPhi_y(x,y))\phi_{xx}\\&\quad+2b(x,y,\varPhi(x,y),\varPhi_x(x,y),\varPhi_y(x,y))\phi_{xy}\\&\quad+c(x,y,\varPhi(x,y),\varPhi_x(x,y),\varPhi_y(x,y))\varPhi_{yy}=0,\end{aligned}$$

并用 $\phi$ 表示这个线性方程的 Neumann 问题的唯一地确定的解. 若令

$$\phi = T(\varPhi), \tag{6}$$

则 $T$ 是由 $\varLambda$ 到 $\varLambda$ 的一个映射. 利用上述连续性引理不难证明这个映射是连续的. 由 Schauder 不动点定理可知映射 $T$ 必有一个不动点. 换句话说, 存在着适合 $\phi = T(\phi)$ 的一个函数 $\phi$. 这个函数就是所求的 Neumann 问题的解.

这个方法适用于更一般的情况. 例如, 我们能够证明关于形状为

$$\begin{aligned}a(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{xx}&+2b(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{xy}\\&+c(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\phi_{yy}=d(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\end{aligned}$$

的非线性方程的 Neumann 问题的可解性, 这个方程是一致椭圆型的, 并且它的右端适合形式如下的一个不等式

$$|d(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)| \leqslant k'(|\phi_x|+|\phi_y|)+k''.$$

在这个情况下, 我们要利用更一般的 4″.9 中表示式 (5) 而不是利用 4″.9 中表示式 (2) 去推导适当的估计式.

## 4″.11 Riemann 映射定理的一个推广

映射的拟共形性概念很自然地导致 Riemann 映射定理的一个深远的推广. Riemann 映射定理断言, 一个给定的单连域, 例如说 —— 为了简单起见 —— 以一条 Jordan 曲线为边界的区域, 可以共形地映射到另一个给定的 Jordan 域上, 即映射的方式是把无穷小圆变为无穷小圆. 还可以选取这个映射使得一个区域的边界上的三个给定的点变为另一个区域的边界上的三个给定的点.

自然要问, 能否把一个给定的 Jordan 域映射到另一个 Jordan 域上而在每一点处适合下述条件：一个具有已知的离心率 $e$ 和已知的长轴斜率 $\theta$ 的无穷小椭圆变为另一个具有指定的离心率 $e'$ 和指定的长轴斜率 $\theta'$ 的无穷小椭圆. 我们可以要求数值 $e, e', \theta, \theta'$ 既依赖于所说的点又依赖于它的象点. 不难证实, 在一定的连续性前提下, 这样一个映射的几何条件可以用解析的语言表达出来, 即映射函数 $w(z)=u+\mathrm{i}v$ 适合一个椭圆型的拟线性偏微分方程组, 其形式为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \alpha_{11}(x,y,u,v)v_x+\alpha_{12}(x,y,u,v)v_y, \\ -u_y &= \alpha_{21}(x,y,u,v)v_x+\alpha_{22}(x,y,u,v)v_y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

我们假定这个方程组的系数都是 Hölder 连续函数并且这个方程组是一致椭圆型的. 在这些条件下, 下边的结论成立 (首先被 Z. Schapiro① 证明)：利用适合方程组 (1) 的一对函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$, 可以把 $Z$ 平面上一个给定的 Jordan 域 $D$ 映射到 $w$ 平面上的一个给定的 Jordan 域 $D'$ 上. 可以选取这个映射使 $D$ 的边界上三个给定的点变为 $D'$ 的边界上三个给定的点.

可以用前节里所说的方法证明这个定理. 关于 4″.9 中拟共形函数的表示公式 (2) 能提供必要的先验估计.

## 4″.12 关于极小曲面的两个定理

在前边的讨论里强调了复变解析函数与椭圆型偏微分方程的解之间的相似关系. 然而, 在非线性方程的情况里出现了新的现象, 它在解析函数论里却没有相当

① 参考 Z. Schapiro[1]. 许多作者都曾经论述过这个问题及其推广; 大家可以去查阅 B. V. Boyarskii[1] 里的文献目录.

的东西. 举出关于最简单而又最重要的非线性方程 —— 极小曲面方程 (参考第 1 章 1.6)：

$$(1+\phi_y^2)\phi_{xx}-2\phi_x\phi_y\phi_{xy}+(1+\phi_x^2)\phi_{yy}=0 \tag{1}$$

的解的两个定理来说明这个情况. 第一个定理 (出于 S. Bernstein) 说, 方程 (1) 在整个平面上的每一个解都是一个线性函数. 注意, 对于 Laplace 方程的解来说, 仅当事先知道所说的解具有有界的导函数时这个定理的论断才是正确的, 在那种情况下, 论断得自关于整解析函数的著名的 Liouville 定理.

相仿地, 关于可去奇异性的 Riemann 定理, 如前所见它也适用于线性椭圆型方程, 但是对于极小曲面方程却要在很强的形式下才成立 (L. Bers).

方程 (1) 的定义在一个点的去心邻域上的一个单值解, 在该点处有可去奇异性. 换句话说, 可以定义此解在该点上的值使得这解在那里是正则的. 注意并不事先要求解是有界的.

这里将不给出这些定理的证明, 而仅指出证明的方法之一, 它又要牵涉到复变函数的应用①.

## 4″.13　具有解析系数的方程

至此我们已经初步讨论了函数论方法对椭圆型线性偏微分方程的应用, 对于方程中系数的限制是非常宽泛的. 在系数本身为二元解析函数的情况下, 根据完全不同的途径把复变函数理论用于解的研究.

考虑线性偏微分方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}+\alpha(x,y)\phi_x+\beta(x,y)\phi_y+\gamma(x,y)\phi=0, \tag{1}$$

其中的系数是实解析函数并因而也可以对这些自变量的复数值予以定义. 为简单计, 假设这些系数是 $x$ 和 $y$ 的整解析函数. 我们把复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 当做自变量; 用这些新的变量来写出 (1), 我们得到一个形式如下的方程

$$\phi_{z\bar{z}}+A\phi_z+B\phi_{\bar{z}}+C\phi=0, \tag{2}$$

形式上 这是一个典型的双曲型方程. 注意这样作的时候我们也必须考虑复值的解. 在这个步骤中我们并未失掉任何解, 因为, 如前边已经指出的 (参考第 4 章 4.7.4), 系数为解析函数的线性椭圆型方程的一切解, 本身都是解析函数.

众所周知, 可以把实域上的典范双曲型方程的全部的解用一个包含所谓这个方程的 Riemann 函数和一个任意的一元函数的积分表达出来 (见第 5 章). 在复域上

① L. Bers[4] 里给出了关于这个定理及其推广的参考文献目录. 并参考 R. Finn[1] 和 R. Osserman[1]. Johannes Nitsche[1] 与 [2] 给出过特别简单的证明.

也可以作出同样的形式推导. 于是, 我们得到把任一单元复变函数 (当然必须假定它是解析的) 变换为椭圆型微分方程 (2) 的一个解的积分算子. 在 Laplace 方程的情况, 这个算子不是一个积分算子; 它仅只要取一个解析函数的实部.

我们仅仅用非常一般的语句描述了积分算子法. 这个方法已经被 S. Bergman, I. Vekua 以及他们的后继者们予以发展并应用到许多特别的情况. 关于细节和实际的公式, 以及向高阶微分方程和多于两个自变量的微分方程的推广, 请参考文献①.

## 4″.14 Privaloff 的定理的证明②

在这一节里给出 4″.3 中所述 Privaloff 的定理的一个证明.

考虑定义在 $|z|<1$ 上的一个解析函数 $g(z)=U+\mathrm{i}V$. 虚部 $V(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上的连续的, 并且对于一切实的 $\theta,\theta'$ 和某个 $\alpha, 0<\alpha<1$,

$$|V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'})|\leqslant H|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}|^{\alpha}.$$

对于某个固定的 $\theta'$, 用 $\varPhi(z)$ 记在单位圆盘上是单值的调和函数 $\varPhi(z)=\mathrm{Re}[(1-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta'})^{\alpha}]$. 可以定义这个函数使得 $\varPhi(0)=1$. 于是 $\varPhi(z)=|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}|^{\alpha}\cos\alpha\nu$, 其中 $\nu$ 是由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ 出发到点 0 的直线和到点 $z$ 的直线之间的夹角. 于是, 不等式

$$-\frac{H\varPhi(z)}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha\pi}\leqslant V(z)-V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'})\leqslant\frac{H\varPhi(z)}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha\pi}$$

在单位圆上成立, 并且由调和函数的极值原理知道它也在单位圆盘上处处成立. 特别地, 调和函数 $V(z)-V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'})$ 在圆盘 $|z-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}|<1-r$ 上的模不超过

$$\frac{H}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha\pi}[2(1-r)^{\alpha}].$$

因而导函数 $V_x,V_y$ 的绝对值在这个圆盘的中心不大于

$$\frac{H}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha\pi}2^{\alpha}(1-r)^{\alpha-1}.$$

但是 $g'(z)=V_y+\mathrm{i}V_x$, 所以由于 $\theta'$ 是任意的而有

$$|g'(z)|\leqslant\frac{4H}{\cos\dfrac{1}{2}\alpha\pi}\frac{1}{(1-|z|)^{1-\alpha}}.$$

① 参考 S. Bergman[1]. 在 M. Z. Krzywoblocki[1] 和 I. vekua[2] 里有丰富的文献目录.

② 参考 J. Privaloff[1]. 在 A. Korn[1] 里已经出现了这个定理. 这里所给的证明本于 Bers. 在 S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg [1] 这篇论文第 3 节里给出了此定理的一个推广.

利用这个不等式容易证明

$$|g(z_1)-g(z_2)|=\left|\int_{z_1}^{z_2} g'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant kH|z_1-z_2|^{\alpha},$$

其中 $k$ 仅依赖于 $\alpha$.

现在我们陈述 Privaloff 的定理的一个稍稍的推广, 它是有用的 (参看 4″.10): 设 $\lambda(z)$ 是定义在单位圆 $|z|=1$ 上的一个实值函数, 已知它的一个具有小于1的指数的 Hölder 连续模. 设 $g(z)$ 是定义在单位圆盘上且在其周界上为连续的一个解析函数. 假定函数 $\sigma(z)=\mathrm{Re}[g(z)z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(z)}]$ 在单位圆上适合一个一致的 Hölder 条件. 那么 $g(z)$ 在闭单位圆盘上适合一个一致的 Hölder 条件, 它仅依赖于 $\lambda$ 和 $\sigma$ 的界值与 Hölder 条件.

为了证明这个定理, 设 $h(z)$ 是定义在单位圆盘上的一个解析函数, 它的虚部在单位圆上和 $\lambda(z)$ 相同. 因为可以解调和函数的 Dirichlet 问题, 所以这样的函数是存在的. 如果 $\mathrm{Re}h$ 在原点处为零, 那么这个函数 $h$ 就被唯一地确定了. 并由 Privaloff 的定理知道了它的一个界值和 Hölder 条件. 解析函数

$$g_1(z)=g(z)z\mathrm{e}^{h(z)}$$

在单位圆上适合边界条件 $\mathrm{Re}g_1(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}h}\sigma$. 于是, 由 Privaloff 的定理, 可以给函数 $g(z)$ 在单位圆上找到一个 Hölder 连续模, 然后再次应用该定理, 就找到在整个单位圆盘上的 Hölder 连续模.

## 4″.15 Schauder 不动点定理的证明

Schauder 不动点定理是 Brouwer 的一个著名定理到无限维空间的一个推广. Brouwer 定理说, $n$ 维 Euclid 空间里一个有界闭凸集到它自身的一个连续映射必有一个不动点. 在大多数的拓扑学课本里都可以找到这个定理的证明.

因为 Schauder 不动点定理谈的是 Banach 空间里的映射, 先回忆一下下面这个名词的含义.

实数域上的一个线性矢量空间是一些元素 (称之为点) 的一个集合, 它们可以相加, 可以和实数相乘, 并且这两个运算遵守通常算术里的规律. 更确切地说, 若 $x,y,z,\cdots$ 表示这个空间里的元素而 $\lambda,\mu,\nu,\cdots$ 表示实数, 我们要求: $x+y=y+x$; $x+(y+z)=(x+y)+z$; 有一个元素 0, 它适合 $x+0=x$; 方程 $x+y=0$ 对于每个 $y$ 有唯一的解 (记为 $-y$); $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$; $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$; $1x=x$. 如果对于每一个元素 $x$ 指定这样一个实数 $||x||:||x||\geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 时 $||x||=0$, $||\lambda x||=|\lambda|||x||$, 且 $||x+y||\leqslant||x||+||y||$, 则称此线性空间为赋范的. 在

一个赋范空间里, 两个元素 $x$ 和 $y$ 之间的距离被定义为 $||x-y||$. 如果 $||x_n-x|| \to 0$, 则称元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于元素 $x$. 这个空间里的一个集合 $\Lambda$ 叫做闭集, 如果 $\Lambda$ 里每一个元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\Lambda$ 里的一个元素 $x$, 即 $||x_n-x|| \to 0, x$ 属于 $\Lambda$.

如果每一个 Cauchy 序列都收敛, 即对于每一个那样的元素序列 $\{x_n\} : ||x_n - x_m|| \to 0$, 当 $m, n \to \infty$, 都有一个元素 $x$ 适合 $||x_n - x|| \to 0$, 则称赋范矢量空间为完备的, 或称之为一个 Banach 空间.

由一个 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 到另一个 Banach 空间或到实数域上的映射 (或函数) 叫做连续的, 如果自变元的充分小改变引起函数值的任意小的改变.

Banach 空间里的元素的一个集合 $\Lambda$ 叫做凸的, 如果它包含着连接属于它的任两个点的直线段, 确切地说, 如果 $x$ 和 $y$ 是 $\Lambda$ 里的元素, $\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$ 是适合 $\lambda + \mu = 1$ 的实数, 则形状为 $\lambda x + \mu y$ 的一切元素都属于 $\Lambda$.

Banach 空间里元素的一个集合 $\Lambda$ 叫做列紧的, 如果 $\Lambda$ 里的元素的每一个无穷序列都包含着一个收敛于 $\Lambda$ 的一个元素的子序列.

设 $\Lambda$ 为 Banach 空间里的元素的任一个集合. 它被包含在某个闭凸集里, 例如说在整个空间里. 因为任意多个闭凸集的交集显见仍是一闭凸集, 所以存在着包含 $\Lambda$ 的最小闭凸集 $\hat{\Lambda}$, 称之为 $\Lambda$ 的凸壳. 特别是, 如果 $\Lambda$ 是由有限多个点组成的, 那么 $\Lambda$ 的凸壳就处于 Banach 空间的一个有限维子空间里, 并且可以认为是 Euclid 空间里的一个有界闭凸集.

现在设 $\Lambda$ 是 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 的一个闭凸集, 并设 $T$ 是 $\Lambda$ 到它自身的一个连续的但不必是线性的映射. Schauder 不动点定理断言, 这个映射必有一个不动点.

为了证明这个定理, 我们首先构造一个辅助的映射 $S$, 它把 $\Lambda$ 连续地映射到 $\Lambda$ 的一个有限维的闭凸子集里①, 并且对于 $\Lambda$ 里的每一个 $x$ 有附加性质

$$||S(x) - x|| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon$ 是一个预先指定的正数.

这个构造可如下进行：能够在 $\Lambda$ 里找到一个有限的点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_N, \tag{1}$$

要它对于 $\Lambda$ 里每一个 $x$, 不等式 $||x - x_j|| < \frac{1}{2}\epsilon$ 对于某个 $j$ 值成立. 实际上, 设 $x_1$ 为 $\Lambda$ 里的任一点, 如果所有其余的点和 $x_1$ 的距离都不超过 $\frac{\epsilon}{2}$, 那么我们的工作就完成了. 不然, 就会有一个适合 $||x_1 - x_2|| \geqslant \frac{1}{2}\epsilon$ 的点 $x_2$. 如果不是 $\Lambda$ 的一切点都和 $x_1$ 或者 $x_2$ 的距离都小于 $\frac{1}{2}\epsilon$, 那么在 $\Lambda$ 里还会有一个 $x_3$, 它适合

① 我们在这里说到 Banach 空间里的一个有限维集合时, 意思是包含在一个有限维子空间里的一个集合.

$||x_1 - x_3|| \geqslant \frac{1}{2}\epsilon, ||x_2 - x_3|| \geqslant \frac{1}{2}\epsilon$. 如此继续下去, 就作出了序列 (1). 注意这个过程在有限多步之后必然要中断, 因为否则将会得到属于 $\Lambda$ 的一个这样的无穷点列, 其中任何两点的距离都大于 $\frac{1}{2}\epsilon$. 这样的一个序列是不会包含收敛的子序列的, 这就和 $\Lambda$ 的列紧性发生了矛盾.

构造出序列 (1) 之后, 对于 $\Lambda$ 里的 $x$ 定义

$$\mu_j(x) = \begin{cases} ||x - x_j||, & 若 ||x - x_j|| < \frac{1}{2}\epsilon, \\ \epsilon - ||x - x_j||, & 若 \frac{1}{2}\epsilon < ||x - x_j|| < \epsilon, \\ 0, & 若 ||x - x_j|| > \epsilon, \end{cases}$$

$$\lambda_j(x) = \frac{\mu_j(x)}{\sum_{\nu=1}^{N} \mu_\nu(x)},$$

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) x_j.$$

易见映射 $S(x)$ 是连续的. 它把 $\Lambda$ 映射到点集 (1) 的凸壳 $\Lambda_0$ 上. 而且, 由于 $\lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ 和当 $||x - x_j|| \geqslant \epsilon$ 时 $\lambda_j(x) = 0$, 我们看出

$$\begin{aligned} ||x - S(x)|| &= \left|\left| \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) x - S(x) \right|\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) ||x - x_j|| < \epsilon. \end{aligned}$$

其次考虑联合映射 $ST$, 它把 $\Lambda_0$(点集 (1) 的凸壳) 连续地映射到自身. 由 Brouwer 定理知道这个映射有一个不动点 $y$, 于是, 有 $S[T(y)] = y$ 和 $||T(y) - y|| < \epsilon$.

由前边的结果得知, 对于每一个 $n$, 我们能够在 $\Lambda$ 里找到一个点 $y_n$, 使得 $||T(y_n) - y_n|| < \frac{1}{n}$. 由于 $\Lambda$ 是列紧的, 所以有子序列 $\{y_{n_j}\}$, 它收敛于 $\Lambda$ 里的一个点 $y$. 由映射 $T$ 的连续性而知

$$T(y) = \lim T(y_{n_j}) = y.$$

这个点 $y$ 就是所要找的不动点.

Schauder 不动点定理还有一个更一般的形式, 它断言, 由 Banach 空间里任何一个闭凸集到它自己的一个列紧子集的一个连续映射必有一个不动点. 通过证明任一列紧集的凸壳是列紧的, 可以由上述结果证明这个论断. Tychonoff 曾经证明过一个更一般的结论①.

① 参考 N Dunford and J Schwartz[1], 456 页.

# 第 5 章　两个自变量的双曲型微分方程

## 5.0　引　　言

本章与第 6 章将讨论关于波的传播的双曲型方程. 在本章中论述关于两个自变量 $x, y$ 或 $x, t$ 的问题 (下面各节中常以 $t$ 代 $y$ 以强调指出 $t$ 是时间变量). 第 6 章将论述多于两个自变量的问题. 为了统一起见, 对于在第 3 章中已经接触过的一些题材, 有必要稍加改变地重复叙述一下.

根据研究这一问题的历史发展程序①, 在本章的开头将讨论单个的双曲型方程. 特别是二阶的. 但后面将着重讨论双曲型微分方程组, 尤其是一阶的方程组. 这不仅使讨论更一般和简练, 而且也直接联系许多物理问题, 因为这些物理问题往往是用这种方程组表示出来的.

主要的结果是将把两个自变量的双曲型方程的初值问题也像常微分方程问题那样完整地加以解决. 因为这种方程的解可用迭代法构造出来, 和对常微分方程所用的方法十分相似.

在第 1、2、3 章中讨论过的特征概念, 在双曲型问题的论述中不仅对两个自变量的而且也对多个自变量的情形起着决定性的作用 (见第 6 章). 首先温习一下以前对两个自变量的特征的讨论并加以补充, 然后把这个理论用于求解基本的初值问题.

特征曲线 $O$ 具有如下的一些性质, 这些性质中的每一个都可用作特征的定义 (参考第 1、2、3 章).

1) 沿着特征曲线, 微分方程 (对方程组来说, 是各方程的线性组合) 表示一个内微分方程.

1′) 在特征曲线上的初始数据不能随便指定, 而必须满足相容条件, 如果要把这些数据扩展为“积分带”的话.

2) 解的间断点 (以后将详述的一个性质) 除了沿特征曲线出现外其他地方不能出现.

3) 特征曲线是解的唯一可能的“分支线”, 即它们是对于同样的初值问题可以有若干解通过的那种曲线.

对于一阶拟线性微分方程组, 初始数据或“Cauchy 数据”就是未知函数在初

① 参考 R. Sauer[1].

始曲线上的数值. 第一个性质是由以下的基本事实得来的：一个方向叫做在 $P$ 点的特征方向, 如果存在着微分方程的一个线性组合, 在这个组合里所有未知函数在点 $P$ 处的导数都是沿着这个方向的 (如果一个方程组能用另一个线性的等价方程组代替, 这个等阶方程组中的每个微分方程在每个点处都含有只在一个“特征”方向上的微分, 那么原来的那个方程组就是双曲型的). 对于双曲型方程组来说, 第二和第三个性质也可由方程的特定形式得出.

将看到单个的高阶微分方程的初值问题总可以化为具有特别选定的初始条件的一阶微分方程组的问题 (参考第 1 章 1.7). 虽然如此, 还是要先扼要地讨论一下单个的微分方程 (主要是二阶的), 而不化为方程组 (读者若主要关心理论的系统叙述, 可略去 5.1 中的许多细节).

## 5.1 关于主要是二阶的微分方程的特征

### 5.1.1 基本概念. 拟线性方程

考察拟线性二阶微分算子

$$L[u] \equiv ar + bs + ct \tag{1}$$

和微分方程

$$L[u] + d \equiv ar + bs + ct + d = 0, \tag{2}$$

其中

$$r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy},$$

而 $a, b, c, d$ 是所论域中量 $x, y, u, p = u_x, q = u_y$ 的已知函数 (假定方程中出现的所有函数及导数都是连续的, 除非有相反的说明).

同第 2 章所述, 由初值问题开始, 将初始带扩展为积分带. 定义一阶带 $C_1$ 如下：参数 $\lambda$ 的两个函数 $x = X(\lambda)$ 和 $y = Y(\lambda)$ 确定 $x, y$ 平面上的一条曲线 $C_0$; 它们和函数 $u = U(\lambda)$ 一起在 $x, y, u$ 空间里确定一条“在 $C_0$ 之上”的曲线 $\bar{C}_0$. 切于曲线 $\bar{C}_0$ 的平面由两个附加的函数 $P(\lambda)$ 及 $Q(\lambda)$ 确定 (具有以 $P, Q, -1$ 为方向数的法线), 这两个函数满足“成带关系”

$$U = P\dot{X} + Q\dot{Y}, \tag{3}$$

它表示曲线 $\bar{C}_0$ 和切平面是平行的 (这里字母上的点表示对参数 $\lambda$ 求导), 始终假定

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \neq 0.$$

如果让 $\bar{C}_0$ 上的 $U, P, Q$ 和已给曲面 $u(x, y)$ 在 $\bar{C}_0$ 上 $u, p, q$ 的值等同起来, 即 $U(\lambda) = u(X(\lambda), Y(\lambda)), P(\lambda) = u_x(X(\lambda), Y(\lambda)), Q(\lambda) = u_y(X(\lambda), Y(\lambda))$, 那么曲面 $u(x, y)$ 就

引出了基线 $C_0$ 上的这样一条带 $C_1$①. 对于曲面 $u(x,y)$ 上的一条带, 当意义不至于含混时, 把 $U,P,Q$ 及 $X,Y$ 写成 $u,p,q$ 及 $x,y$.

把 $x,y$ 平面上的基线 $C_0$ 用关系式 $\phi(x,y)=0$ 表示常常是有用的. 假定 $x,y$ 平面上的曲线 $C_0$(同样, 也假定曲面 $u=u(x,y)$ 上的曲线 $\bar{C}_0$) 划分出两个区域 $\phi<0$ 及 $\phi>0$. 也假定 $\phi=0$ 是一条正则曲线, 即 $\phi_x$ 和 $\phi_y$ 不同时为 0.

进一步用三个附加函数 $R(\lambda),S(\lambda),T(\lambda)$ 来定义二阶带 $C_2$, 这三个函数对应于通过 $C_1$ 的曲面 $u(x,y)$ 的二阶导数 $r,s,t$, 并满足成带关系

$$\dot{P}=R\dot{x}+S\dot{y},\ \dot{Q}=S\dot{x}+T\dot{y}.$$

对于微分方程 (2) 的基本初值问题② 可叙述如下：给定一条一阶带 $C_1$, 求 (2) 的解 $u(x,y)$ 使得曲面 $u(x,y)$ 包含带 $C_1$. 当然要假设确定 $C_1$ 的 $\lambda$ 的诸函数具有一阶的连续导数, 如果需要的话, 也假设它们具有高阶的连续导数.

不立即针对初值问题来讨论, 而提出如下稍宽泛的问题：关系式 (3) 和 (2) 允许将已给带 $C_1$ 唯一地扩展为满足 (2) 的带 $C_2$ 吗? 这样的带 $C_2$ 叫做积分带.

把对于积分带 $C_2$ 的关系式写成

$$\dot{p}=r\dot{x}+s\dot{y},\dot{q}=s\dot{x}+t\dot{y},$$

得到关于沿 $C_1$ 的 $r,s,t$ 的三个方程的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}&ar+bs+ct=-d,\\&\dot{x}r+\dot{y}s=\dot{p},\\&\dot{x}s+\dot{y}t=\dot{q}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

结果, 对于 $C_1$ 的每个点 $P$ 有如下的两岐命题：或者对于 $\bar{C}_0$ 上的每个点 $P$ 有

$$Q\equiv\begin{vmatrix}a&b&c\\\dot{x}&\dot{y}&0\\0&\dot{x}&\dot{y}\end{vmatrix}\equiv a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2\neq 0,$$

在此情形下, $C_1$ 叫做自由带, 并且沿 $C_0$ 的二阶导数 $r,s,t$ 由带 $C_1$ 及微分方程唯一地确定; 或者在 $\bar{C}_0$ 的某个点 $P$ 处有

$$Q\equiv a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0,\tag{5}$$

① 成带关系 (3) 说明积分曲面 $u(x,y)$ 含有这条带.

② 像第 2 章那样, 由两个自变量 $x,y$ 摹想出三维 $x,y,u$ 空间的解, 带和特征是有用的. 但是将着重于自变量 $x,y$ 的平面上, 而把 $x,y,u$ 空间的带或曲线看成是 $x,y$ 平面上附有 $u,p,q,\cdots$ 等值的曲线. 在上下文清楚的时候, 可以根据方便随意采用这些定义中的一个.

在这种点 $P$ 处, 即在这种适合“特征条件”的点处, 说诸带函数形成一个特征元素.

以下假定, 或者所考虑的整个带是自由的, 或者它只由特征元素组成. 在第二种情形下的带叫做特征带(参阅第 3 章 3.2).

若 $C_1$ 是自由的, 即若沿 $\bar{C}_0$ 处处有 $Q \neq 0$, 则积分带 $C_2$ 是作为 $C_1$ 的扩展而唯一确定的. 再者, 将 (4) 微分, 得出沿 $\bar{C}_0$ 的高阶积分带也都是唯一确定的. 例如, 对于三阶导数 $r_x, s_x, t_x$, 得到三个方程:

$$
\begin{aligned}
&ar_x + bs_x + ct_x = -a_x r - b_x s - c_x t - d_x, \\
&\dot{x} r_x + \dot{y} s_x = \dot{r}, \\
&\dot{x} s_x + \dot{y} t_x = \dot{s}.
\end{aligned}
$$

其右边是已知的而左边具有不等于 0 的行列式 $Q$.

若沿 $\bar{C}_0, Q \equiv 0$, 即若一阶带 $C_1$ 完全由特征元素组成, 则行列式 (5) 等于 0 表示系数只依赖于 $x, y, u, p, q$ 的方程组 (4) 的左边三式之间有线性关系, 因此在 (4) 的右边三式之间也有线性关系. 沿着 $C_1$, 这个关系表示一个超出成带关系 (3) 之外的关于 $p, q$ 的新条件, 若能将一阶带 $C_1$ 扩展为二阶的积分带 $C_2$, 这个新条件是必须满足的. 把这种一阶带 $C_1$ 叫做 特征带; 把负荷着这个带的曲线 $\bar{C}_0$ 叫做 $x, y, u$ 空间的 特征曲线, 而把 $\bar{C}_0$ 的投影 $C_0$ 叫做 特征基线, 或者叫做 $x, y$ 平面上的 特征曲线.

沿着被嵌入二阶积分带中的特征带 $C_1$, 二阶导数 $r, s, t$ 不是唯一确定的, 但相差的只是加了一个 (4) 的相应齐次方程组的任意解.

总起来说: 或者带 $C_1$ 是自由的, 在此情形下, 如果给出了 $u, p, q$, 则微分方程唯一地决定了 $u$ 在 $C_1$ 上的二阶导数及高阶导数; 或者 $C_1$ 含有满足特征条件 (5) 的一些点. 如果 $C_1$ 全部由这种点组成, 则仅当附加条件得以满足时, 才能把它扩展为积分带 $C_2$. 但这种扩展不再是唯一的. 这时把带 $C_1$ 叫做是特征的.

例如, 考虑线性微分方程 $u_{xy} = 0$ 和由 $x = \lambda, y = 0, u = k\lambda$($k$ 是常数), $p = k, q = f(\lambda)$ 给出的带 $C_1$. 这条带上所有的点都满足 (5), 而沿着这条带, 方程 (4) 蕴含着 $\dot{q} = 0$. 所以, 若能把这条带扩展为积分带, 它就必须服从进一步地限制: $q =$ 常数. 换句话说, 在所有元素都满足 (5) 的许多带中, 只有平面带是特征带.

特征条件也能用如下的针对带 $C_1$ 的基流形 $\phi(x, y) = 0(\phi_x^2 + \phi_y^2 \neq 0)$ 的论断 (这种论断可推广到 $n$ 个自变量的情形) 而得出 (见第 1 章附录 $1'$.1 和第 3 章 3.2). 一个作用于 $u$ 的二阶微分算子, 如果它在曲线 $\bar{C}_0$ 上能够用描述带 $C_1$ 的量表示出来, 就把它叫做沿 $C_1$ 的内微分算子, 或在 $C_1$ 内的算子. 例如, $u_{xy}$ 就是在带 $x = \lambda, y = 0, u = 0, p = 0, q = f(\lambda)$ 上的一个这样的内微分表达式, 因为 $u_{xy} = \dot{q}$.

现在提出问题: 带 $C_1$ 应满足什么条件才能使拟线性算子 (1) 是一个沿 $C_1$ 的内算子? 回答是沿 $C_1$ 的必要且充分的条件是 特征条件

$$Q(\phi,\phi)\equiv a\phi_x^2+b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2=0, \tag{6}$$

这里 $Q(\phi,\phi)$ 是所谓的"特征形".

证明：引入新坐标 $\eta=\phi(x,y)$ 及 $\lambda=\psi(x,y)$ 代替 $x$ 及 $y$, 使得 $\lambda$(或 $\psi$) 与前面沿 $C_1$ 引入的参数相同而 $\phi$ 是引向 $C_1$ 之"外"的变量. 则对于任何函数 $u(x,y)$,

$$u_{xx}=u_{\phi\phi}\phi_x^2+2u_{\phi\psi}\phi_x\psi_x+u_{\psi\psi}\psi_x^2+u_\phi\phi_{xx}+u_\psi\psi_{xx},$$
$$u_{xy}=u_{\phi\phi}\phi_x\phi_y+u_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y+\phi_y\psi_x)+u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y+u_\phi\phi_{xy}+u_\psi\psi_{xy},$$
$$u_{yy}=u_{\phi\phi}\phi_y^2+2u_{\phi\psi}\phi_y\psi_y+u_{\psi\psi}\psi_y^2+u_\phi\phi_{yy}+u_\psi\psi_{yy},$$

因此, 若 $Q(\phi,\psi)$ 表示二次型 $Q$ 的极型 (参考卷 I 第 1 章 1.1.4) 则

$$L[u]=u_{\phi\phi}Q(\phi,\phi)+2u_{\phi\psi}Q(\phi,\psi)+u_{\psi\psi}Q(\psi,\psi)+u_\phi L[\phi]+u_\psi L[\psi]. \tag{7}$$

沿着 $C_1$, 关于 $\psi=\lambda$ 求导表示内求导, 而关于 $\phi$ 的求导表示 $C_1$ 的外向求导 (参考第 2 章附录 2′.1.1). 沿着 $C_1$, 函数 $u$ 及 $u$ 的一阶导数是知道的, 所有的二阶导数可由那些一阶导数关于 $\lambda=\psi$ 微分而得到, 所以也是知道的. 因此, $L[u]$ 中不包含 $C_1$ 内的二阶导数的项只是 $u_{\phi\phi}Q(\phi,\phi)$. 所以在 $\phi=0$ 上 $Q(\phi,\phi)=0$ 是决定 $L[u]$ 为内算子的必要且充分条件.

现在考虑微分方程 $L[u]+d=0$. 又立即得知下列二择一的情况：或者对 $C_1$ 的每个点 $Q(\phi,\phi)\neq 0$, 这时外向导数 $u_{\phi\phi}$ 以及随之所有 $u$ 的二阶导数沿着 $C_1$ 都是唯一确定的; 或者在 $C_1$ 的一个点 $P$ 处 $Q(\phi,\phi)=0$, 则在此点处微分方程 (2) 表示对于带的诸量的一个附加条件. 若假定带 $C_1$ 是已知的 (因而沿曲线 $C_0, u$ 的一阶导数是已知的) 且在 $C_1$ 上处处有 $Q(\phi,\phi)=0$, 则此新条件具有对于量 $u_\phi=\kappa$(作为 $\psi=\lambda$ 的函数) 的常微分方程的形式, 即

$$2\kappa_\lambda Q(\phi,\psi)+\kappa L[\phi]+\cdots=0, \tag{8}$$

这里加号后面的几个点表示在带上为已知的那些项.

显然, 特征条件 (6) 和 (5) 是等价的. 事实上, 因为

$$\phi_x\dot{x}+\phi_y\dot{y}=0,$$

即

$$\frac{\phi_x}{\phi_y}=-\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

所以除去一个因子外, (6) 的左边与 (5) 的左边是一致的.

特征带 $C_1$ 只能在使

$$4ac-b^2\leqslant 0$$

的域上存在, 否则实的比值 $\dot{x}:\dot{y}$(或 $-\phi_x:\phi_y$) 不能满足方程 (5) 或 (6).

回忆一下如下的定义：微分算子 $au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}$ 在五维的 $x,y,u,p,q$ 空间的点 $P:(x,y,u,p,q)$ 处是双曲型的, 如果在该点处

$$4ac-b^2<0. \tag{9}$$

(见第 3 章 3.2.1). 同样, 此微分算子称为在曲面 $u=u(x,y)$ 上是双曲型的, 如果曲面上的每个点都满足条件 (9). 自然, 如果条件 (9) 对于五维 $x,y,u,p,q$ 空间的一个点 $P$ 成立, 那么它对于 $P$ 的一个适当选取的邻域也成立.

下面总假定微分算子在所论诸点处是双曲型的.

若微分算子是线性的, 则双曲型性质只依赖于 $x,y$ 而不依赖于 $u,p,q$. 特别地, 特征基线 $C_0$ 是不依赖于 $u,p,q$ 而由微分算子确定的.

最后, 着重指出如下的重要事实：对于微分方程 (2) 的特征条件在自变量 $x,y$ 的任何变换下是不变的.

这可由下列事实立即推出：特征条件是使 $L[u]$ 在 $C_1$ 上是内算子的必要且充分的条件. 为得出一个形式上的证明, 把 $x,y$ 变换为 $\xi,\eta$, 这样就有

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+d=\alpha u_{\xi\xi}+\beta u_{\xi\eta}+\gamma u_{\eta\eta}+\delta,$$

其中右边的系数是 $\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta$ 的函数. 于是, 容易验证

$$a\phi_x^2+b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2=\alpha\phi_\xi^2+\beta\phi_\xi\phi\eta+\gamma\phi_\eta^2.$$

由此可得到上述结论.

### 5.1.2 积分曲面上的特征

到此为止, 一直限于研究沿着带的各个变量. 现在来考察整张的曲面 $J:u=u(x,y)$, 假定这曲面是方程 (2) 的一个积分曲面. 沿着这样的一个积分曲面, 不仅 $u$ 是 $x$ 和 $y$ 的已知函数, 而且 $p=u_x,q=u_y$ 以及系数 $a,b,c,d$ 也都是 $x$ 和 $y$ 的已知函数. 假定沿着问题中的整张曲面条件 (9) 是满足的, 即 (2) 是双曲型的, 那么特征条件

$$a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0$$

定出比值 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 的两个不同的实值 $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$, 因此, 常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\zeta_1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\zeta_2$$

的解就是积分曲面上的两个不同的单参数特征曲线族[①]的集合. 即将看到, 引入这两个曲线族作为参变曲线会大大简化求解微分方程的问题.

① 又一次对 $J$ 上的空间曲线像对它们在 $x,y$ 平面上的投影一样, 随便使用了“特征曲线”这个名称. 特别是对于线性微分方程, 多半是对平面投影说的, 因为它们是固定的而且不依赖于解.

在椭圆型的情形中, $4ac-b^2>0$, 没有这种特征曲线. 在抛物型的极限情况中, $4ac-b^2=0$, 这两个特征曲线族合二为一.

特征带是积分曲面的仅有的分支带. 分支带就是这样的带, 沿着它有两个不同的积分曲面互相接触, 在接触的地方它们有相同的 $u,p,q$ 值, 而有些高阶导数则不相同. 在非特征带上, 所有二阶导数 (以及所有存在且连续的高阶导数也一样) 都是唯一确定的. 所以分支带必须是特征带.

如果一个微分方程是椭圆型的, 积分曲面不能有分支带. 如果再假定这个微分方程是解析的, 并且沿着积分曲面上每个带, 任意阶导数都是唯一确定的, 自然会猜想这个椭圆型方程的每个这种解必定也是解析函数. 这个结果的证明将在本章附录 I 中给出 (也可参考第 4 章 4.7). 这里只提醒一下, 分支带的出现意味着方程有非解析解.

再一次考察特征条件 (6), $Q=a\phi_x^2+b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2=0$, 这里 $a,b,c$ 在积分曲面 $J$ 上是 $x$ 和 $y$ 的已知函数. 把 (6) 看做偏微分方程, 设 $\phi$ 是它的一个解. 已经知道 $\phi=0$ 表示 $J$ 上一特征曲线. 显然, 若 $\phi$ 是 (6) 的一个解, 则 $\phi$ 减去一个常数也是 (6) 的解, 因此曲线族 $\phi=$ 常数中所有曲线都是 $J$ 上的特征曲线. 反之, 若 $\phi=$ 常数是这种特征曲线族, 则函数 $\phi$ 满足作为偏微分方程来看待的方程 (6).

微分方程 $u_{xy}=0$ 就是一个明显的例子. 特征条件为 $\phi_x\phi_y=0$. 任何 $\phi$, 如果它只是 $x$ 的函数或者只是 $y$ 的函数就满足这个条件. 这说明直线 $x=$常数 及 $y=$常数都是特征基线.

### 5.1.3 特征线是间断性的曲线. 波前. 间断性的传播

前面已经介绍了特征线是积分曲面上可能有的分支曲线, 沿着它们, $u$ 的某些导数具有间断性. 本小节中论及一件值得注意的事 (它将在后面, 如第 6 章 6.4 中以更一般的形式来讨论)：这种间断性的跃度大小为一个沿特征曲线的一阶常微分方程所控制.

在这里就二阶导数为间断的情形来描述这种传播现象.

设 $C$ 是由 $\phi(x,y)=0$ 给出的曲线并且划分出域 $\phi\geqslant 0$ 及 $\phi\leqslant 0$; 令 $u(x,y)$ 在这两个域上都是微分方程 (2) 的解, 而且 $u$ 和它的一阶导数跨过 $C$ 时是连续的, 但 $u$ 的“外”二阶导数跨过 $C$ 时出现间断. 不过, 内导数沿着 $\phi=0$ 在下述意义下保持连续：如果像前面一样, $\lambda=\psi$ 和 $\eta=\phi$ 是积分曲面 $J$ 上 $C$ 的邻域里的坐标, 其中 $\lambda$ 是 $C$ 上的参数, 那么 $u,p,q$ 关于 $\lambda$ 的一切导数跨过 $C$ 时保持连续.

用 $[f]$ 表示在 $\phi$ 值增大的方向跨过 $C$ 时函数 $f$ 的跃度. 根据假设, $u_x$ 是连续的, 并且它的用 $u_{xx}\phi_y-u_{xy}\phi_x$ 给出的内导数 (参考第 2 章 2.1) 是连续的, 用 $u_{xy}\phi_y-u_{yy}\phi_x$ 给出的 $u_y$ 的内导数也是连续的. 对于各个跃度有两个关系

$$[u_{xx}]\phi_y-[u_{xy}]\phi_x=0,$$

$$[u_{xy}]\phi_y - [u_{yy}]\phi_x = 0.$$

由此立即得知, 对于某个比例因子 $\kappa$, 有

$$[u_{xx}] = \kappa\phi_x^2, \quad [u_{xy}] = \kappa\phi_x\phi_y, \quad [u_{yy}] = \kappa\phi_y^2$$

(立即可知 $\kappa = [u_{\phi\phi}]$).

现在在两个点 $P_1$ 及 $P_2$ 处来考虑微分方程 (2). 这两个点在 $J$ 上曲线 $C$ 的两侧. 把所得到的两个方程相减, 且令 $P_1$ 及 $P_2$ 收敛于 $C$ 上的点 $P$(见图 5-1). 连续的项等于 0, 于是有

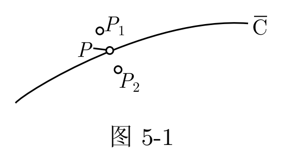



图 5-1

$$a[u_{xx}] + b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0,$$

或者根据上面的结果消去因子 $\kappa$, 得

$$a\phi_x^2 + b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = Q(\phi,\phi) = 0,$$

这正是特征关系. 因此, 肯定地说, 上述类型的间断性只能沿着特征曲线出现.

从物理上来解释, 把 $y = t$ 作为时间而把解 $u(x,t)$ 想象成"波", 或者就作为随时间 $t$ 在 $x$ 空间变化的一个量. 如果这个波沿着特征 $\phi(x,t) = 0$ 有间断性, 设想 $\phi = 0$ 以形式 $x = x(t)$ 解出, 则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\phi_t}{\phi_x}.$$

那么, 可把 $x, t$ 平面中的间断性的曲线 $\phi = 0$ 解释为具有间断性的点 $x$ 在 $x$ 轴上随着时间 $t$ 和速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 移动而走过的路径.

比例因子 $\kappa$ 是间断性的量度, 它有着下列值得注意的性质: 沿着特征 $C$, 因子 $\kappa$ 满足一个齐次线性常微分方程, 即

$$\alpha\kappa_\lambda + \beta\kappa = 0, \tag{10}$$

其中系数 $\alpha$ 及 $\beta$ 由

$$\alpha = 2Q(\phi,\phi), \quad \beta = L[\phi] + Q_\phi(\phi,\phi)$$

给出.

为了证明这个性质, 将方程 $L[u] + d = 0$(其中 $L$ 是由 (7) 给出的) 对 $\phi$ 微分并作成跃度的表达式. 只有包含对 $\phi$ 的二阶或高阶导数的那些项出现. 记住在 $C$ 上 $Q(\phi,\phi) = 0$, 就得到关于 $\kappa$ 的微分方程 (10).

这个结果表明, 沿着所考虑的 $x$ 轴上的那一段, 间断性因子或者到处不为 0, 或者处处为 0.

以上讨论的间断性出现在二阶导数中或高阶导数中. 微分方程本身的意义排除了在一阶导数中有间断性. 不过, 在 5.9 中将推广解的概念使得许可有这种间断性或其他种间断性. 事实上, 在一阶导数中的间断性能够沿着任一条自由曲线 $C$ 造出来. 可用多种不同的方式将 $C$ 扩展为带 $C_1$. 然后 (见本章 5.5 及 5.6) 就能解出对应的初值问题, 并可将 $C$ 一方的一个解与 $C$ 另一方的任一解连接起来就得到广义解 $u$, 它是连续的并且跨过 $C$ 时一阶导数是间断的.

一阶导数的间断性已被微分方程本身的意义所排除. 要使广义“解”跨过 (自由) 曲线 $C$ 时保持连续但有不连续的导数却是一种无意义的推广. 这种函数 $u$ 总可以用下述方法作出：在 $C$ 的两侧考虑不同的解 $u_1$ 及 $u_2$, 对于这两种解通过 $C$ 的初始带 $C_1$ 及 $C_2$ 是不同的带. 例如, 在方程为 $u_{yy} - u_{xx} = 0$ 曲线 $C$ 为 $y = 0$ 的情形中, 对 $y > 0$ 时取 $u = 0$ 而对 $y < 0$ 时取 $u = y$.

但在 5.9 中还要定义“弱解”来给解的概念作一个有意义的扩充. 这种解可以有间断的一阶导数, 并且在那里特征仍然以可能具有间断性的唯一所在而区分出来.

在线性微分方程的情形中, 特征作为间断性曲线的这种独特的性质即使对 $u$ 本身的间断性也是有用的. 在所有这种情形中, 将对这种间断性的传播寻求形如 (10) 的常微分方程.

### 5.1.4 一般的二阶微分方程

将前面的结果推广到一般的二阶微分方程

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{11}$$

是很简便的. 再考虑 $x, y, u$ 空间中的一条曲线 $C$, 假定把它加以补充使之成为一个一阶的带 $C_1$ 或二阶的带 $C_2$. 假定 $C_2$ 是一个积分带, 即对应的量 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 满足方程 $F = 0$.

解决初值问题的第一步是把初始积分带 $C_2$ 扩展为三阶的积分带 $C_3$, 它所带的量对应于满足 (11) 的函数 $u(x, y)$ 沿着 $C$ 的三阶导数.

可用如下的方法得到特征条件：令 $\lambda$ 是沿曲线 $C$ 的参数, $C$ 在 $x, y$ 面上的投影 $C_0$ 由方程 $\phi(x, y) = 0$ 给出, 引入 $\lambda$ 和 $\phi$ 作为基线 $C_0$ 邻域的新坐标. 则 $u(x, y)$ 变为函数 $u(\lambda, \phi)$, 并且写为

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = G(\lambda, \phi, u, u_\lambda, u_\phi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\phi}, u_{\phi\phi}).$$

如果沿着初始积分带 $C_2, u$ 的各个高阶导数不能全部由微分方程确定, 特别是各个三阶导数不能由微分方程确定, 则 $C_2$ 称为特征带. 如果沿着这条带的二阶外导数

$u_{\phi\phi}$ 能由微分方程 $G=0$ 计算出来, 即若微分方程可写成

$$u_{\phi\phi}=g(\lambda,\phi,u,u_\lambda,u_\phi,u_{\lambda\lambda},u_{\lambda\phi})$$

的形式, 则把它微分之后就得到三阶外导数 $u_{\phi\phi\phi}$, 并且显然用它可得到沿着带 $C_2$ 的所有其他三阶导数. 换句话说, 如果 $G_{u_{\phi\phi}}\neq 0$, 则沿 $C_2$ 的所有高阶导数都能确定, 这时 $C_2$ 是自由带, 即不是特征带. 因此, 对于特征带 $C_2$ 必须满足条件 $G_{u_{\phi\phi}}=0$. 这个"特征条件"容易表成如下的形式:

$$F_r\phi_x^2+F_s\phi_x\phi_y+F_t\phi_y^2=0. \tag{12}$$

可用稍有不同而较接近于 5.1.1 中的方法, 由算出沿着初始带 $C_2$ 的三阶导数, 例如, 算出 $r_x,s_x,t_x$, 来导出这个特征条件. 把方程 $F=0$ 对 $x$ 微分, 利用缩写符号

$$\{F\}_x=F_pr+F_qs+F_up+F_x,$$

并使用成带关系式, 就得到线性方程组

$$\left.\begin{array}{l}F_rr_x+F_ss_x+F_tt_x=-\{F\}_x,\\ \dot{x}r_x+\dot{y}s_x=\dot{r},\\ \dot{x}s_x+\dot{y}t_x=\dot{s}.\end{array}\right\}$$

对这个方程组与对第 5.1.1 节中的方程组 (4) 一样作相同的考虑: 如果行列式

$$Q=\begin{vmatrix}F_r & F_s & F_t\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\\ 0 & \dot{x} & \dot{y}\end{vmatrix}=F_r\dot{y}^2-F_s\dot{x}\dot{y}+F_t\dot{x}^2$$

异于 0, 则积分带 $C_2$ 是自由的且沿 $C_2$ 可唯一地确定各高阶导数. 若此行列式沿带 $C_2$ 处处为 0, 则称带 $C_2$ 为特征带. 在此情形下, 确定特征带的量 $x,y,u,p,q,r,s,t$ 必须满足两个附加条件以使此带能扩展成一个积分曲面 (或仅成一个三阶积分带). 第一个条件表示上列方程组的右边和左边满足同一个线性依赖关系. 类似地, 将方程 $F=0$ 对 $y$ 微分就得到第二个条件.

如果这条带的基线由 $\phi(x,y)=0$ 给出, 则特征条件

$$F_r\dot{y}^2-F_s\dot{x}\dot{y}+F_t\dot{x}^2=0 \tag{12a}$$

与条件 (12) 只相差一个因子. 条件 (12) 或 (12a) 可以在带 $C_2$ 的一点处为实比值 $-\phi_y:\phi_x$ 或 $\dot{x}:\dot{y}$ 所满足, 只要在此点

$$4F_rF_t-F_s^2\leqslant 0.$$

同前所述, 如果在八维的 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 空间的一点处有强不等式

$$4F_rF_t - F_s^2 < 0 \tag{13}$$

成立, 则称微分算子 $F$ 在该点处是 双曲型的. 若 (13) 在一个二阶带上或一个曲面 $u(x,y)$ 上处处成立, 则称微分算子 $F$ 在该带上或该曲面上是 双曲型的.

与特殊的拟线性微分方程的情形一样, 必须注意在已给积分曲面上的特征条件可看做是关于 $\phi$ 的一阶偏微分方程, 而特征曲线则是由整个解族 $\phi =$常数组成的.

### 5.1.5 高阶微分方程

在讨论函数 $u(x,y)$ 的 $n$ 阶微分方程时, 引入下列缩写符号：

$$p_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}}, \ (\nu = 0, 1, \cdots, n).$$

于是 $n$ 阶微分方程的形式为

$$F(x, y, u, \cdots, p_0, \cdots, p_n) = 0. \tag{14}$$

这里 $n$ 阶以下的导数没有明显地表示出来.

特征以及特征条件这种概念得出的方式可简述如下：假定 $u = u(x,y)$ 是一个积分曲面, 且在此曲面上给出了一条曲线 $C$ 及以 $\phi(x,y) = 0$ 为基线的一条 $n$ 阶相关带 $C_n$. 基线 $\phi(x,y) = 0$ 将域划分为使 $\phi > 0$ 及使 $\phi < 0$ 的两部分. 令 $\lambda$ 是这条带的参数. 在积分曲面 $u(x,y)$ 上仍引用 $\lambda$ 和 $\phi$ 作为自变量以代替 $x$ 和 $y$. 把经过变换之后的函数 $u(x,y)$ 写作 $u(\lambda, \phi)$, 并用

$$\omega = u_{\phi\cdots\phi} = \frac{\partial^n u}{\partial \phi^n}$$

表示 $u$ 的引向这条带 $C_n$ 之外的 $n$ 阶导数. 于是就有

$$p_\nu = \omega \phi_x^\nu \phi_y^{n-y} + \cdots,$$

加号后面的几个点表示不含 $n$ 阶导数 $\omega$ 的那些项. 已给微分方程 (14) 现在可看做是关于 $u(\lambda, \phi)$ 的微分方程了. 如果沿 $C$ 方程 (14) 能写成

$$\omega = f(\lambda, \phi, u, \cdots),$$

其中 $\omega$ 本身不再明显地出现在右边, 那么把它对 $\phi$ 微分, 可唯一地定出 $n+1$ 阶的外向导数 $\omega_\phi$ 和 $u$ 的其他所有 $n+1$ 阶导数. 只要 $F_\omega \neq 0$, 这总是可能的. 如果对一切 $\lambda, F_\omega = 0$, 则称 $C_n$ 为 特征带. 再用原来的变量表示, 这个关系式就变成基本的 特征条件

$$F_{pn}\phi_x^n + F_{p_{n-1}}\phi_x^{n-1}\phi_y + \cdots + F_{pn}\phi_y^n = 0. \tag{15}$$

定义以 $\phi=0$ 为基线的 $n$ 阶带为特征带, 如果 (i) 沿着它关系式 (15) 成立, (ii) 它是一个积分带.

这样定义的特征带是否总能嵌在一张积分曲面上, 即初值问题的解是否存在, 这里尚未解决.

现在回过头来考虑一个已知积分曲面 $J: u=u(x,y)$ 上的特征带. 如果将函数 $u(x,y)$ 以及它在各点的导数值代入 (15) 并用补充条件 $\phi=0$ 来限制 $x,y$, 则关系式 (15) 在 $J$ 上成立.

若将曲线 $\phi=0$ 写成 $y=y(x)$ 的形式, 则得到斜率 $y'=-\phi_x:\phi_y$, 而特征关系则化为关于 $J$ 上的特征曲线 $C$ 的一阶常微分方程:

$$F_{p_n}y'^n-F_{p_{n-1}}y'^{n-1}+\cdots=0. \tag{16}$$

反之, 这个常微分方程的每个解构成 $J$ 上的一条特征曲线.

如果把特征条件 (15) 解释为关于两个自变量的函数 $\phi(x,y)$ 的偏微分方程, 则该方程的每个解不仅给出单独一条特征曲线 $C$, 而的确将给出 $J$ 上的以 $c$ 为参数的整个特征曲线族 $\phi(x,y)=c$.

$\zeta$ 的代数方程

$$F_{p_n}\zeta^n-F_{p_{n-1}}\zeta^{n-1}+\cdots+(-1)^nF_{p_0}=0 \tag{17}$$

的诸根的性质决定了在积分带的邻近微分方程 (14) 的类型. 如果这个代数方程有 $n$ 个不同的实根, 则微分方程 (14) 叫做在 $x,y,u,\cdots,p_0,\cdots,p_n$ 空间的一点处的, 或沿着带 $C_n$ 的, 或在曲面 $u=u(x,y)$ 上的完全双曲型方程, 或就叫双曲型方程. 如果这个代数方程的所有解都是虚的, 则微分方程 (14) 叫做椭圆型的, 如果某些实的解重合, 则微分方程常称为抛物型的(以后将修改这种分类法, 将某些具有重特征而 Cauchy 初值问题仍是可解的方程划归双曲型).

### 5.1.6 特征在点变换下的不变性

偏微分方程的特征在点变换下是不变的. 换句话说, 在点变换下, 特征变为被变换后的微分方程的相应的特征. 为了证明这个结论, 只要考虑二阶微分方程 $F(u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots)=0$ 在变换成新的自变量 $\xi,\eta$ 时化为 $G(u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta},\cdots)=0$ 这种简单的情形就足够清楚的了. 这种种不变性仍是或者由特征带的直观意义立即得出或者由恒等式

$$F_{u_{xx}}\phi_x^2+F_{u_{xy}}\phi_x\phi_y+F_{u_{yy}}\phi_y^2=G_{u_{\xi\xi}}\phi_\xi^2+G_{u_{\xi\eta}}\phi_\xi\phi_\eta+G_{u_{\eta\eta}}\phi_\eta^2$$

得出, 而这个恒等式可由初等微分运算得到.

由特征的不变性有下述推论：双曲型问题是时向可逆的, 即双曲型性质在变换 $x'=x,y'=-y$ ($y$ 理解为时间) 之下保持不变.

由于每条无处为特征的曲线能够变换为一条无处为特征的任意直线, 所以只要把 $x$ 轴作为初始线来解 Cauchy 初值问题就足够了.

### 5.1.7 化为一阶拟线性方程组

不失一般性, 可限于讨论一阶拟线性方程组的初值问题 (参考第 1 章, 1.7.2). 在这里复述一下这种常用的简化法: 若微分方程 (12)

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

不是拟线性的, 则经过求导 (如对 $y$ 求导) 之后, 就得到拟线性微分方程

$$(F)_y = F_r r_y + F_s s_y + F_t t_y + F_p p_y + F_q q_y + F_u u_y + F_y = 0. \tag{18}$$

这个方程和

$$u_y = q,\ p_y = s,\ q_y = t,\ r_y = s_x,\ s_y = t_x$$

一起表示一个关于未知函数 $u, p, q, r, s, t$ 的一阶拟线性方程组.

如果在 $y = 0$ 的初始值 $u = f(x), u_y = g(x)$ 是给定了的. 那么对于这方程组的初始值是 $u = f, p = f', q = g, r = f'', s = g'$, 而 $t(x, 0)$ 可由 $F = 0$ 算出. 这方程组的一个解 $u, p, q, r, s, t$ 构成原方程的一个解 $u$. 要了解这一点, 应注意到方程组产生出

$$s_y = t_x = q_{yx} = q_{xy},\ (s - q_x)_y = 0.$$

由于在 $y = 0$ 时 $s = q_x$, 有 $s \equiv q_x \equiv u_{xy}$. 同样, 能够把方程组中其他未知量与 $u$ 的各个导数等同起来. 最后, 可证实 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = 0$; 由于最初有 $F = 0$, 故知 $u$ 是原方程的解.

这种化为一阶拟线性方程组的方法, 在对其中所含诸函数有足够的可微分性的假定下总是可以做到的 (参考第 1 章 1.7.2). 依此, 从现在起, 将致力于一阶拟线性微分方程组, 复习并补充在第 3 章 3.1 中的讨论.

## 5.2 一阶双曲型方程组的特征标准形式

### 5.2.1 线性、半线性及拟线性方程组

一阶拟线性方程组[①]可写成

$$L^{\kappa}[u] \equiv \sum_{i=1}^{k}(a^{\kappa i}u_x^i + b^{\kappa i}u_y^i) = C^{\kappa}\ (\kappa = 1, 2, \cdots, k), \tag{1}$$

① 只考虑“适定的方程组” (参考第 1 章 1.2.3), 其中方程的个数 $k$ 等于未知函数的个数.

或用矩阵 $A, B$ 及矢量 $c$ 写成

$$L[u] = Au_x + Bu_y = c. \tag{1a}$$

假定在所论域中矩阵 $B$ 是非奇异的, 具体地说, 行列式 $||B|| = ||b^{\kappa i}||$ 不为 0.

若 $A, B$ 不依赖于未知矢量 $u$ 而 $c$ 线性地依赖于 $u$, 则方程组是线性的; 若 $A$ 和 $B$ 不依赖于 $u$, 而 $c$ 非线性地依赖于 $u$, 则方程组是半线性的, 这种情形几乎可当做线性方程组来处理. 另外, 若 $A, B$ 依赖于 $u$, 则方程组是拟线性的. 已经知道, 任何非线性组经过微分后就变为等价于拟线性的方程组.

由于 $||B|| \neq 0$, 可由 (1) 解出 $u_y$, 并把它写成具有单位阵 $B = I$ 的等价形式

$$u_y + Au_x = c, \tag{1b}$$

它表示直线 $y =$ 常数 是非特征的或者说是自由的.

补充有关组 (1b) 的一些基本事实. 首先考虑线性或半线性的情形 (参考第 3 章 3.2.2). 特征曲线 $C : \phi(x, y) = 0$ 由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \tau \tag{2}$$

或

$$\tau\phi_x + \phi_y = 0 \tag{2a}$$

给出, 其中 $\tau$ 是代数方程

$$Q = ||A - \tau I|| = 0 \tag{3}$$

的根. 这些方程说明矩阵 $A - \tau I$ 是奇异的; 因此对于一特征曲线存在一个以 $l_1, \cdots, l_k$ 为支量且满足

$$lA = \tau l \tag{4}$$

的特征矢量 $l$.

和第 3 章 3.2 一致, $L$ 的双曲性需要 $Q = 0$ 的一切根 $\tau_1, \cdots, \tau_k$ 都是实的, 并且存在 $k$ 个线性独立的特征矢量 $l^1, l^2, \cdots, l^k$. 特别地, 当所有的根 $\tau$ 都不相同导致所有的特征也都不相同时是双曲型的.

双曲型组可用一等价的线性组来代替, 这个等价组是将 (1b) 中各方程与特征矢量的支量 $l^1, \cdots, l^k$ 各自组合而成, 或用特征矢量左乘 (1) 或 (1a) 或 (1b) 并利用关系式 (4) 即得到. 由 (1b) 并因 $l = l^i, \tau = \tau_i$ 得到等价组

$$l^i L[u] = \Lambda^i[u] = l^i(u_y + \tau_i u_x) = l^i c \quad (i = 1, \cdots k). \tag{5}$$

现在在方程组为线性的或半线性的假定下, 可引用一个新的具有 $k$ 个支量

$$U^\kappa = l^\kappa u \quad (\kappa = 1, 2, \cdots, k) \tag{6}$$

的线性等价未知矢量 $U$ 来代替未知函数 $u$ 而使 (5) 进一步简化. 若沿特征 $C_i$ 引入方向导数符号

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y} + \tau_i \frac{\partial}{\partial x}, \tag{7}$$

并记

$$g^i = l^i c + u(l^i_y + \tau l^i_x) \quad (\tau = \tau_i),$$

则方程组变为

$$D^i U^i = g^i. \tag{8}$$

把 $y$ 看做沿特征 $C_i$ 的自变量, 用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ 表示对 $y$ 求导, 则 (8) 在 $C_i$ 上可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} U^i = g^i(x, y, U), \tag{9}$$

或用矩阵的形式简要地写作

$$U_y + TU_x = g, \tag{9a}$$

其中 $T$ 是以 $\tau_i$ 为对角线元素的对角线矩阵. (5), (8), (9), (9a) 这些方程都是方程组的标准形式. 它们表明了事实：半线性双曲型组等价于以 $A$ 和 $B$ 为系数的对称组, $A, B$ 二矩阵之一, 例如 $A$ 是正定的①. 特别地, 总可以假定 (1b) 中的 $A$ 是一个对称矩阵.

对于拟线性方程组引入新变量 $U$ 不能立即简化为像 (8) 或 (9) 的形式, 因为系数 $l$ 的导数仍然包含着未知量. 所以必须满足于标准形式 (5). 不过, 利用将方程 (5) 对 $x$ 和 $y$ 进行微分这种简单的办法, 可得到关于 $u$ 的导数的简化方程, 对这些方程不强调非线性的拟线性性质, 于是就可以引入这些线性组合了.

仍旧限于线性算子 $L$, 可从标准形式立即说出特征曲线的基本性质. 特别是标准形式显示出这一事实：沿着特征曲线, 线性组合 $lL$ 是一个内微分算子.

再者, 标准形式暗示着除 5.1 中所论具有间断导数的解以外, 还许可有本身具间断性的广义解, 特别是跨过某曲线 $C$ 时出现跳跃性间断但其他地方是解析的,

① 用矩阵符号将微分方程 (1b) 化为对称的 (对角线) 形式的变换可描述如下：令 $U = Hu$, 矩阵 $H$ 的各行是特征矢量 $l^i$, 并将

$$u = H^{-1}U, u_x = H^{-1}U_x + H^{-1}_x U, u_y = H^{-1}U_y + H^{-1}_y U$$

代入 (1b), 则得

$$AH^{-1}U_x + H^{-1}U_y = c - (AH^{-1}_x + H^{-1}_y)U.$$

再用 $H$ 左乘之, 就得到对角线形式

$$U_y + HAH^{-1}U_x = G,$$

其中 $G = H(C - AH^{-1}_x U - H^{-1}_y U)$ 是一个线性地依赖于 $U$ 但不依赖于 $U$ 的导数的已知矢量.

对于这种解, $C$ 是特征曲线. 在第 6 章 6.4 中将一般地讨论间断性以及它们沿着特征曲线的传播. 这里仅指出如下的事实, 而根据 (9) 这事实是显然的.

$U$ 的所有支量除 $U^\kappa$ 外跨过 $C^k$ 时是连续的. 跃度 $[U^\kappa]=\omega$ 按照线性常微分方程[①]

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y}=g(x,y,\omega) \tag{10}$$

沿着 $C$ 传播.

### 5.2.2 $k=2$ 的情形. 用速矢端线变换法达到线性化[②]

对于两个方程的双曲型组, 与单独一个二阶微分方程一样, 如 5.1 可引入两个特征曲线族作为坐标曲线. 这也就是引入两个"特征参数" $\alpha$ 和 $\beta$ 使得

$$\alpha=\phi(x,y)=\text{常数},\quad \beta=\psi(x,y)=\text{常数}$$

表示两个不同的特征曲线族, 它们在拟线性的情形下仍旧依赖于所考虑的个别解 $u^1,u^2$, 但在线性的情形下不依赖于 $u$ 而且是预先知道的. 引入特征参数 $\alpha,\beta$ 对处理非线性的 Monge-Ampère 方程 (见附录 I 5′.2) 特别方便.

可将 $u^1,u^2,x,y$ 看做是两个自变量 $\alpha,\beta$ 的四个函数, 并且得到以特征独立参数为自变量的四个方程

$$h^{11}u^1_\alpha+h^{12}u^2_\alpha=\gamma^1,\quad h^{21}u^1_\beta+h^{22}u^2_\beta=\gamma^2, \tag{11}$$

$$x_\alpha=\tau^1y_\alpha,\quad x_\beta=\tau^2y_\beta \tag{11a}$$

所构成的一个等价的方程组, 其中 $h^{i\kappa},\gamma^\kappa,\tau^\kappa$ 是 $u^1,u^2,x,y,x_\alpha,\cdots,y_\beta$ 的已知函数.

在线性的情形下, 方程 (11b) 与方程 (11a) 无关; 在拟线性的情形下, 它们是耦联的. 无论如何, 它们是用一个较简单的四个方程代替了原来的两个方程, 且在这四个方程中自变量不明显地出现.

在一个重要的特殊情形下, 含两个未知量的拟线性方程组可由简单地交换自变量与因变量的地位 (将 $x$ 和 $y$ 看做是 $u=u^1$ 及 $v=u^2$ 的函数) 而立即化为线性组. 只要这个组中的微分方程对导数而言是齐次的且具有如下的形式

$$a^1u_x+b^1u_y+c^1v_x+d^1v_y=0,$$

$$a^2u_x+b^2u_y+c^2v_x+d^2v_y=0,$$

其中 $a^1,\cdots,d^2$ 仅为 $u,v$ 的函数, 且 Jacobi 式 $J=u_xv_y-u_yv_x$ 不为 0, 那么这种简化法就是可能的. 有

$$U_x=Jy_v,\quad u_y=-Jx_v,$$

① J. Nitsche[3] 探讨了拟线性情形下的跃度的方程.

② 参考第 3 章 3.2.5.

$$v_x = -Jy_u, \quad v_y = Jx_u,$$

于是方程组确实变成了对 $x(u,v)$ 及 $y(u,v)$ 的线性方程组

$$a^1 y_v - b^1 x_v - c^1 y_u + d^1 x_u = 0,$$

$$a^2 y_v - b^2 x_v - c^2 y_u + d^2 x_u = 0.$$

这种变换在流体动力学中起着重要的作用, 其中 $u,v$ 表示二维定常流的速度支量, 它叫做速矢端线变换, 因为 $x,y$ 平面上质点的路径映射在 $u,v$ 平面上的像是质点的“速矢端线”, 即由速度矢量所描出的路线.

## 5.3 在可压缩流体动力学上的应用

可压缩流体的运动对特征概念提供了有教益且有意义的解释①. 在第 6 章将考察这种依赖于三个空间变量和时间的流动. 这里限于只用两个自变量描述的情况.

### 5.3.1 一维等熵流

一维等熵流的速度 $u(x,t)$ 和密度 $\rho(x,t)$ 的微分方程是

$$L^1[u,\rho] \equiv \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = 0,$$
$$L^2[u,\rho] \equiv \rho u u_x + \rho u_t + c^2 \rho_x = 0.$$

“音速” $c(\rho)$ 由 $c = \sqrt{f'(\rho)} > 0$ 给出, 其中 $p = f(\rho)$ 表示压力 $p$ 为 $\rho$ 的一个已知的单调函数 (条件 $f'(\rho) > 0$ 表示方程组的双曲性). 方程

$$\begin{vmatrix} 1 & u-\tau \\ u-\tau & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

定出了这个一阶拟线性方程组的特征方向 $\tau = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 因此 $\tau = u \pm c$. 因为有两个不同的实根 $\tau$, 所以这方程组是双曲型的. 对于这两个 $\tau$ 值的每一个来说, 方程组

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^1 + (u-\tau)\lambda^2 = 0, \\ (u-\tau)\lambda^1 + c^2\lambda^2 = 0 \end{array}\right\}$$

都有一组非零解 $(\lambda^1, \lambda^2)$. 当 $\tau = u + c$ 时, $\lambda^1 : \lambda^2 = c$; 当 $\tau = u - c$ 时, $\lambda^1 : \lambda^2 = -c$. 使用 $\lambda^1 : \lambda^2$ 的两个值中的每一个, 线性组合 $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$ 都含有 $u$ 和 $\rho$ 在同一方

① 为了便于与流体动力学的文献作比较, 在本节中使用了稍异于 5.2 的符号, 例如将 $y$ 写成字母 $t$ 以表示时间. 关于这里给出的各例的细节可在 R. Courant and K. O. Friedrichs[1] 中找到.

向 (相应的特征方向) 上的导数. 于是, 得微分方程组

$$\begin{cases} \Lambda^1[u,\rho] \equiv \rho[u_t+(u+c)u_x]+c[\rho_t+(u+c)\rho_x]=0, \\ \Lambda^2[u,\rho] \equiv \rho[u_t+(u-c)u_x]-c[p_t+(u-c)\rho_x]=0. \end{cases}$$

可引入特征参数 $\alpha=\phi(x,t), \beta=\psi(x,t)$, 其中

$$\psi(x,t)=\text{常数}$$

和

$$\phi(x,t)=\text{常数}$$

是由

$$-\psi_t:\psi_x=\mathrm{d}x:\mathrm{d}t=u+c$$

和

$$-\phi_t:\phi_x=\mathrm{d}x:\mathrm{d}t=u-c$$

规定的特征曲线. 因 $-\psi_t:\psi_x=x_\alpha:t_\alpha$ 及 $-\phi_t:\phi_x=x_\beta:t_\beta$, 得到关于特征参数 $\alpha,\beta$ 的四个函数 $u,\rho,x,t$ 的方程组

$$\begin{cases} \rho u_\alpha+c\rho_\alpha=0, \\ \rho u_\beta-c\rho_\beta=0, & \text{(1a)} \\ x_\alpha=(u+c)t_\alpha, \\ x_\beta=(u-c)t_\beta & \text{(1b)} \end{cases}$$

(参考 5.2).

在本例中的特征曲线可解释成表示速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm c$$

的“声波”(小扰动), 有时叫做“特征速率”, 与“流速”$u$ 相差 $\pm c$.

方程 (1a) 导出所谓的“Riemann 不变量”, 即导出依如下方式沿着特征等于常数的函数.

用适当的函数 $r(u,\rho), s(u,\rho)$ 将 (1a) 写成如下的形式:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}=0,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\beta}=0,$$

以便推出沿 $\beta=$ 常数 有 $\gamma=$常数以及沿 $\alpha=$ 常数 有 $s=$ 常数. 显然, 必须找出这样两个函数 $g$ 和 $l$, 使得 $r_u=g\rho, r_\rho=gc; s_u=l\rho, s_\rho=-lc$, 这里“积分因子”$g(u,\rho)$ 和 $l(u,\rho)$ 满足相容条件 $(g\rho)_\rho=(gc)_u, (l\rho)_\rho=(-lc)_u$. 容易求出

$$g=\frac{1}{2\rho},\ l=-\frac{1}{2\rho}$$

是导出 Riemann 不变量

$$
\begin{aligned}
2r &= u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'} \mathrm{d}\rho' = \text{常数}, \qquad \text{沿}\beta = \text{常数}, \\
2s &= -u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho')}{\rho'} \mathrm{d}\rho' = \text{常数}, \qquad \text{沿}\alpha = \text{常数}
\end{aligned}
$$

的解.

在理想的“多方 (polytropic)”气体的重要情形下, 压力由

$$p = f(\rho) = A\rho^{\gamma}$$

给出, 其中 $A$ 和 $\gamma$ 是常数, $\gamma > 1$. 在此情形下,

$$c^2 = f'(\rho) = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

若取 $\rho_0 = 0$, 则 Riemann 不变量为

$$r = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1}, \ s = -\frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1}.$$

这两个表达式可用来解初值问题.

最后注意非线性方程组 $L^1[u, \rho] = 0, L^2[u, \rho] = 0$ 属于那种许可用 5.2 的速矢端曲线变换法来线性化的类型. 因此, 下列线性化了的方程是将 $x$ 和 $t$ 作为 $u$ 和 $\rho$ 的函数而得到的.

$$
\begin{aligned}
&\rho t_\rho - u t_u + x_u = 0, \\
&\rho u t_p - \rho x_\rho - c^2 t_u = 0.
\end{aligned}
$$

只要 Jacobi 式 $u_x \rho_t - u_t \rho_x$ 不为 0, 它们就成立①.

### 5.3.2 球面对称流

关于球面等熵流的微分方程

$$
\begin{aligned}
L^1[u, \rho] &= \rho u_x + u\rho_x + \rho_t = -\frac{2\rho u}{x}, \\
L^2[u, \rho] &= \rho u u_x + \rho u_t + c^2 \rho_x = 0.
\end{aligned}
$$

可用同样方法处理. 因为算子 $L^1$ 和 $L^2$ 与其在一维流 (参考 5.3.1) 的情形下是一样的, 特征方向由 $\tau = u \pm c$ 给出. 同样, $\lambda^1 : \lambda^2$ 的值, 除了差一个比例因子外, 也由 $\lambda^1 \lambda^2 = \pm c$ 给出而得到微分方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
\Lambda^1[u, \rho] &= -\frac{2c\rho u}{x}, \\
\Lambda^2[u, \rho] &= \frac{2c\rho u}{x}.
\end{aligned}
\right\}
$$

① 关于详细的分析, 参考 R. Gourant 和 K. O. Friedrichs[1].

它们和前面有相同的算子 $\Lambda^1$、$\Lambda^2$. 与 (1a) 相似的方程组是

$$\left.\begin{aligned} \rho u_\alpha + c\rho_\alpha &= -\frac{2c\rho u}{x}t_\alpha, \\ \rho u_\beta - c\rho_\beta &= \frac{2c\rho u}{x}t_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

而方程 (1b) 是不变的.

### 5.3.3 定常无旋流

在二维定常无旋等熵流中, 速度分量 $u, v$ 满足方程组

$$\left.\begin{aligned} &L^1[u,v] \equiv u_y - v_x = 0, \\ &L^2[u,v] \equiv (c^2-u^2)u_x - uv(x_y+v_x) + (c^2-v^2)v_y = 0. \end{aligned}\right\}$$

其中音速 $c$ 是 $u^2+v^2$ 的已知函数. 在此情形下, 特征方向 $\tau$ 满足

$$\begin{vmatrix} -\tau & c^2-u^2+uv\tau \\ -1 & -uv-(c^2-v^2)\tau \end{vmatrix} = (c^2-v^2)(\tau)^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0^{①}.$$

在 $u^2+v^2 > c^2$ 的 (流动是超音速的) 所有点处, 这个方程都有两个不同的实根 $\tau^1, \tau^2$, 这时方程组是双曲型的. 对于 $\tau$ 的这两个值中的每一个来说, $\lambda^1 : \lambda^2$ 的相应值是 $-uv-(c^2-v^2)\tau$. 在每个情形下取线性组合 $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2$, 得到方程组

$$\Lambda^i[u,v] \equiv (c^2-u^2)(u_y+\tau^i u_x) + (c^2-v^2)\tau^i(u_y+\tau^i v_x) = 0 \quad (i=1,2).$$

对于 $u, v, x, y$(作为 $\alpha, \beta$ 的函数) 的方程组是

$$\left.\begin{aligned} (c^2-u^2)u_\alpha + (c^2-v^2)\tau^1 v_\alpha = 0, \\ (c^2-u^2)u_\beta + (c^2-v^2)\tau^2 v_\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

和

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= \tau^1 y_\alpha, \\ x_\beta &= \tau^2 y_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

方程组 (3a) 可以写成等价的形式：

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 u_\alpha + v_\alpha = 0, \\ \tau^1 u_\beta + v_\beta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3c}$$

关于具有柱面对称的定常三维无旋等熵流的微分方程组是

$$\left.\begin{aligned} &L^1[u,v] \equiv u_y - v_x = 0, \\ &L^2[u,v] \equiv (c^2-u^2)u_x - uv(u_y+v_x) + (c^2-v^2)v_y = -\frac{c^2 v}{y}. \end{aligned}\right\}$$

① 这里用符号 $(\tau)^2$ 表示 $\tau$ 的平方, 以区别于该方程的根 $\tau^2$. 以下同. —— 译者注.

算子 $L^1, L^2$ 和前面的例子一样, 因此特征方向 $\tau^1$ 与 $\tau^2$ 也满足

$$(c^2 - v^2)(\tau)^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0.$$

在此情形下相似于 (3c) 的方程是

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha + \frac{1}{\tau^2} v_\alpha = -\frac{c^2 v}{(c^2 - u^2) y} x_\alpha, \\ u_\beta + \frac{1}{\tau^1} v_\beta = -\frac{c^2 v}{(c^2 - u^2) y} x_\beta \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

和方程组 (3b).

定常无旋流的方程仍然允许用 5.2 的速矢端曲线变换法来线性化. 只要

$$u_x v_y - v_x u_y \neq 0,$$

就得到关于把 $x, y$ 作为 $u$ 和 $v$ 的函数的线性方程组

$$\left.\begin{aligned} &x_v - y_u = 0, \\ &(c^2 - u^2) y_v + uv(x_v + y_u) + (c^2 - v^2) x_u = 0. \end{aligned}\right\}$$

### 5.3.4　关于非等熵流的三个方程的组

在 (非定常的) 一维非等熵流中, 速度 $u(x,t)$, 压力 $p(x,t)$ 和比熵 $S(x,t)$ 满足方程组

$$\left.\begin{aligned} L^1[u,p,S] &\equiv \rho c^2 u_x + u p_x + p_t = 0, \\ L^2[u,p,S] &\equiv \rho u u_x + \rho u_t + p_x = 0, \\ L^3[u,p,S] &\equiv u S_x + S_t = 0. \end{aligned}\right\}$$

其中 $\rho$ 和 $c \neq 0$ 是 $p$ 和 $S$ 的已知函数. 于是特征方向 $\tau$ 由

$$\begin{vmatrix} c^2 & u-\tau & 0 \\ u-\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u-\tau \end{vmatrix} = 0$$

规定, 因此, 它们是

$$\begin{aligned} \tau^1 &= u + c, \\ \tau^2 &= u - c, \\ \tau^3 &= u, \end{aligned}$$

且方程组是双曲型的. 对于特征方向 $\tau^1, \tau^2, \tau^3$ 中的每一个, 方程组

$$\left.\begin{aligned} &c^2 \lambda^1 + (u-\tau)\lambda^2 = 0, \\ &(u-\tau)\lambda^1 + \lambda^2 = 0, \\ &(u-\tau)\lambda^3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

有一组非零解 $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$, 即除了一个比例因子外,

$$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = \begin{cases} (1, c, 0), & 当\tau = \tau^1时, \\ (-1, c, 0), & 当\tau = \tau^2时, \\ (0, 0, 1), & 当\tau = \tau^3时. \end{cases}$$

在各个情形下, 作线性组合 $\lambda^1 L^1 + \lambda^2 L^2 + \lambda^3 L^3$, 得到方程组

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda^1[u, p, S] \equiv \rho c[u_t + (u + c)u_x] + p_t + (u + c)p_x = 0, \\ &\Lambda^2[u, p, S] \equiv \rho c[u_t + (u - c)u_x] - [p_t + (u - c)p_x] = 0, \\ &\Lambda^3[u, p, S] \equiv S_t + uS_x = 0. \end{aligned}\right\}$$

虽然不像对两个未知量的两个方程那样引入特征参数去代替变量 $x, t$, 还是能把这些方程写成更简练的形式, 只要令 $s_1, s_2, s_3$ 为这三个特征曲线族上的曲线参数, 这些方程就变为

$$\begin{aligned} &\rho c \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial p}{\partial s_1} = 0, \\ &\rho c \frac{\partial u}{\partial s_2} - \frac{\partial p}{\partial s_2} = 0, \\ &\frac{\partial S}{\partial s_3} = 0. \end{aligned}$$

在本例中, 由 $\mathrm{d}x : \mathrm{d}t = u + c$ 确定的特征曲线表示声波 (同等熵的情形) 而由 $\mathrm{d}x : \mathrm{d}t = u$ 确定的特征曲线表示质点轨道.

作为另一个例子, 考虑关于定常二维有旋等熵流的速度分量 $u(x, y), v(x, y)$ 和密度 $\rho(x, y)$ 的微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &\rho u u_x + \rho v u_y + c^2 \rho_x = 0, \\ &\rho u v_x + \rho v v_y + c^2 \rho_y = 0, \\ &\rho(u_x + v_y) + u\rho_x + v\rho_y = 0. \end{aligned}\right\}$$

(其中声速 $c = c(\rho) \neq 0$ 是已知函数) 特征方向 $\tau$ 满足

$$\begin{vmatrix} u - \tau v & 0 & 1 \\ 0 & u - \tau v & -\tau \\ c^2 & -\tau c^2 & u - \tau v \end{vmatrix} \equiv (u - \tau v)[(u - \tau v)^2 - (1 + \tau^2)c^2] = 0.$$

两个特征曲线族 $\mathrm{d}x : \mathrm{d}y$ 由二次因式

$$(1 + \tau^2)c^2 - (u - \tau v)^2 \equiv (c^2 - v^2)\tau^2 + 2uv\tau + c^2 - u^2 = 0$$

的根确定, 这个关于 $\tau$ 的方程已经在无旋情况的例题中考虑过. 在 $u^2+v^2>c^2$(流动是超音速的) 的各点处这两族特征曲线是实的而且是不同的. 有时把这两族特征曲线叫做 Mach线. 第三族特征曲线由 $\mathrm{d}x:\mathrm{d}y=u:v(u-\tau v=0)$ 确定, 它们是流线, 即切于速度矢量的那些曲线. 容易看出在任何点流线不能与 Mach 线有相同的方向, 所以当 $u^2+v^2>c^2$ 时, 方程组是完全双曲型的.

对于前两个特征方向, 除了一个比例因子外, 得到

$$(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)=(-1,\tau^i,u-\tau_v^i)\quad(i=1,2),$$

并且对于第三个特征方向, 有

$$(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)=(u,v,0).$$

对于每个情形作线性组合 $\lambda^1L^1+\lambda^2L^2+\lambda^3L^3$, 并在三族特征曲线上引入曲线参数 $s_1,s_2,s_3$, 得到方程组

$$\left.\begin{aligned}&\rho v\frac{\partial u}{\partial s_i}-\rho u\frac{\partial v}{\partial s_i}-[uv+\tau^i(c^2-v^2)]\frac{\partial\rho}{\partial s^i}=0\quad(i=1,2),\\&\rho u\frac{\partial u}{\partial s_3}+\rho v\frac{\partial v}{\partial s_3}+c^2\frac{\partial\rho}{\partial s_3}=0.\end{aligned}\right\}$$

### 5.3.5 线性化的方程

如果假定有一种基准的稳恒状态, 它与真实的流动只相差一些"微小"的量, 以致这些量的二阶项及其导数都可以略去, 则流体动力学的非线性方程可以用线性方程来逼近. 举一个例子：对于上面处理过的情况, 即定常二维有旋等熵流来作一个"线性化"的逼近. 假定速度和一个平行于 $x$ 轴的定速度 $\tilde{u}$ 相差微小, 并假定密度 $\rho$ 和一个常数密度 $\tilde{\rho}$ 也相差微小. 令

$$u=\tilde{u}+\omega,\ v=\lambda,\ \rho=\tilde{\rho}+\sigma,$$

其中 $\omega,\lambda,\sigma$ 是微小的量. 再假定, 如果在微分方程中, 略去量 $\omega,\lambda,\sigma$ 的乘积和高次幂以及它们的导数后, 流体的运动仍能足够精确地表示出来. 于是原来的微分方程组可用下列具有常系数的线性微分方程组代替：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{u}\tilde{\rho}\omega_x+c^2\sigma_x=0,\\&\tilde{u}\tilde{\rho}\lambda_x+c^2\sigma_y=0,\\&\tilde{\rho}(\omega_x+\lambda_y)+\tilde{u}\sigma_x=0.\end{aligned}\right\}$$

其中 $c=c(\tilde{\rho})$. 立即得到关系式

$$\omega_{xy}=\lambda_{xx},$$

即对于某个函数 $F(y)$ 有

$$\omega_y - \lambda_x = F(y).$$

这就是所谓的涡旋定理. 令 $\dfrac{\tilde{u}}{c} = k$, 进一步得到方程

$$k\tilde{\rho}\lambda_x + c\sigma_y = 0,$$
$$k\tilde{\rho}\lambda_y - (1-k^2)c\sigma_x = 0,$$

经过消减后得到如下的两个微分方程

$$(1-k^2)\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = 0,$$

$$(1-k^2)\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0.$$

由这两个方程立即得知, 当 $k>1$, 即 $\tilde{u}>c$ 时, 这正是双曲型的情形. 于是特征是直线, 它们与 $x$ 轴构成一个角 $\alpha$, 叫做 Mach角, 对于这个角有 $|\sin\alpha| = \dfrac{1}{k} = \dfrac{c}{\tilde{u}}$.

在具有平行于一平面器壁的基速度 $\tilde{u}$ 的流体或气体的运动中, 通过实验能体察到这两个特征组的现实意义. 在实验中把器壁的一小段 $AB$ 弄得粗糙不平或者凹凹凸凸, 使得速度沿器壁产生一个微小的垂直分量 $\lambda$. 在这种流体运动可由近似方程组表示的假设之下, 这种由器壁凹凸不平而引起的干扰, 将沿着两条始于 $AB$ 且与器壁构成一个角度 $\alpha$ 的平行特征带, 延续到流体场中去.

## 5.4 唯一性. 依赖区域

在以下几节中将常常强调变数量 $y$ 是时间并以 $t$ 来代 $y$.

对于具有指定初值

$$u(x,0) = \psi(x)$$

的双曲型方程或方程组

$$L(u) = f(x,t),$$

其 Cauchy 初值问题的解的存在性证明将在第 5.6, 5.7, 5.8 节中给出. 这里假定存在一个解并证明这解为数据 $f(x,t)$ 及 $\psi(x)$ 所唯一确定. 不过, 在一点 $P$ 处, 解是仅由空间 $\Gamma$ 的一部分上的数据来确定的. $u$ 对于数据的这种依从关系显示出由双曲型方程所制约的现象的传播速度的有限性.

### 5.4.1 依赖区域、影响区域及决定区域

在坐标为 $x, t(t>0)$ 的一点 $P$ 处的 Cauchy 问题的解 $u(P)$ 只依赖于在 $P$ 点的有限"依赖区域" $\Gamma_p$ 上的数据. $\Gamma_p$ 是由经过点 $P$ 的那些最外边的特征曲线[①]所

① 若最外边的一条特征曲线与另一条相交, 则这条最外边的特征作为另一条的一段弧被延续下去.

界定的上半平面中的点集组成的 (见图 5-2). 若微分方程是齐次的, 即若 $f=0$, 则 $u(P)$ 只依赖于那些最外边的特征曲线① 在 $x$ 轴上所截下的一段 $\gamma_p$ 上的初始数据 $\psi(x)$. 也可叙述如下: $u(P)$ 不依赖于 $\gamma_p$ 以外的数据; 或者, 若在 $\gamma_p$ 上 $\psi(x)=\psi^*(x)$ 而在 $\Gamma_p$ 上 $f=f^*$, 则 $L[u]=f$ 及 $L[u]=f^*$ 的各自以 $\psi(x)$ 及 $\psi^*(x)$ 为初值的解 $u(P)$ 及 $u^*(P)$ 在 $P$ 处相等. 有时人们说量 $u(P)$ 不"理会" $\Gamma_p$ 之外的数据, 就是指的这种情形.

从现在起只限于讨论齐次的双曲型方程 $L[u]=0$(这种限制并非特殊化), 并把 $x$ 轴上的线段 $\gamma_p$ 叫做 $P$ 的依赖区域.

相应地, 若 $\mathfrak{S}$ 是 $x$ 轴上的一个点集, 而上半平面某个域上各点的依赖区域都有 $\mathfrak{S}$ 中的点, 则称此平面域为集 $\mathfrak{S}$ 的影响区域. 若 $\mathfrak{S}$ 是一个区间, 则它的影响区域为从 $\mathfrak{S}$ 的端点向上半平面引出的最外边的特征曲线所界定. 如果能够对任意大的 $t$ 值展延特征, 那么这个影响区域是无界的.

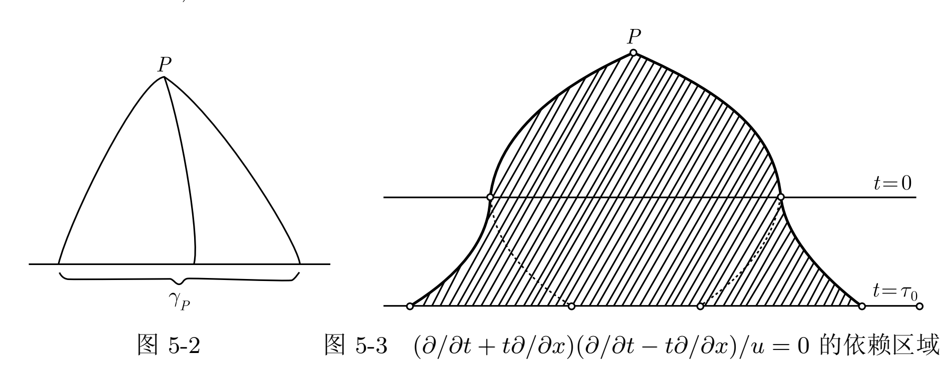



图 5-2　　图 5-3　$(\partial/\partial t+t\partial/\partial x)(\partial/\partial t-t\partial/\partial x)/u=0$ 的依赖区域

最后, 定义 $x$ 轴上的区间 $\mathfrak{S}$ 的决定区域为具有 $t>0$ 的那些点 —— 它的依赖区域 $\gamma_p$ 完全在 $\mathfrak{S}$ 内, 所成的集. 显然, 决定区域是以 $\mathfrak{S}$ 及从 $\mathfrak{S}$ 的端点向上半平面所引出的内特征曲线为界的; $\mathfrak{S}$ 是这些特征曲线的交点的依赖区域.

这几个密切相关的概念将从下面几小节的唯一性证明中显示出它们的意义.

而这些概念和下面的唯一性定理只指出了反面的事实, 即 $u(P)$ 不依赖于 $\gamma_p$ 以外的数据. 在两个自变量的情形下, 能证明 $\gamma_p$ 的确是严格意义下的依赖区域: 对于 $\gamma_p$ 上的每个点 $Q$, 存在数据 $\psi$ 使得 $u(P)$ 确实依赖于 $Q$ 处及 $Q$ 邻近处 $\psi$ 的值. 对多于两个自变量的情况, 将在第 6 章得知关于严格意义下的依赖区域的相应问题是非常难的.

如果限制 Cauchy 问题的容许数据 $\psi(x)$ 是解析函数, 那么 $\psi$ 在初始曲线上一

① 为简单体现所说情况, 人们倾向于像图 5-2 那样, 假定在所论 $x,t$ 平面的域上, 经过点 $P$ 的那些特征形成含 $k$ 条的一束曲线, 它们 (除 $P$ 点外) 互不相交且连接 $P$ 和 $x$ 轴上的点. 图 5-3 是关系到具有特征 $(t^2-\tau_0^2)^2-4(x-\xi)^2=0$ 的方程 $u_{tt}-t^2u_{xx}=0$ 的, 它说明通过 $t=0$ 上一点可能有两条特征彼此相切的情况, 从而那些最外边的特征不是由一段解析弧组成的. 但在以后的论证中并未排除这种相交的特征.

个任意小的开集上的值就决定了 $\psi$ 在整条曲线上的值. 因此, 依赖区域、影响区域、决定区域的概念对此是无意义的. 要了解这些重要概念, 必须容许更广泛的数据类. 因此, 就双曲型问题来说, 自然要用容许非解析数据的方法来构造解, 而不去依靠第 1 章 1.7 的 Cauchy 和 Kowalewsky 存在定理 (对微分方程及初始条件都假定有解析性).

### 5.4.2 对于二阶线性微分方程解的唯一性的证明

在本小节中将建立如下的事实：对于二阶线性双曲型方程来说, 一点 $P$ 的依赖区域是由经过点 $P$ 逆时间而走向初始曲线的两条特征曲线所包围的. 如果方程是齐次的, 则所得到的三角域的底边就是所求的 $P$ 点的依赖区域 (这种情形已经在第 3 章 3.6 中对波动方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 讨论过).

线段 $\gamma$ 的决定区域是整个三角形域, 因为它包括了所有这种点：它们的依赖区域是含于 $\gamma$ 之内的. 另两条通过 $\gamma$ 的端点的 (“外”) 特征曲线界定了这个线段的影响区域, 因为这个域是由这样一些点组成的：这些点的依赖区域与 $\gamma$ 有公共点.

为了证明三角形域的底边 $\gamma$ 是顶点 $P$ 的依赖区域 $\gamma_p$, 只要能证明唯一性, 即证明当初始值在 $\gamma$ 上为零时齐次方程 $L[u]=0$ 的解在点 $P$ 处为 0 就行了; 如果 $L[u]=f$ 的两个解的初始数据仅在 $\gamma$ 之外不同, 则这两个解的差是在 $\gamma$ 上以零为初始值的齐次方程的解.

下面唯一性的证明基于与微分方程有关的某些能量积分. 已经见到过与抛物型的传热方程解的唯一性证明联系着的这种积分的一个例子 (见第 3 章 3.6). 对于双曲型方程可用类似的想法, 只要积分域是由特征曲线界定的[①].

对于线性问题的唯一性定理：*如果在初始曲线的一段 $\sigma$ 上, 初值为 0, 则齐次方程在由过 $\sigma$ 的端点的内特征曲线所截出的三角形域内, 只有不足道的恒等于 0 的解.*

证明的思路可用波动方程

$$u_{xx}-u_{tt}=0 \tag{1}$$

来说明. 设 $\varGamma$ 是 $x,t$ 平面上由无处为特征的初始曲线 $AB$ 及两条特征线 $PA$ 和 $PB$ 所界定的三角域 (见图 5-4). 目的是要证明若有 $u$ 及导数 $u_t$, 因而也有 $u_x$, 在 $AB$ 上为 0, 则 $u$ 在整个域 $\varGamma$ 上恒为 0. 为此目的, 用直线 $t=$ 常数截掉三角形的顶部, 此直线交 $PA$ 及 $PB$ 于点 $C$ 及 $D$, 然后考虑余下的以 $\gamma'$ 为界的域 $\varGamma'$. 在这个域上将表达式

$$-2u_t(u_{xx}-u_{tt})=(u_x^2)_t+(u_t^2)_t-2(u_xu_t)_x$$

积分, 这个表达式是散度. 根据微分方程, 在 $\varGamma'$ 上求积分得到

① 关于参考文献以及关于 $n+1$ 个自变量的一般情况, 见第 6 章 6.8.

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_{\Gamma'} [(u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma'} [(u_x^2 + u_t^2)t_\nu - 2(u_x u_t)x_\nu]\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中 $x_\nu, t_\nu$ 表示 $\gamma'(AB + BD + DC + CA)$ 的外法线的方向余弦, 而 $s$ 表示弧长. 在特征边界 $CA$ 及 $DB$ 上, $x_\nu^2 = t_\nu^2 = \dfrac{1}{2}$. 所以曲线积分的相应部分可写作

$$
\int_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 \mathrm{d}s,
$$

因而一定是非负的. 在 $AB$ 上被积函数由于零初始数据而为 0, 而在 $CD$ 上有 $t_\nu = 1, x_\nu = 0, \mathrm{d}s = \mathrm{d}x$. 因此得到

$$
\int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\mathrm{d}x = 0,
$$

这就意味着在 $CD$ 上处处有 $u_x^2 + u_t^2 = 0$. 又因 $CD$ 与 $x$ 轴的距离是任意的, 故可断定在 $\Gamma$ 上属于顶点 $P$ 的一个邻域内的所有点处 $u_x$ 及 $u_t$ 等于 0, 但是, $\Gamma$ 的每个点都可看做是一个相当小的含于 $\Gamma$ 且底边含于 $AB$ 的三角域的顶点, 所以, $u_x$ 及 $u_t$ 在 $\Gamma$ 的每个点处为 0. 因此 $u$ 在整个 $\Gamma$ 上为常数, 双因 $u$ 的初值为 0, 故 $u$ 恒等于 0, 这就是结论.

对于线性的二阶微分方程①

$$
L[u] = u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_t - \beta u_x - \delta u = 0
$$

也可作类似的讨论, 这里 $\alpha, \beta, \delta$ 是 $x$ 和 $t$ 的连续函数. 为简便计, 限于初始值给定在直线 $t = 0$ 上的初值问题. 于是唯一性定理叙述为若 $u$ 及 $u_t$ 在三角形 $\Gamma$(具有特征边界 $x + t =$常数, $x - t =$常数) 及在 $t = 0$ 上的底边为 $AB$ 的三角形 $ABP$ (见图 5-5)的底边 $AB$ 上为 0, 则 $u$ 在整个三角形上为 0.

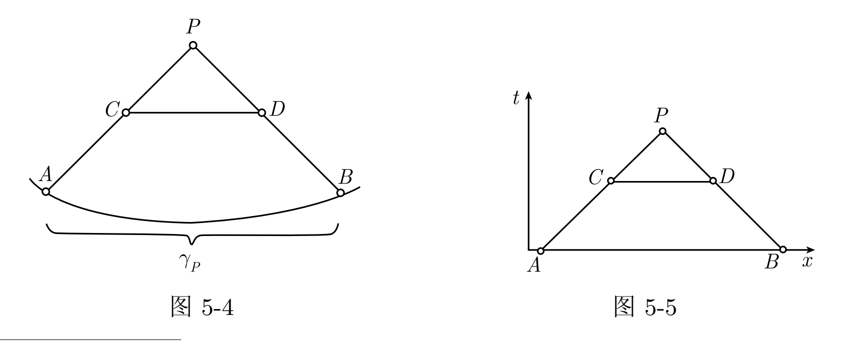



图 5-4　　图 5-5

① 线性二阶双曲型微分方程的一般形式可由此经坐标变换后得出.

首先注意, 对于 $\Gamma$ 上的任意点 $(x,t)$,

$$u(x,t)=\int_0^t u_\tau(x,\tau)\mathrm{d}\tau;$$

因此, 由 Schwarz 不等式, 有

$$u^2(x,t)\leqslant t\int_0^t u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

其次, 用直线 $t=$常数截掉三角形的顶部, 得到以 $H_t$ 为底边的一个较小的三角形和一个具有平行边 $AB$ 及 $H_t$ 的梯形 $\Gamma_t$. 于是, 对三角形中任何 (以 $AB$ 为底的) 梯形部分, 有

$$\int_{H_t} u^2\mathrm{d}x\leqslant t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

将这个式子由 $t=0$ 到 $t=h$ 积分, 得

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_h} u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\leqslant\int_0^h[t\iint_{\Gamma_t} u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^h[h\iint_{\Gamma_h} u_\tau^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t\\&\leqslant h^2\iint_{\Gamma_h}(u_\tau^2+u_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

现在定义一个“能量积分”

$$E(h)=\int_{Hh}(u_x^2+u_t^2)\mathrm{d}x,$$

且在 $\Gamma_h$ 上有积分恒等式

$$0=2u_tL[u]=(u_x^2+u_t^2)_t-2(u_xu_t)_x-2\alpha u_t^2-2\beta u_xu_t-2\delta uu_t.$$

因为 $H_h$ 对应图 5-5 中的 $CD$, 故知 (和前面同样的道理)

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{AC+BD}\frac{1}{t_\nu}(u_xt_\nu-u_tx_\nu)^2\mathrm{d}s+E(h)\\&=2\iint_{\Gamma_h}(\alpha u_t^2+\beta u_tu_x+\delta uu_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\equiv R,\end{aligned}$$

由此可得

$$E(h)\leqslant R.$$

估算右边, 注意到

$$2|u_xu_t|\leqslant u_t^2+u_x^2,\ 2|uu_t|\leqslant u_t^2+u^2.$$

若令 $M$ 表示连续函数 $\alpha, \beta, \delta$ 的绝对值的一个上界, 则得

$$R \leqslant 4M \iint_{\Gamma_h} (u_t^2 + u_x^2 + u^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

于是, 根据上面已证的不等式

$$\iint_{\Gamma_h} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant h^2 \iint_{\Gamma_h} (u_t^2 + u_x^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

得到

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \iint_{\Gamma_h} (u_t^2 + u_x^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C \int_0^h E(\alpha) \mathrm{d}\alpha,$$

其中 $C = 4M(1+h^2)$, 而 $h$ 是梯形 $\Gamma_h$ 的高. 若 $l$ 是满足 $l > h$ 的任意值, 则有

$$E(h) \leqslant C \int_0^h E(\alpha) \mathrm{d}\alpha \leqslant C \int_0^l E(\alpha) \mathrm{d}\alpha.$$

将这关系式对 $h$ 由 0 到 $l$ 积分, 得

$$\int_0^l E(h) \mathrm{d}h \leqslant Cl \int_0^l E(h) \mathrm{d}h.$$

若 $E(h)$ 在区间 $0 \leqslant h \leqslant l$ 上处处不为零, 则得

$$1 \leqslant Cl,$$

当选取 $l < \dfrac{1}{C}$ 时, 这显然是不可能的. 因此, 在区间 $0 \leqslant h \leqslant l$ 上肯定有 $E \equiv 0$. 以 $t = l, t = 2l, \cdots$ 为初始线, 重复上述方法, 在做了有限步之后, 可看出 $E$ 在整个三角形 $\Gamma$ 上为 0; 所以 $u$ 是常数, 事际是 0, 这就是所要证明的.

### 5.4.3　对于一阶线性组的一般唯一性定理

“能量积分”法使得一阶双曲型组有一个明晰的唯一性证明. 将非齐次组写成矢量与矩阵的形式

$$u_t + Au_x + Bu + c = 0, \tag{2}$$

其中 $u$ 是未知的矢量函数, $A(x,t)$ 和 $B(x,t)$ 是已知的矩阵, $c(x,t)$ 是已知的矢量.

不失一般性, 为了证明可假定 $A=(a_{ik}\ (x,t))$ 是一个对称矩阵并记住线性双曲型组可变换为对称型 (如变换为特征标准形式, 见 5.2.1). 再假定 $A$ 有连续的导数而 $B$ 和 $c$ 是连续的.

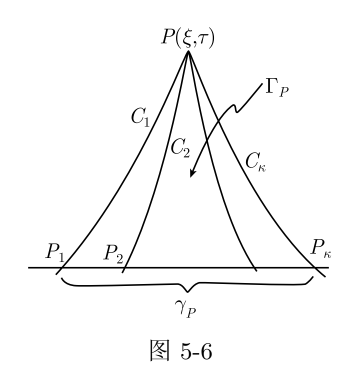


图 5-6

通过坐标为 $\xi,\tau$ 的点 $P$ 逆向引特征曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_k$, 得到与初始线 $t=0$ 的交点 $P_1$, $P_2,\cdots,P_k$[①](见图 5-6).

现在可叙述如下的唯一性定理: 若 $c=0$ 且在直线 $t=0$ 上包含所有点 $P_k$ 的一个闭区间上 $u(x,0)=0$, 则 $u(\xi,\tau)=0$.

最小的这种区间, 即由过 $P$ 的最外边的特征所截出的区间, 包含 $P$ 的依赖区域[②]. 事实上, 如果在 $P_1P_k$ 上 $u(x,0)=0$, 则在由过 $P$ 的最外边的特征所截出的三角域 $\Gamma_p$ (以直线 $t=0$ 上的区间 $P_1P_k$ 为底) 上 $u(x,t)=0$.

为了证明, 利用 Green恒等式, 它等价于

$$(u,Au)_x=(u_x,Au)+(u,A_xu)+(u,Au_x);$$

由于 $A$ 是对称的, $(u,Au_x)=(Au,u_x)$, 这恒等式化为

$$2(u,Au_x)=(u,Au)_x-(u,A_xu).$$

取微分方程 (2) 与矢量 $u$ 的内积并利用上面的关系式, 得到 (对于 $c=0$)

$$\frac{1}{2}(u,u)_t+\frac{1}{2}(u,Au)_x-\frac{1}{2}(u,A_xu)+(u,Bu)=0.$$

一个简便的办法是引入具有常数 $\mu$ 的未知矢量

$$v=\mathrm{e}^{-\mu t}u$$

以代替 $u$, 于是导出微分方程

$$v_t+Av_x+B^*v=0 \tag{2a}$$

及初始条件 $v(x,0)=0$, 其中, 以 $I$ 表示单位矩阵,

$$B^*=B+\mu I.$$

如果再用 $u$ 代替 $v$, 则前面的二次恒等式变为

$$\frac{1}{2}(u,u)_t+\frac{1}{2}(u,Au)_x=(u,\hat{B}u),$$

① 某些特征在所论域上可能是多重的.

② 区间 $P_1P_k$ 确实是 $P$ 的依赖区域, 第 5.2 节所作的说明也适用于此.

右边的二次型由矩阵

$$\hat{B}=-B^*+\frac{1}{2}A_x$$

形成, 它就是本办法的目的. 选取足够大的 $\mu$, 就可断定 $\hat{B}$ 是负定的, 即 $(u,\hat{B}u)\leqslant 0$.

现在再以 $\beta_h=P_1P_kA_kA_1$ 为边界的类梯形域 $\Gamma_h$(见图 5-7) 上积分, 以 $x_\nu,t$, 表示向外的单位法矢量的分量, 则得 Green 公式

$$\begin{aligned}0&\geqslant\frac{1}{2}\iint_{\Gamma_h}[(u,u)_t+(u,Au)_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{\beta_h}[(u,u)t_\nu+(u,Au)x_\nu]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\int_{A_1A_k+P_kP_1}(u,u)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{C_1+C_k}x_\nu\left(u,\left[A+\frac{t_\nu}{x_\nu}I\right]u\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

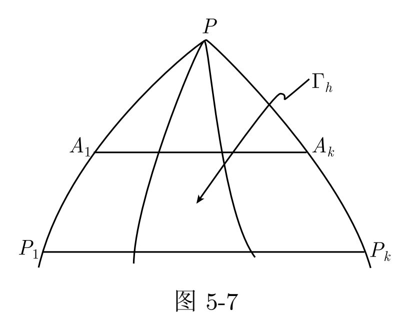



图 5-7

采用记号

$$E(h)=\frac{1}{2}\int_{A_1}^{A_k}(u,u)\mathrm{d}x,$$

Green 公式就表示为

$$E(h)-E(0)\leqslant-\frac{1}{2}\int_{C_1+C_k}x_\nu\left(u_\nu\left[A+\frac{t_\nu}{x_\nu}I\right]u\right)\mathrm{d}s. \tag{3}$$

证明右边是非正的. 为此目的, 记 $C_1$ 及 $C_k$ 是特征曲线 $\phi^1(x,t)=0,\phi^k(x,t)=0$, 因而, 它们满足微分方程

$$-\frac{\phi_t^1}{\phi_x^1}=\tau^1,\ -\frac{\phi_t^k}{\phi_x^k}=\tau^k,$$

其中 $\tau^1,\tau^k$ 是矩阵 $A$ 的特征值, 即使得 $A-\tau I$ 是奇异的那些值 (见 5.2).

沿着 $C_1=\phi^1$, 外法线的分量与 $\phi_x^1,\phi_t^1$ 成比例, 因此 $-\dfrac{t_\nu}{x_\nu}=\tau^1$. 因为 $C_1$ 是靠左最外边的特征曲线, 所以 $\tau^1$ 是 $A$ 的最大的特征值. 同理, 沿着 $C_k=\phi^k$, 法线的分量正比于 $\phi_x^k,\phi_t^k$, 而 $-\dfrac{t_\nu}{x_\nu}=\tau^k$ 是 $A$ 的最小的特征值. 对于对称矩阵 $A$, 最大与

最小的特征值可用

$$\tau^1 = \max\frac{(u, Au)}{(u, u)}, \quad \tau^k = \min\frac{(u, Au)}{(u, u)}$$

来表征 (见卷 I 第 1 章 1.4.1). 于是

$$(u, u)\tau^1 \geqslant (u, Au), \quad (u, u)\tau^k \leqslant (u, Au),$$

或

$$(u, [A - \tau^1 I]u) \leqslant 0, \quad (u, [A - \tau^k I]u) \geqslant 0.$$

因在 $C_1$ 上 $x_\nu < 0$, 而在 $C_k$ 上 $x_\nu > 0$, 故有

$$-\frac{1}{2}\int_{C_i} x_\nu \left(u, \left[A + \frac{t_y}{x_\nu} I\right] u\right) \mathrm{d}s \leqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, k),$$

这就证明了 (3) 的右边是非正的, 于是有

$$E(h) \leqslant E(0). \tag{4}$$

又因根据假设 $E(0) = 0$, 故得 $0 \leqslant E(h) \leqslant 0$, 因此, 对于 $h > 0, E(h) = 0$; 所以当 $t = h$ 时, $u = 0$.

### 5.4.4 关于拟线性组的唯一性

5.4.3 中的唯一性定理对于一阶拟线性方程组

$$u_t + A(x, t, u)u_x + B(x, t, u) = 0 \tag{5}$$

仍成立, 虽然 (5) 的特征 $C_k$ 依赖于解 $u$.

这里假定矩阵 $A$ 和 $B$ 在所论域上具有关于 $x, t$ 及 $u$ 的连续导数.

设 $u$ 及 $v$ 是在域 $D$ 上确定的在初始区间上有同样初始值的两个解. 则函数

$$z(x, t) = u - v$$

具有零初始值.

由对 $u$ 的微分方程减去对 $v$ 的微分方程并略掉 $x$ 和 $t$, 得

$$z_t + A(v)z_x + [A(u) - A(v)]u_x + B(u) - B(v) = 0. \tag{6}$$

由于矩阵 $A$ 和 $B$ 的连续性及可微性, 可应用中值定理:

$$A(u) - A(v) = H(u, v)z;\ B(u) - B(v) = K(u, v)z,$$

其中 $H, K$ 是连续函数. 现在把 $u, v, u_x$ 当做是 $x, t$ 的已知表达式, 并把这些表达式代入 $H, K$ 及 $A(v)$ 中, 则 (6) 变成一个关于 $z$ 的线性齐次微分方程

$$z_t + az_x + bz = 0,$$

它的初始值为零. 5.4.3 节中的定理肯定了 $z$ 恒等于 0, 因此对于拟线性方程的唯一性定理也得到了证明.

### 5.4.5 能量不等式

5.4.3 节中的不等式 (4) 断定对于正的 $h, E(h)$ 的值以 $E(0)$ 为界. 在描述物理现象的许多方程中, $E(h)$ 可解释为在时刻 $h$ 的物理系统的一部分中所含的能量. 由于这个缘故, 在这种情况及以此为模拟的一般情况下, 不等式 (4) 就叫做**能量不等式**.

在第 6 章 6.7 中, 这种能量不等式将被用来证明 $n$ 个自变量的初值问题的解的存在性. 不过, 对于两个自变量的情形, 在本章 5.6 中, 将用一种直接法来构造解, 同时对唯一性定理给出一个与刚才不同的证明.

## 5.5 解的 Riemann 表示

双曲型偏微分方程的现代理论是由 Bernhard Riemann 对一个二阶方程的初值问题的解的表示开始的①. 其著作除了明显可解的例子之外, 并没给出一般的存在性证明, 也没给出解的构造法. 只在解 $u$ 存在的假定下, 给出了 $u$ 的一个优美而明显的积分表达式, 形状与椭圆型方程边值问题的解用 Green 函数的表达式相似, 而事实上, 是表示“线性泛函”的一大类其他这种公式中的典型②. Riemann 理论的初等讲法以后将大为推广.

### 5.5.1 初值问题

任何二阶线性双曲型微分方程经过适当变换之后, 都可写成下列两种形式之一 (参考第 3 章, 3.2.1):

$$L[u] \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1}$$

$$L[u] \equiv u_{yy} - u_{xx} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{1a}$$

其中 $a, b, c, f$ 是自变量 $x, y$ 的已知的 (连续可微) 函数.

① 在 Riemann 的关于可压缩气体动力学的经典著作的一篇附录中, 他发展了这个理论 (参考 G. F. B. Riemann[1]).

② 参考 357 页脚注和第 6 章 6.15 及附录中的进一步的讨论.

假定初始曲线 $C$ 是“自由”的, 即无处与特征方向相切. 方程 (1) 的特征是平行于坐标轴的直线; 方程 (1a) 的特征是直线 $x+y=$ 常数和 $x-y=$ 常数.

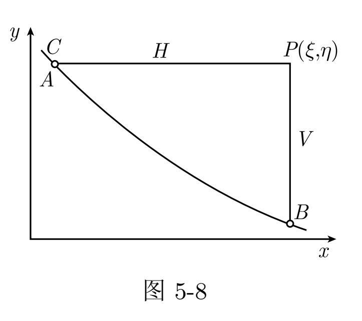


图 5-8

目的是要在一个点 $P$ 处将解 $u$ 用 $f$ 和初始数据表示出来. 这里初始数据是指在 $C$ 上 $u$ 的值及 $u$ 的一个“外”导数的值 (由这种初始数据可得知 $u_n=p$ 及 $u_y=q$ 在 $C$ 上的值). 由 5.4 可知点 $P:(\xi,\eta)$ 的依赖区域是由过 $P$ 的两条特征及曲线 $C$ 所截出的区域. 在方程 (1) 的情形, 它是如图 5-8 所示的三角域 ◺ .

如果初始曲线退化为由特征线 $x=\alpha$ 及 $y=\beta$ 所成的直角, 就不能再在 $C$ 上指定两个条件, 而只能提出“特征初值问题”, 在此问题中, 只指定了一个量 $u$ 在 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 上的值.

### 5.5.2 Riemann 函数

Riemann 导出的表达式是从微分方程和有限的线性方程组之间的相似性出发的. 可用下述方法解出这种方程组中的未知数 $u^i$: 用待定的量 $v^i$ 乘右边, 把这些乘积加起来, 将所得到的关于 $u^i$ 及 $v^i$ 的双线性式提出未知量 $u^i$ 作为因子而重新编排. 最后, 除了使一个系数 (如 $u_1$ 的系数) 为 1 以外, 要使所有 $u^i$ 的系数都为 0, 从而确定 $v^i$.

于是得到 $u^1$ 的表达式, 同样可得到 $u^2$ 的表达式, 等等. 对应的量 $v^i$ 依赖于方程的系数但与方程的右边无关.

微分方程的解在 $P$ 处的值也可用类似的方法表示出来: 用函数 $v$ 乘微分方程, 在域 ◺ 上积分, 用 Green 公式变换积分使得 $u$ 成为被积函数的因子, 然后试图决定 $v$ 使之得到所需求的表达式.

在使 $vL[u]-uL^*[v]$ 成为一个散度式的要求下, 曾引入过算子 $L$ 的伴随算子 $L^*$ 的概念 (参考第 3 章附录 I 3′.2). 对于方程 (1), $L^*$ 由公式

$$L^*[v]=v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv$$

给出, 而且有

$$vL[u]-uL^*[v]=(vu_x+buv)_y-(uv_y-auv)_x.$$

把这个式子在具有边界 $\Gamma$ 的域 $G$ 上积分, 根据 Gauss 公式得到

$$-\iint_G (vL[u]-uL^*[v])\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma [(vu_x+buv)\mathrm{d}x+(uv_y-auv)\mathrm{d}y].$$

把这个公式用于 $P$ 的依赖区域, 利用 (1), 得到

$$\begin{aligned}-\iint_G (fv - uL^*[v])\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{AB+BP+PA} [v(u_x + bu)\mathrm{d}x + u(v_y - av)\mathrm{d}y] \\ &= \int_{AB} [v(u_x + bu)\mathrm{d}x + u(v_y - av)\mathrm{d}y] \\ &\quad + \int_{BP} u(v_y - av)\mathrm{d}y - \int_{AP} v(u_x + bu)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

又因

$$\int_{AP} v(u_x + bu)\mathrm{d}x = v(P)u(P) - v(A)u(A) - \int_{AP} u(u_x - bv)\mathrm{d}x,$$

故得

$$\begin{aligned}u(P)v(P) =& u(A)v(A) + \int_{AP} u(v_x - bv)\mathrm{d}x + \int_{BP} u(v_y - av)\mathrm{d}y \\ &+ \int_{AB} [v(u_x + bu)\mathrm{d}x + u(v_y - av)\mathrm{d}y] + \iint_G (fv - uL^*[v])\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

要得到 $u(P) = u(\xi, \eta)$ 的表达式, 选取一个服从下述条件的函数 $R(x, y; \xi, \eta)$ 作 $v$.

1) 作为 $x$ 和 $y$ 的函数, $R$ 满足伴随方程

$$L^*_{(x,y)}[R] = 0. \tag{2}$$

2) 在 $AP$ 上 $R_x = bR$, 在 $BP$ 上 $R_y = aR$, 或者为

$$R_x(x, y; \xi, \eta) = b(x, \eta)R(x, y; \xi, \eta), \quad 在y = \eta上,$$

$$R_y(x, y; \xi, \eta) = a(\xi, y)R(x, y; \xi, \eta), \quad 在x = \xi上.$$

3) $R(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$.

条件 2) 是 $R$ 沿着特征的常微分方程. 把这两个方程积分, 并应用 3) 来决定积分常数, 得到 $R$ 在过 $P$ 的特征上的值:

$$R(x, \eta; \xi, \eta) = \exp\left\{\int_\xi^x b(\lambda, \eta)\mathrm{d}\lambda\right\}, \tag{3}$$

$$R(\xi, y; \xi, \eta) = \exp\left\{\int_\eta^y a(\xi, \lambda)\mathrm{d}\lambda\right\}. \tag{3a}$$

求方程 (2) 具有数据 (3), (3a) 的解 $R$ 的问题是一个"特征初值问题". 它的解的存在性将在 5.6 的节首讨论. 函数 $R$ 叫做关于算子 $L$ 的 Riemann 函数, 它给出了 Riemann 表示公式

$$u(P) = u(A)R(A;\xi,\eta) + \int_{AB}[R(u_x+bu)\mathrm{d}x + u(R_y-aR)\mathrm{d}y] + \iint_G Rf\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要想得到更对称的式子, 将上式加上恒等式, 则有

$$0 = \frac{1}{2}[u(B)R(B)-u(A)R(A)] - \int_{AB}\left[\frac{1}{2}(u_xR+uR_x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(u_yR+uR_y)\mathrm{d}y\right],$$

它是沿 $C$ 在 $A$ 与 $B$ 之间对 $u\mathrm{d}R$ 分部积分而得到的. 于是有

$$\begin{aligned} u(P) =& \frac{1}{2}[u(A)R(A)+u(B)R(B)] \\ &+ \int_{AB}\Bigg(\left[\frac{1}{2}Ru_x + \left(bR-\frac{1}{2}R_x\right)u\right]\mathrm{d}x \\ &- \left[\frac{1}{2}Ru_y + \left(aR-\frac{1}{2}R_y\right)u\right]\mathrm{d}y\Bigg) + \iint_G Rf\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4}$$

公式 (4) 表示方程 (1) 对沿任意非特征曲线 $C$ 给出的任意初值的解, 该解是借助伴随方程的依赖于 $x, y$ 和参数 $\xi, \eta$ 的一个解 $R$ 而得到的①.

推导表达式 (4) 时, 已经假定了 $L[u]=f$ 的具有沿 $AB$ 的初始数据的解 $u$ 以及 Riemann 函数 $R$ 都是存在的. 容易验证下述事实：如果 Riemann 函数存在且对它的自变量有足够多阶的导数, 则由 (4) 给出的函数 $u(P)$ 确实是 $L[u]=f$ 的具有指定数据的解, 只要 $C$ 无处是特征的. 但这个论断仍旧不能简化一般的存在性证明, 因为定义为特征初值问题 (具有似乎是特殊的初始值) 的解的 Riemann 函数, 一般说来, 并不比任意的自由初值问题的解更容易得出来. 不过, 在某些特殊情形

① Riemann 公式 (4) 是下列光辉的一般原理的特殊情形：一个"连续线性泛函" $u(P)=L[f]$, 即一个线性地且连续地依赖于函数 $f(Q)$ 的量, 可以表示为

$$u(P) = \int K(Q,P)/(Q)\mathrm{d}Q,$$

其中 $K$ 是 $Q$ 与 $P$ 的函数, 且积分是展布在变量 $Q$ 的变域上的. 自然地, 这样一个一般的表示公式 (属于 F. Riesz 的) 仅在适当的正则性条件下成立. 但是, 无论如何它对处理问题的大量方法起着启发促进的作用. 在某种情形下, 解 $u$ 是 ▽ 中的 $f(x,y)$ 和 $C$ 上的初值、且依赖于参数 $\xi$、$\eta$ 的一个线性泛函. 以后在第 6 章中将看到, 由于想得到这种积分表示法, 结果引起了更深远的推广.

下, 能够用显式造出 Riemann 函数来 (如 5.5.5 中的例 5.5.2)①.

假设 $R$ 存在, 公式 (4) 表明 (1) 的具有指定数据的解 $u$ 是唯一的. 根据 Holmgren 定理 (参考第 3 章附录 II), 这是有据可依的.

### 5.5.3 Riemann 函数的对称性

假定 $u$ 是 $L[u]=u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$ 的定义在矩形 $PADB$(见图 5-9) 上的一个解, 此矩形的边 $AD$ 和 $DB$ 是特征线, 它们是由初始曲线 $AB$ 退化而成的. 于是 Riemann 表示式 (4) 成为

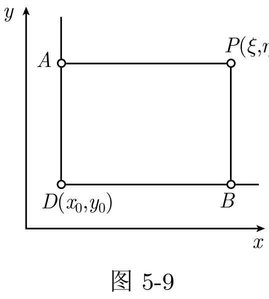



图 5-9

$$u(P)=\frac{1}{2}[u(A)R(A)+u(B)R(B)] -\frac{1}{2}\int_D^A(R_yu-u_yR-2auR)\mathrm{d}y -\frac{1}{2}\int_D^B(R_xu-u_xR-2buR)\mathrm{d}x.$$

利用恒等式

$$R_\mathrm{s}u-u_\mathrm{s}R-2guR=(uR)_\mathrm{s}-2R(u_\mathrm{s}+gu)$$

并积分第一项, 得

$$u(P)=u(D)R(D)+\int_D^A R(u_y+au)\mathrm{d}y+\int_D^B R(u_x+bu)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

现在选取 $u$ 是伴随方程 $L^*[v]=v_{xy}-av_x-bv_y+dv$(其中 $d=c-a_x-b_y$) 关于点 $D$ 的 Riemann 函数:

$$u=R^*(x,y;D).$$

Riemann 函数的性质 (参考 5.5.2 中的 1), 2), 3)) 表明

$$\begin{aligned}&L^{**}[R^*]=L[R^*]=0,\\&R^*_y+aR^*=0,\quad 在DA上,\\&R^*_x+bR^*=0,\quad 在DB上,\end{aligned}$$

且 $R^*(D,D)=1$. 所以 (5) 成为

① Riemann 表示公式首先由 P. Burgatti[1] 和 F. Rellich[2] 推广到了两个自变量的高阶线性方程上. E. Holmgren 将 Riemann 方法扩展到两个自变量的一阶方程组 (E. Holmgren[2]). 也可参考 5.5.4 和第 6 章 6.15.

$$R^*(P;D) = R(D;P). \tag{6}$$

换句话说, 算子 $L$ 的 Riemann 函数变成当参数 $\xi, \eta$ 与变量 $x, y$ 交换后的伴随算子 $L^*$ 的 Riemann 函数①. Riemann 函数的这种"可逆"性意味着, 作为参数的函数, $R$ 满足方程

$$L_{(\xi,\eta)}[R(x,y;\xi,\eta)] = 0, \tag{7}$$

而 $R$ 原来是定义为伴随方程的解的, 现在它也表现为 $L[u]=0$ 的解的双参数族.

### 5.5.4 Riemann 函数及由一点发出的辐射. 向高阶问题的推广

考虑方程 (1a)(将变量 $y$ 与时间 $t$ 等同起来)

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} + au_x + bu_t + cu = f.$$

令 $\{f_k\}$ 是具有下述性质的函数序列:

(i)$f_k \geqslant 0$ 仅在定点 $Q=(\alpha,\beta)$ 的一个邻域 $N_k$ 上异于 0;

(ii) 对每个 $k$ 有 $\iint_{N_k} f_k \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 1$;

(iii) 当 $k\to\infty$ 时, 邻域 $N_k$ 收缩为点 $Q$②.

用 $u_k$ 表示 $L[u]=f_k$ 的解, 它与它的一阶导数沿着初始曲线 $C$ 都等于 0. 于是用 Riemann 表示式易于证明 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ 存在且

$$u(P) = R(Q;P).$$

因此, 解 $u(x,t)=R(\alpha,\beta;x,t)$ 在物理上可解释为从时空中的点 $Q$ 发出的单位辐射在 $(x,t)$ 处的强度. 用简明的数学语言来说, $u(x,t)$ 就是 $t>0$ 时

$$L[u] = \delta(x-\xi, t-\tau)$$

的具有初始条件 $u(x,0)=0$ 的解.

对于任意的 $f$, Riemann 公式表示由那些在 $C$ 的上方且位于点 $(x,t)$ 的依赖区域内的一切点 $(\alpha,\beta)$ 发出的辐射效果的叠加. 这暗示着怎样把 Riemann 函数适当地推广到高阶问题以及更多的空间变量的情况 (见第 6 章 6.15). 在这里只简单地提一下, 因为在第 6 章 6.15 中将含有全部理论的阐述.

为简便计, 考虑关于含 $k$ 个分量的矢量 $u$ 的算子 $L[u]$, 并假定 $L$ 由 $k$ 个一阶线性算子组成, 则 Riemann 张量定义为伴随方程

① 特别地, 由此推知, 若 $L$ 是自伴随的, 则 $R$ 对于参数和自变量是对称的.

② 这时 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 相应于 Dirac 的 $\delta$ 函数.

$$L^*[R(x,t;\xi,\tau)] = 0 \qquad (t < \tau)$$

的解, 由 Dirac 的 $\delta$ 函数表示出来, 这个解当 $t=\tau$ 时满足具有单矩位阵 $I$ 的终端条件

$$R(x,t;\xi,\tau) = \delta(x-\xi)I.$$

在第 6 章 6.15 中将给出 Riemann 张量 $R$ 的确切的构造法及详细的解释. $R$ 实质上可用沿特征曲线的累积分作出来, 这些特征曲线如第 6 章 6.4 中所示, 是由点 $P$ 向 $t=0$ 引出的.

### 5.5.5 例

1) 对于最简单的波动方程

$$u_{xy} = 0 \tag{8}$$

Riemann 函数 $R(x,y;\xi,\eta) \equiv 1$, 因此方程的解由

$$u(P) = \frac{1}{2}[u(A)+u(B)] + \frac{1}{2}\int_{AB}(u_x\mathrm{d}x - u_y\mathrm{d}y) \tag{9}$$

给出. 引入新坐标

$$x+y = X,$$

$$x-y = T,$$

方程 (8) 变为

$$u_{TT} - u_{XX} = 0, \tag{8a}$$

而 (9) 变为

$$\begin{aligned} u(P) =& \frac{1}{2}[u(A)+u(B)] + \frac{1}{2}\int_{AB}[(u_X+u_T)\frac{1}{2}(\mathrm{d}X+dT) \\ & -(u_X-u_T)\frac{1}{2}(\mathrm{d}X-\mathrm{d}T)] \\ =& \frac{1}{2}[u(A)+u(B)] + \frac{1}{2}\int_{AB}(u_T\mathrm{d}X + u_X\mathrm{d}T). \end{aligned} \tag{9a}$$

当初始曲线是直线 $T=0$, 即当 $A$, $B$ 是点 $(X-T,0),(X+T,0)$ 时, (9a) 变为

$$u(X,T) = \frac{1}{2}[u(X-T,0)+u(X+T,0)] + \frac{1}{2}\int_{X-T}^{X+T} u_T(\lambda,0)\mathrm{d}\lambda. \tag{10}$$

(8a) 的一般解可写成若干种形式, 其中最简单的是

$$u(X,T) = f(X-T) + g(X+T),$$

这里 $f$ 和 $g$ 是任意函数. 要解决初值问题, 必须从初始数据定出 $f$ 和 $g$. 当然, 这样就又回到公式 (10), 它常常是由这种途径得到的.

2) 其次, 考虑具有常数 $c$ 的方程

$$L[u] = u_{xy} + cu = g(x,y),$$

它等价于电报方程(见第 3 章 3.4). 这个方程是自伴随的. 由于算子 $L$ 具有常系数, $R(P;Q)$ 只依赖于点 $P$ 与 $Q$ 的相对位置. 并且, 若令 $Q$ 为原点, 就可看出, 当

$$v(x,y) = R(x,y;0,0)$$

满足对 Riemann 函数所提出的各个条件 (见 5.5.2 节的 1), 2), 3)) 时, 则

$$w(x,y) = v(\alpha x, \alpha^{-1} y)$$

也满足这些条件. 显然 $L^*[v(x,y)] = 0$ 意味着 $L^*[w] = 0$, 所以满足了条件 1). 条件 2) 指的是 (因 $a = b = 0$) 沿着坐标轴 $v = R$ 保持为常数. 如果 $v$ 有这个性质, 则 $w$ 也有这个性质; 最后, $v(0,0) = 1$ 意味着 $w(0,0) = 1$. 因这些条件唯一地确定 Riemann 函数 (见 5.6), 故知 $w(x,y) \equiv v(x,y)$ 是一个 $xy$ 的函数. 更一般地, 对于 $Q = (\xi,\eta)$, Riemann 函数 $R(P;Q)$ 具有形式

$$R(x,y;\xi,\eta) = f(z),$$

其中

$$z = (x-\xi)(y-\eta).$$

于是方程 $L^*[R] = 0$ 就变成对于 $f$ 的方程

$$zf'' + f' + cf = 0.$$

若令 $\lambda = \sqrt{4cz}$, 则它又变成 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} + f = 0.$$

该方程的解 (它在原点是正则的) 是 Bessel 函数

$$f = J_0(\lambda)$$

(见卷 I 第 7 章 7.2). 实际上,

$$R(x,y;\xi,\eta) = J_0(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)})$$

就是所需要的 Riemann 函数, 因为可立即看出, 它在 $x=\xi, y=\eta$ 上满足预定的条件.

3) 在 5.3.1 中讨论过一维的等熵流; 引入 Riemann 不变量 $r$ 及 $s$ 并将运动方程变为如下的形式

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right)r=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right)s=0.\end{aligned}\right\}$$

这个方程组可用速矢端曲线变换把它线性化 (见 5.2.2), 而后得到

$$\left.\begin{aligned}x_s-(u+c)t_s=0,\\ -x_r+(u-c)t_r=0.\end{aligned}\right\}$$

消去 $x$ 得到二阶方程

$$-2ct_{rs}+(u-c)_s t_r-(u+c)_r t_s=0.$$

对于多方 (Polytropic) 气体, 求出的 Riemann 不变量为 (见 5.3.1)

$$r=\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1},\quad s=-\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1},$$

因此二阶方程变为

$$(r+s)t_{rs}+\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(t_r+t_s)=0.$$

为了适合本节, 现在改变记号, 令 $r=x, s=y, t=u, (\gamma+1)/2(\gamma-1)=-n$, 则上述二阶方程变为

$$L[u]\equiv u_{xy}-\frac{n}{x+y}(u_x+u_y)=0. \tag{11}$$

根据 5.5.2, 其 Riemann 函数必须满足方程

$$L^*[R]\equiv R_{xy}+\frac{n}{x+y}(R_x+R_y)-\frac{2n}{(x+y)^2}R=0 \tag{12}$$

且有

$$R_x(x,\eta;\xi,\eta)=-\frac{n}{x+\eta}R(x,\eta;\xi,\eta),$$

$$R_y(\xi,y;\xi,\eta)=-\frac{n}{\xi+y}R(\xi,y;\xi,\eta)$$

及 $R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1$. 把这些条件沿着特征曲线积分时, 构成 (12) 的数据

$$R(x,\eta;\xi,\eta)=\left(\frac{x+\eta}{\xi+\eta}\right)^{-n}, \tag{13}$$

$$R(\xi,y;\xi,\eta)=\left(\frac{\xi+y}{\xi+\eta}\right)^{-n} \tag{13a}$$

(参考方程 (2), (3), 及 (3a)).

当 $n$ 为正整数时方程 (11) 有几个特别简单的解. 用 $x+y$ 乘 (11) 并将结果对 $x$ 微分 $n$ 次, 根据 Leibniz 法则得到

$$(x+y)D_x^{n+1}u_y-nD_x^{n+1}u=0, \tag{14}$$

这里 $D_x$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

由 Riemann 函数的可逆性, 作为 $\xi,\eta$ 的函数, $R$ 满足

$$L_{(\xi,\eta)}[R]=R_{\xi\eta}-\frac{n}{\xi+\eta}(R_\xi+R_\eta)=0 \tag{15}$$

(参考方程 (7)). 因此, 也有

$$(\xi+\eta)D_\xi^{n+1}R_\eta-nD_\xi^{n+1}R=0. \tag{16}$$

方程 (14) 和 (16) 分别是对 $D_x^{n+1}u$ 及 $D_\xi^{n+1}R$ 的常微分方程, 并且有解

$$D_x^{n+1}u=A(x;\xi,\eta)(x+y)^n$$

和

$$D_\xi^{n+1}R=B(\xi;x,y)(\xi+\eta)^n.$$

利用方程 (13), 得知对于 $\eta=y, D_\xi^{n+1}R(x,y;\xi,\eta)=0$, 因此 $B(\xi;x,\eta)=0$, 从而 $B(\xi;x,y)=0$. 由于这个原因以及对 $(n+1)$ 阶 $\eta$ 导数的情形的相应的讨论, 可知 $R$ 是 $\xi,\eta$ 的至多是 $n$ 次的多项式.

试以对于 $\xi=x$、$\eta=y$ 具有正确的边界值的多项式

$$R(x,y;\xi,\eta)=\frac{(\xi+\eta)^n}{(x+y)^n}\psi(w) \tag{17}$$

来作为 (15) 的解, 这里

$$w=-\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(\xi+\eta)(x+y)},$$

还有

$$\psi(w)=1+a_1w+\cdots+a_nw^n.$$

将 (17) 代入 (15), 经过微分运算 $\psi_\xi = \psi' w_\xi, \psi_\eta = \psi' w_\eta, \psi_{\xi\eta} = \psi'' w_\xi w_\eta + \psi' w_{\xi\eta}$, 得知 $\psi$ 满足方程

$$w(w-1)\psi''(w) + (2w-1)\psi'(w) - n(n+1)\psi(w) = 0. \tag{18}$$

这个方程满足 $\psi(0)=1$ 的唯一的解①是超几何级数

$$\psi(z) = \psi(1+n, -n, 1; z).$$

因此, 得到 $R$ 的形式如下:

$$R(x,y;\xi,\eta) = \left(\frac{\xi+\eta}{x+y}\right)^n \psi\left(1+n, -n, 1; -\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{(x+y)(\xi+\eta)}\right). \tag{19}$$

对于正整数 $n$, 它是一个 $n-1$ 次的多项式. 讨论说明了 (19) 对任何 $n$ 都是 Riemann 函数②.

## 5.6 用迭代法解线性和半线性双曲型的初值问题

在下一节中, 对 Cauchy 初值问题的解给出了构造方式的存在性证明. 它们的基础同于熟知的对常微分方程的迭代法.

前面曾经说过, Cauchy 初值问题能够化为初始数据 (或"Cauchy 数据") 为零的问题: 从未知函数 $u$ 减去一个适当的③固定的函数 $w$, 然后考虑对新的未知函数的微分方程. 此外, 还能够变换自变量使得给定的无处为特征的初始曲线 $C$ 变为直线 $y=0$. 不失一般性, 如果方便的话将使用这种简化法, 而仍把未知函数写为 $u$.

### 5.6.1 二阶方程的解的构造

首先简短地处理一下特征初值问题, 特别是打算证明 5.5 中的 Riemann 函数的存在性.

先考虑二阶微分方程

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y), \tag{1}$$

它常可写作关于 $u$ 和 $v = u_y + au$ 的两个一阶的线性方程所成的方程组:

$$\left.\begin{aligned} u_y &= v - au, \\ v_x &= -bv + (a_x + ab - c)u + f. \end{aligned}\right\}$$

① 参考 W. Magnus and F. Oberhettinger[1], 第 2 章 2.1.

② E. T. Copson[1] 对于已知其 Riemann 函数为闭形式的方程进行了考察. 读者在那里也可找到关于获得显式解的方法的有趣的讨论.

③ 如果 $y=y(x)$ 是初始曲线 $C$, 而且在 $C$ 上由 $u=u(x), u_x=p(x), u_y=q(x)$ 给定的非齐次 Cauchy 数据适合成带条件 $u'=p+qy'$, 那么容易验证, 例如 $w(x,y)=u(x)+(y-y(x))q(x)$ 就是这种函数.

不解 (1) 的 Cauchy 问题, 而要解同样简单并在逻辑推导上甚至更为明了的那种更一般的半线性微分方程

$$u_{xy} = F(x, y, u, p, q), \tag{1a}$$

像前面一样, 这里采用了缩写符号

$$u_x = p, \quad u_y = q.$$

这个微分方程又可用关于 $u, p, q$ 的三个方程的半线性组

$$u_x = p, \quad p_y = F(x, y, u, p, q), \quad q_x = F(x, y, u, p, q)$$

来代替.

目的是要构造一个在光滑的非特征曲线 $C$ 上具有初始值 $u = p = q = 0$ 的解 $u$.

假定 $F$ 对它的所有自变量 $x, y, u, p, q$ 具有连续的导数. 假定解 $u$ 具有连续的各一阶导数和一个混合导数 $s = u_{xy}$, 而根据 (1a), $s$ 必定是连续的[1].

这问题仍是有意义的, 并且下面对解的构造法也适合特征初值问题. 这是当曲线 $C$ 成为两条特征线 $AD$ 及 $BD$ 时的那种极限情形 (见图 5-10). 对于这个问题, $u$ 的初始值只允许取在 $C$ 上, 而且像前面见到过的, 微分方程 (1) 变成对 $p$ 及 $q$ 各自沿着 $AD$ 及 $BD$ 的常微分方程. 这两个方程和在 $D$ 处的条件 $p = q = 0$ 一起决定沿着 $C$ 的 $p$ 及 $q$. 除此以外, 以后就没有必要区分 Cauchy 问题是对自由曲线 $C$ 的还是对特征曲线 $C$ 的.

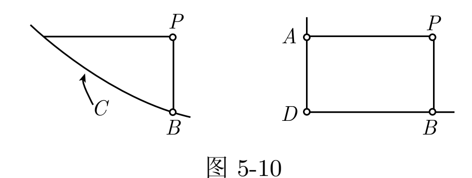



图 5-10

解要在 $x, y$ 平面的一个适当小的三角形域 $\triangledown$ 上来构造, 这域包含着或毗连着给定的一段初始曲线 $C$, 且其点 $P$ 与两条特征弧 $PP_1$ 和 $PP_2$ 连接初始曲线 $C$ 之处在给定的那一段上. 运用具有适当常数 $\mu$ 的不等式 $|u| \leqslant \mu, |p| \leqslant \mu, |q| \leqslant \mu$ 将 $\triangledown$ 扩展为 $(x, y, u, p, q)$ 空间的域 $\overline{G}$. 在此域 $\overline{G}$ 内假定对于适当的常数 $\lambda$ 有 $|F| < \lambda, |F_u| < \lambda, |F_p| < \lambda, |F_q| < \lambda$. 利用初始值 $u = p = q = 0$(或者在特征初始曲线的情形, 仅为 $u = 0$), 对于 $\triangledown$ 上一点 $P$ 方程 (1a) 可写成积分形式

$$u(P) = \iint_{\triangledown} F(x, y, u, p, q) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2}$$

[1] 对于二阶导数 $u_{xx}, u_{yy}$ 不需要作什么规定. 不过, 如果 $F$ 和初始数据具有连续的各二阶导数, 那么下面的构造法也肯定了有连续的二阶导数 $r = u_{xx}, t = u_{yy}$, 甚至有连续的三阶导数 $p_{xy}, q_{xy}$.

(见第 1 章 1.1.1).

现在用

$$v'(P) = Tv = \iint_{\triangledown} F(x, y, v, v_x, v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2a}$$

来定义函数 $v(x,y)$ 到函数 $v'(x,y)$ 的一种积分变换. 则所求的解是函数空间中这种变换 $T$ 的“不动点”, 这个不动点可用迭代法求出. 它是当 $n \to \infty$ 时, 序列 $u_n(u_{n+1} = T_{u_n})$ 的极限. 这序列中的 $u_0$ 是满足初始条件 (如满足 $u = 0, p = 0, q = 0$) 的任意函数.

对于足够小的域 $\triangledown$, 这个迭代确定收敛于方程的解. 为了避免重复, 在本节不作证明. 上面已经说过, 目前的问题等价于一阶的线性或半线性方程组的初值问题. 现在就用迭代法来解这种方程组.

### 5.6.2 对于一阶线性及半线性组的记号和结果①

在下面几个小节中, 将以记号 $t$ 代 $y$. 像在 5.2 中一样, 考虑关于分量为 $u^1$, $u^2, \cdots, u^\kappa$ 的函数矢量 $u(x,t)$ 的 $\kappa$ 个一阶微分方程:

$$u_t + Au_x + B = 0, \tag{3}$$

这里 $k \times k$ 矩阵 $A(x,t)$ 及矢量 $B(x,t,u)$ 都有连续的一阶导数, 且 $B$ 可以线性地或非线性地依赖于变量 $u$. 不失一般性, 可假定 $x$ 轴 $t = 0$ 为初始线, 指定初始 Cauchy 数据为

$$u(x,0) = \psi(x),$$

矢量 $\psi(x)$ 具有连续的一阶导数. 假定方程 (3) 是在 5.2 意义下的双曲型; 即矩阵 $A$ 有 $k$ 个实的本征值 $\tau^1, \tau^2, \cdots, \tau^\kappa$ 和 $k$ 个线性独立的左本征矢 $l^1, l^2, \cdots, l^\kappa$, 它们形成一个具有行列式为 1 的矩阵 $A$. 假定诸本征矢 $l^\kappa$ 有关于 $x$ 及 $t$ 的连续导数. 量后, 对于系数的一阶导数从而对于本征元的一阶导数, 假定一种特征的连续模, 叫做 Lipschitz连续性. 由常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tau^\kappa$ 定出特征曲线, 而从坐标为 $\xi, \tau$ 的点 $P$ 引出的特征线 $C_\kappa$ 可以表示为

$$C_\kappa : x = x^\kappa(t; \xi, \tau).$$

它们对 $t$ 以及对参数 $\xi, \tau$ 都有连续的导数. 根据本征值关系 $l^\kappa A = \tau^\kappa l^\kappa$, 用本征矢 $l^\kappa$ 乘 (3) 得到特征方程组

① 由本节和下一节的讨论所得到的关于拟线性组的结果是属于 J. Schauder[1] 的. 下面的证明是由 M. Cinquini-Cibrario[1],K. O. Friedrichs[1] 以及 R. Courant and P. D. Lax[1] 给出的. 更精确的结果已在 A. Douglis[1], P. Hartman and A. Wintner[1] 以及 P. D. Lax[5] 中得到. 在对可微性作更强的假定下, 关于单个的 $n$ 阶非线性方程的存在定理早在许多年前就由 E. E. Levi 给出了. Levi 的关于双曲型方程的的著述一直被人遗忘, 直到所得结果几乎全部被独立地重新发现. 但是其关于具有多重特征的非线性方程讨论还无人能及.

$$l^\kappa D^\kappa u + l^\kappa B = 0, \tag{3a}$$

或简写作

$$lDu + lB = 0,$$

其中 $D^\kappa$ 是微分算子 $D^\kappa = \dfrac{\partial}{\partial t} + \tau^\kappa \dfrac{\partial}{\partial x}$. 算子 $D^\kappa$ 可看做是沿 $C_\kappa$ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

为了与上面的各个假设相一致, 假定本征值 $\tau^\kappa$ 及本征矢 $l^\kappa$ 是 $x$ 和 $t$ 的具有连续的一阶导数的函数.

有时不指明说的是哪一个特征而将 $D^\kappa, l^\kappa$ 写作 $D, l$, 并指出关于任一对函数 $a$ 和 $b$ 的有用的公式 $D(ab) = aD(b) + bD(a)$.

方程 (3a) 的形式启示引入新的未知函数 $U^\kappa = l^\kappa u$, 或简写作 $U = \Lambda u$ 或 $U = lu$. 由于 $lD(u) = D(lu) - uDl$, 所以得到形如

$$DU = -lB + (Dl)u = -b + (Dl)u \tag{3b}$$

的微分方程. 因为 $u$ 可用 $U$ 表示为 $u = \Lambda' U$, 其中 $\Lambda'$ 是 $\Lambda$ 的逆矩阵, 所以总可将 (3b) 表示成

$$DU = F(x, t; U) \tag{3c}$$

的形式, (3c) 的右边是变量 $x, t, U$ 的连续函数矢, 且对变量 $U$ 有连续的导数. 当然, $D$ 在这儿是以 $D^\kappa$ 为分量的对角线阵.

要注意 $u$ 的初始值 $\psi(x)$ 变为由 $t = 0$ 时 $\Psi(x, t) = \Lambda\psi$ 的值给出的 $U$ 的初值 $\Psi(x)$. 假设肯定了对 $u$ 的 Cauchy 问题和对 $U$ 的 Cauchy 问题的等价性.

在 $x, t$ 平面上考虑一个闭域 $G$, 使得由 $G$ 上一点 $P$ 出发而向着 $t$ 减小的方向引出的一切特征 $C_\kappa$ 与 $x$ 轴上给定的一段 $\mathscr{I}$ 交于坐标为 $x_\kappa = x(0; \xi, \tau)$ 的点 $P_\kappa$, 且使得 $\mathscr{I}$ 包含 $G$ 上所有点 $P$ 的依赖区域. 称 $G$ 内部的带 $0 < t < h$ 为 $G_h$(见图 5-11).

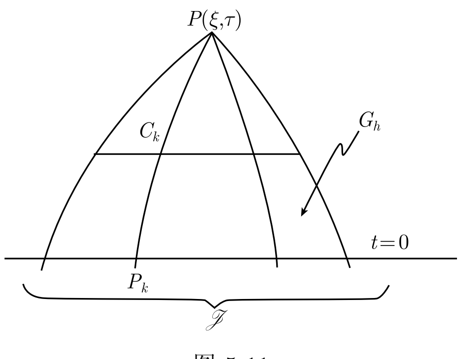



图 5-11

5.6.3 的主要结论：在 $\mathscr{I}$ 上以 $\psi$ 为初始值的 Cauchy 问题对适当小的 $h$ 在带 $G_h$ 上具有唯一的连续可微的解 $u$.

根据 5.4 此解是唯一确定的. 也将看到：这解可以扩展到整个域 $G$ 上, 只要系数保持它们的连续性. 还有, 如果 $A$ 和 $B$ 有直到 $n$ 阶的连续导数, 则解 $u$ 也有同样多阶数的连续导数. 最后, 如果各个系数以及数据 $\psi$ 连续地且可微地依赖于一个参数, 则解 $u$ 也如是.

### 5.6.3　解的构造

为了用方程 (3c) 和初始值 $\overline{\Psi}(x)$ 构造解, 在方程右边用函数矢量 $V = \Lambda v$ 代替 $U$ 并在 $G$ 上考虑具有连续导数及初始值 $\Psi(x)$ 的函数集或函数“空间” $S$. (3b) 或 (3c) 沿着特征 $C_\kappa$ 由 $P_\kappa$ 到 $P$ 的积分提示研究积分变换

$$\begin{aligned} W^\kappa(\xi,\tau) &= \Psi^\kappa(x^\kappa) + \int_0^\tau F^\kappa(x,t;V)\mathrm{d}t \\ &= \Psi^\kappa(x^\kappa) - \int_0^\tau (b^\kappa(x,t,V) - (D^\kappa l^\kappa)v)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4}$$

或用符号写作

$$W = TV,$$

这里 $F^\kappa(x,t;V(x,t))$ 中的 $x$ 用 $x^\kappa(t)$ 代入, 这个变换是 $S$ 中的函数 $V$ 到具有相同的初始值的函数 $W$ 的积分变换. 于是所求的 Cauchy 问题的解就是在这种变换下保持不变的元素.

当然, 在变换 $T$ 中 $W(\xi,\tau)$ 在点 $P$ 的每个分量可表示为在特征 $C_k$ 上的相应的积分, 这就是说, 在 $G$ 上必须将 $F^\kappa(x,t;V(x,t))$ 中的 $x$ 用 $x^\kappa(t;\xi,\tau)$ 替换, 然后只对 $t$ 从 0 到 $\tau$ 积分.

对于适当窄的带 $G_h$, 所求的不变元素可用迭代法作为 $n\to\infty$ 时

$$U_{n+1} = TU_n$$

的一致极限而得出. $U_n$ 是由初值为 $\Psi(x)$ 的任意容许函数 $U_0 = \Psi(x,t)$ 开始的.

为此目的利用一个连续函数矢量 $f$ 的最大范数 $||f||$ 或 $||f||_0$, 即 $f$ 在闭域 $G$ 上对 $f$ 在 $G$ 上的任何分量所达到的最大值. 现在令 $N = ||\Psi(x,t)||$ 并且约定 $||V|| < 2N$ 来限制 $S$ 中的“容许函数”. 对这些容许函数存在一个共同的上界 $\mu$ 使得在 $G$ 上有从而在 $G_h$ 上更加有

$$||F^\kappa|| < \mu, \quad ||F^\kappa_V|| < \mu, \quad ||F^\kappa_x|| < \mu, \quad ||F^\kappa_t|| < \mu,$$

这里 $F_V$ 表示 $F$ 关于变量 $V$ 的梯度. 对于 (4) 中被积函数的绝对值也可以假定 $\mu$ 作为它的上界.

于是, 对于选取的适当小的 $h$, 变换 $T$ 将容许函数 $V$ 变为容许函数 $W$. 实际上, (4) 意味着 $||W|| \leqslant N + h\mu$; 因此, 若选取 $h$ 这样小, 使得 $h\mu < N$, 则 $||W|| \leqslant 2N$. 至于 $W$ 有连续的导数, 这一点极易看出.

要证明迭代函数 $U_n$ 的一致收敛性, 作差式 $Z_n = U_{n+1} - U_n$, 由 (4) 得

$$Z_n^\kappa(\xi,\tau) = \int_0^\tau (F^\kappa(x,t;U_n) - F^\kappa(x,t;U_{n-1}))\mathrm{d}t \quad (x = x^\kappa(t;\xi,\tau)).$$

因为 $F(x,t;V)$ 对 $V$ 有连续的导数, 可在积分号下应用中值定理并且用适当的中值 $\overline{U}$ 得到关系式

$$Z_n^\kappa(\xi,\tau) = \int_0^\tau F_U^\kappa(x,t;\overline{U})Z_{n-1}(x,t)\mathrm{d}t.$$

因 $||F_U^\kappa|| < \mu$, 像前面一样立即得到

$$||Z_n|| < h\kappa\mu||Z_{n-1}||.$$

所以, 把 $h$ 选得足够小, 使得 $hk\mu = \theta < 1$, 例如 $\theta = \dfrac{1}{2}$, 就能使

$$||Z_n|| \leqslant \theta||Z_{n-1}||.$$

可以说变换 $T$ 依最大范数压缩而 $Z_n$ 在 $G_h$ 上当 $n \to \infty$ 时一致收敛于 0; 因此, 函数 $U_n$ 的确一致收敛于 $G$ 上的一个连续函数 $U$.

极限矢量 $U$ 显然具有初始值 $\Psi(x)$, 且是变换 $T$ 下的不变元素, 所以是积分方程组 $U = TU$ 的解. 又因方向微分算子 $D^k$ 作用于这些积分上得出被积函数, 所以 $U$ 也解决了特征标准形式的微分方程 (3c)①.

不过, 方向导数的存在并不能立即推知极限函数 $U$ 的导数 $U_x, U_t$ 存在或连续. 现在要证明这些导数是存在的而且是连续的, 方法是先证明 $U_n$ 的一阶导数与 $U_n$ 一样是一致收敛的, 然后证明根据初等微积分学 $U_n$ 的极限 $U$ 以这些极限为导数.

可限于考虑 $x-$ 导数 (或 $\xi-$ 导数), 因为由已知的方向导数 $D^k$ 可表示出 $t-$ 导数. 如果将 (4) 在积分号下对 $\xi$ 微分, 则 $(Dl)v$ 一项就引出了本征矢量 $l$ 的二阶导数, 而从假设只能知道连续的一阶导数存在. 要先假定二阶导数是连续的, 经过微分之后用极限步骤去掉这一假设就可以容易地克服这个障碍. 不过将采用下面更直接的方法②把形如

$$K(\xi) = \int_0^\tau P(t,\xi)DQ(t,\xi)\mathrm{d}t$$

① 上面的讲解说明了解的唯一性. 因为对于一个解 $U$, 如果 $U_0 = U$, 则所有的函数 $U_n$ 都等于 $U$; 于是, 两个解的差经过变换 $T$ 又得到它本身, 由于 $T$ 的收缩性质, 这就表明差恒等于零.

② 这是 P. Unger 指出的.

的积分对参数 $\xi$ 求导, 这里 $D$ 表示对变量 $t$ 求导, 在这个情形下求导是沿着特征线进行的. 现不考虑 $K(\xi)$ 而考虑两个参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 的函数：

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^\tau P(t,\alpha)DQ(t,\beta)\mathrm{d}t,$$

使得当 $\alpha=\beta=\xi$ 时, $K(\xi)=H(\xi,\xi)$ 且 $K_\xi=H_\alpha+H_\beta$. $H_\alpha$ 这一项可直接在积分号下微分而得到：

$$H_\alpha=\int_0^\tau P_\alpha(t,\alpha)DQ(t,\beta)\mathrm{d}t.$$

为了表示出第二项, 先分部积分, 然后直接对 $\beta$ 微分. 最后再令 $\alpha=\beta=\xi$. 将结果加起来, 得到

$$K_\xi=\int_0^\tau[P_\xi(t,\xi)DQ(t,\xi)-Q_\xi(t,\xi)DP(t,\xi)]\mathrm{d}t+P(\tau,\xi)Q_\xi(\tau,\xi)-P(0,\xi)Q_\xi(0,\xi).$$

这个公式很容易地对 $vD(l)$ 的积分求导：将各个表达式加起来并消去边界项, 最后能够简短地将 $W=TV$ 对 $\xi$ 的导数写作

$$W_\xi(\xi,\tau)=-\int_0^\tau x_\xi[b_x+b_VV_x+l_xDv-v_xDl]\mathrm{d}t+l_xx_\xi v|_{t=\tau}+l\psi'x_\xi|_{t=0}. \quad (5)$$

不论积分号下的 $v$ 是否用 $V$ 表示出来, 这个公式是将导数 $W_\xi$ 用 $V$ 及 $V$ 的一阶导数表示的而不涉及 $l$ 的二阶导数. 它表明 $W$ 具有连续的一阶导数. 再者, (5) 还表明：$W$ 的导数是有界的, 只要 $||V||$ 和 $||V||_1$ 是有界的; 这里 $||V||_1$ 是**一阶的最大范数**; 即在域上量 $|V_x^\kappa|$ 或 $|V_t^\kappa|$ 中的任一个所达到的最大值[①].

更具体地可以看出, 对于 $||V||$ 的任何给定的界 $M$, 可定出 $||V||_1$ 的一个界 $M_1$, 使得对于足够小的 $h$, 量 $||W||$ 和 $||W||_1$ 各自以同样的数 $M$ 及 $M_1$ 为界.

此外, 可以完全同前面那样得出结论：对于适当小的 $h$ 变换 $TV$ 压缩了一阶导数. 因此不仅 $U_n$ 而且 $U_n$ 的一阶导数在适当窄的带 $G_h$ 上也一致收敛. 这些极限必定是极限函数 $U$ 的相应的导数. 所以函数 $U$ 的确是 Cauchy 问题的解.

可以补充一个注解：由 (5) 容易推出, 对 $V_\xi$ 的适当的连续模同样也变成对 $W_\xi$ 的连续模. 特别地, 若 $V_\xi$ 及 $V_\tau$ 具有 Lipschitz 常数 $\sigma$ 的"Lipschitz 连续性", 即若差商的绝对值以 $\sigma$ 为界, 则 $TV$ 的导数的绝对值也以 $\sigma$ 为界.

因此 $U_n$ 的导数是同等连续的. 根据 Arzela 定理它们形成一个列紧集, 又因它们是有界的, 于是根据唯一性定理只能确定一个极限元素, 即它们是一致收敛的. 这样就得到一个稍微不同的存在性的证明.

最后加上一个在 5.7 中要用到的重要附注：即使变换 (5) 中 $T=T_n$ 在每一步都改变, 只要 $D^kl^k$ 一项保持一致有界, 则导数的同等连续性, 如同 Lipschitz 条件一样, 在变换 $T$ 之下保持不变.

① 还可以稍微不同地把 $||V||_1$ 定义为 $|V_k|$ 或 $|V_x^k|$ 或 $|V_t^k|$ 的一个分量所达到的最大值.

再者, 前面的论述可不加变更地推广到高阶导数上面去. 如果初始数据和微分方程的系数具有直到 $n$ 阶的连续导数, 那么解也有同样程度的光滑性. 可以说 $u$ 的光滑性是可延拓的, 即任意阶的可微性当 $t$ 由 $t=0$ 移动到 $t=h$ 时保持不变. 在第 6 章 6.10 中将讨论可延拓的初始条件这个概念的意义.

在 5.6.2 开头叙述的定理在一个较大的域上仍成立. 要证明这个结论, 用直线 $t=h$ 作为新的初始曲线, 并以解 $U$ 的值 $U(x,h)$ 作为新的初始数据, 并在带 $h \leqslant t \leqslant 2h$ 上解同样的问题. 依这种方式继续一步一步地作下去, 于是就可对任意大的 $t$ 构造出解, 直到连续性假设和有界性假设不满足时为止.

### 5.6.4 附注. 解对参数的依赖性

从用以证明迭代函数收敛性的估算法, 容易得出一个重要推论：如果微分算子的系数或初始数据 $\phi$ 连续地依赖于参数 $\varepsilon$ 且具有关于 $\varepsilon$ 的直到 $s$ 阶的连续导数, 则解 $u$ 看做 $\varepsilon$ 的函数时也具有同样的性质.

最后应说明前述用于初始数据 $\psi(x)$ 的构造解的方法, 即使在 $\psi$ 有间断性时, 例如在某个点 (如 $x=0$) 有跳跃间断时, 仍可引出广义解. 这种间断性从这个初始间断点 $P^*$ 沿着由 $P^*$ 引出的每条特征传播出去. 在第 6 章 6.4 中, 对不连续解有更为一般的详细分析.

### 5.6.5 混合初值及边值问题[①]

值得研究的物理现象, 大多数出现在固定的或移动的边界所限定的一部分空间中. 这些边界可用描述物理系统的诸变量间的数学关系式表示出来. 这种边界条件的例子是 a) 在移动着的器壁处, 理想流体速度的法向分量必定等于器壁速度的法向分量. b) 端点固定的振动着的弦在端点的位移为 0. c) 在完全反射的墙壁上声波振幅梯度的法向分量为零.

假定这系统限于正 $x$ 轴, $x \geqslant 0$, 目的是要解一个特征标准形式 (3b) 的线性或半线性方程组：$D^k u^k = F^k(x,t,u^1,\cdots,u^k)$; 要对于一个邻接正 $x$ 轴 $x>0$ 及时轴 $t>0$ 的小区域构造出解. 沿着 $x$ 轴及 $t$ 轴所提出的条件构成一个适定的混合问题, 假定 $r$ 是正的本征值 $\tau$ 的个数：

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_r > 0,$$

而 $\tau_{r+1},\cdots,\tau_k$ 是负的. 根据假设没有一个本征值 $\tau$ 为零. 或者 $r$ 是经过原点 $O$ 而指向 $x,t$ 平面的第一象限的特征的数目, 那么经过 $t>0$ 且足够接近 $O$ 的一点的前 $r$ 条特征也指向第一象限. 再者, 假设这些特征是互不相交的. 那么, 通过 $O$ 的特征曲线 $C_r$ 将第一象限邻接 $O$ 的部分分为两个区域, 使得由 $C_r$ 左边的域中一点

① 参考本章附录 II, 并参考第 6 章 6.8.3.

$P$ 向 $t$ 减小的方向引出的所有 $r$ 条特征曲线与正 $t$ 轴相交, 只要限制在邻接 $O$ 的足够小的区域内 (见图 5-12).

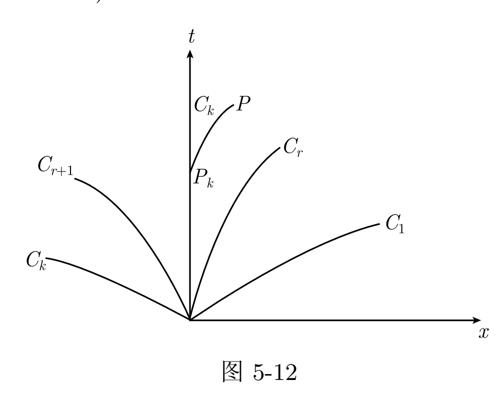



图 5-12

沿着正的 $x$ 轴预先指定 Cauchy 初始数据, 即这 $k$ 个值 $u(x,0)=\psi(x)$.

对于这些在 $x>0$ 上的 Cauchy 数据再加上在 $x=0$ 上提出的具有预定的函数 $\chi^p(t), \rho \leqslant r$ 的 $r$ 个边界条件

$$u^\rho = \chi^\rho(t), \tag{6}$$

或更一般地

$$u_\rho - \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho} u^j = \chi^\rho(t) \quad (\rho = 1, \cdots, r). \tag{7}$$

这里 $(k-r)r$ 个量 $m^{j,\rho}$ 是已给的并且可如此选取, 使得

$$\sum_{j=r+1}^{k} |m^{j,\rho}| < 1. \tag{8}$$

条件 (7) 保证了 $u^1, \cdots, u^r$ 这 $r$ 个函数能够用其余的函数 $u^{r+1}, \cdots, u^k$ 线性地表示出来. 条件 (8) 只是对下面证明收敛性时给予术语上的便利, 它总可以借助引入新的因变量 $\mu u^{r+1}, \cdots, \mu u^k$(具有足够大的正因子 $\mu$) 来代替 $u^{r+1}, \cdots, u^k$ 而得到.

最后指出: 沿着过 $O$ 的特征, 方程的解将有间断, 除非假定了对 $O$ 处 $x=0, t=0$ 的这些数据适合“相容条件”. 特别是一阶相容条件, 即 $u$ 的连续性, 依赖于条件

$$\chi^\rho(0) + \sum_{j=r+1}^{k} m^{j,\rho} \psi^j(0) = \psi^\rho(0) \quad (\rho = 1, \cdots, r).$$

利用求导可得到相似的导数的相容条件.

在所述的条件下微分方程 (3) 在象限 $0 \leqslant x, 0 \leqslant t$ 上有唯一的解. 如果微分方程的系数和数据具有 $s$ 阶的连续导数并且如果数据满足直到 $s$ 阶的相容条件, 则

解就具有 $s$ 阶的连续导数. 如果只满足直到 $p$ 阶的相容条件, 则解的高于 $p$ 阶的导数沿着自原点引出的特征 $C_1, \cdots, C_r$ 有间断性.

用迭代法构造解几乎和 5.6.3 完全一样进行. 仍用 $P_k$ 表示 $C_k$ 与 $t=0$ 或 $x=0$ 的交点, 则有 (记号是显然的)

$$u^\kappa(P) = u^\kappa(P_\kappa) + \int_{P_\kappa}^{P} F^\kappa(x, t, u^1, \cdots, u^k)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

如果 $P_\kappa$ 是在 $t$ 轴上 (这种情形仅当 $\kappa \leqslant r$ 时发生), 用从 (7) 得到的值代 $u^\kappa(P_\kappa)$; 如果 $P_\kappa$ 在 $x$ 轴上, 则将 Cauchy 数据 $\psi^\kappa(P_\kappa)$ 代入. 然后与前述一样定义积分变换

$$v_{n+1} = Tv_n,$$

而将 (9) 的右边定义为 $T_u$. 为了证明序列 $\{v_n\}$ 的收敛性, 还应考虑一系列差 $w_{n+1} = v_{n+1} - v_n$. 如果 $P_k$ 在 $t$ 轴上, 则有递推关系式

$$w_{n+1}^k = \sum_{i=r+1}^{k} m^{i,k} w_n^i - \int_{P_\kappa}^{P} \sum_{i=n+1}^{k} b^{ki} w_n^i \mathrm{d}t.$$

恰如 5.6.3 一样, 对一个足够小的带可推出由 $w_n$ 到 $w_{n+1}$ 的变换依最大范数也依 $s$ 范数具有压缩性. 因此解又可作为变换 $T$ 的不变元素而得到.

如果一个物理系统并非由一道器壁而是由两道器壁所限, 如由直线 $x=0$ 及 $x=a$ 所限, 则边界条件必定也要依照同样的原理指定在直线 $x=a$ 上. 换句话说, 由点 $(a,0)$ 引向域中的特征有多少, 边界条件就需要有多少个, 并且这些条件必须满足相容性及线性独立的要求, 与前述对边界 $x=0$ 所讲的一样. 在这种情况下得到半带域中的唯一解.

一个随时间移动着的域, 用数学语言描述出来就是给出它在 $t=0$ 时的位置为 $x$ 轴上的某个区间 $(a,b)$ 并以由 $a$ 及 $b$ 朝着正 $t$ 方向引出的两条曲线来给出两端的运动. 如果这两条曲线足够光滑, 则可变换自变量, 把这种域的问题化为上面处理过的那种问题.

直到现在都假定了边界是无处为特征的; 但是, 如果边界曲线之一 (或二者) 是特征的, 仍可用同样的方法构造解. 在此情形下, 边界上所指定数据的个数应该与进入域中但不包含边界本身的特征曲线的数目相同. 这是与 5.6.1 所考虑过的有关特征初值问题相一致的.

**例 5.6.1** 在平面中一条拉紧了的弦的运动被方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{10}$$

所制约, 这里 $u$ 表示弦的位移而 $c$ 是依赖于弦的密度和张力的常数, 弦的初始位置和速度是给定了的 (Cauchy 数据) 而端点 $(a,0)$ 及 $(b,0)$ 是固定的, 即边界条件为

$$u(a,t)=u(b,t)=0.$$

引入两个新的未知函数 $v=cu_x+u_t, w=cu_x-u_t$, 将二阶方程 (10) 变为一个一阶的对角线方程组, 则得

$$\left.\begin{aligned}v_t-cv_x=0,\\ w_t+cw_x=0.\end{aligned}\right\}$$

特征速率是 $\pm c$. 所论域是半带域 $a\leqslant x\leqslant b, t\geqslant 0$; 确实有一条特征由此域的每个角落进入域内, 所以在两个边界上 $r=1$, 事实上在每个边界上有一个边界条件:

$$v(a,t)-w(a,t)=v(b,t)-w(b,t)=0.$$

而且容易验证在此情形下线性独立的条件也满足.

**例 5.6.2** 在 (运动着的) 活塞所封闭的管中, 可压缩气体的运动可用流速 $u$ 及密度 $\rho$ 描绘出来. 连续性方程和动量守恒方程是

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0$$

及

$$u_t+uu_x+\frac{1}{\rho}p_x=0.$$

这里 $p$ 表示压力; 气体状态方程给出 $p$ 是 $\rho$ 的已知的①(单调增大) 函数.

这两个方程是非线性的. 对于这种方程的初值问题理论和线性方程理论是十分相像的; 将在 5.7 中加以讨论. 这种相似性也可推广到混合初边值问题上, 如用下面的例子所表明的那样. 自然, 对于非线性组, 必须明确所叙述的一切只对足够小的区域有效.

$u$ 和 $\rho$ 的初始值是预先给定的 $x$ 的函数 $(a<x<b)$. 在封闭着管的两个活塞所描绘出来的曲线 $x=a(t)$ 及 $x=b(t)$ 上, 必须使流速等于活塞速度:

$$u(a(t),t)=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t},$$

$$u(b(t),t)=\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}.$$

特征速率是 $u+c$ 和 $u-c$, 这里 $c^2=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$, 所论域是 $a(t)\leqslant x\leqslant b(t), t\geqslant 0$. 在两条

① 同 5.3.1 中所述, 假定流动是等熵的.

边界线上 $r$ 仍然等于 1, 这是在每条边界上的条件的个数.

在线性的情形所讲的理论中, 条件的个数必须等于进入域中的特征的数目. 在非线性的情形下也必须满足相似的条件. 这样一个条件在所举例子中确实得到满足, 这一点显而易见.

## 5.7 关于拟线性组的 Cauchy 问题

现在转向拟线性组

$$u_t + A(x,t;u)u_x + B(x,t;u) = 0, \tag{1}$$

并简短地说明如何能将 (1) 的 Cauchy 问题在 5.6 所述结果的基础上用稍微不同的迭代法解出来. 这个结果恰和对线性组或半线性组所得结果一样. 特别地, 如果系数 $A, B$ 以及初值 $\psi(x)$ 具有对 $x, t, u$ 的 Lipschitz 连续的一阶导数, 则在 $x$ 轴的一部分 $\mathscr{J}$ 的一个适当的邻域 $0 \leqslant t \leqslant h$ 上存在唯一确定的具有 Lipschitz 连续的一阶导数的解, 只要这个组对于给定的初始值 $u(x,0) = \psi(x)$ 是双曲型的. 如前所述, 双曲性就是存在 $k$ 个独立的左本征矢量 $(l^1, \cdots, l^k)$, 不妨假定其已经这样正规化了, 使得它们所形成的矩阵 $\Lambda$ 的行列式为 1. 特征 $C_k$, 本征值 $\tau^k$ 及本征矢量 $l^k$ 现在依赖于这个特定的函数 $u$. 一般地, 考虑具有固定的初始值 $v(x,0) = \psi(x)$ 和 Lipschitz 连续的一阶导数并满足具有固定的 $M$ 及 $M_1$ 的不等式

$$||v|| \leqslant M, \quad ||v||_1 \leqslant M_1$$

的函数 $v$, 这种函数不一定是解. 用上述条件所限定的任何“容许”函数代替 $v$, 假定矩阵 $A(x,t;v)$ 有 $k$ 个实的本征值 $\tau^\kappa(x,t;v)$, 简写作 $\tau(v)$, 又假定有一个由独立的本征矢量 $l^\kappa$ 所成的矩阵 $\Lambda(v)$, 这些 $l^\kappa$ 在即将说明的固定域 $G_h$ 上对所有变量有 Lipschitz 连续的导数①. 常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tau^\kappa$ 的解叫做 $v$ 场的特征 $C^\kappa$. 对于容许函数, 它们的斜率是一致有界的, 即 $|\tau^\kappa| < \mu$, 并且现在规定闭域 $G$ 和其中的带 $G_h$ 是由这种点组成的, 由这些点向 $t = 0$ 引出的 $v$ 特征 $C^\kappa$ 总在 $G$ 上并交 $x$ 轴于 $\mathscr{J}$ 部分. 所有这种函数 $v$ 所成的集或“空间”仍叫做 $S_h$, 本征矢量 $l$ 和本征值以及它们的导数都依赖于 $x, t$ 和 $v$ 并且是 Lipschitz 连续的. 如前所述, 用 $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + \tau\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ 定义 $v$ 场中的特征微分算子.

现在用一个自然的迭代方案来进行 (附带比较一下第 4 章 4.7 对椭圆型方程的和第 6 章 6.10 对多于两个变量的双曲型方程的一个相似的方案).

① 对于不同的本征值, 本征元素的这些性质由对 $A$ 的假定推出.

为允许 $v$ 可有足够的偏差, 假定界限 $||\psi(x)|| < N$, 而令 $M = N + 1$. 那么, 在 $A$ 及 $B$ 中用一个容许函数 $v(x,t)$ 代入后, 方程 (1) 就变成线性的, 与 5.6 中处理过的一样. 具有已给初始值 $u(x,0) = \psi(x)$ 的 Cauchy 问题的解是 $u = Tv$, 故可作为变换 $T$ 的不变元素而得到 (1) 的解 $u$, 特别是作为具有 $u_0 = \psi(x)$ 的迭代函数 $Tu_n = u_{n+1}$ 当 $n \to \infty$ 时的一致极限而得到 $u$, 这里 $T = T_n$ 依赖于 $n$.

构造法如下①：首先依照 5.6 中基于引入新函数 $U = \Lambda u, V = \Lambda v, \Psi = \Lambda\psi$ 等方法而得到 $u = TV$. 然后只需注意在 5.6 的基本公式 (4) 及 (5) 中对 $x$ 求导时需考虑 $l, \cdots$ 对 $v$ 有依赖关系; 即是, 必须认为 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)l = l_x + l_v v_x, \cdots$, 这就引入了 $v$ 的导数. 这就直接导出了引理：对于 $M = N + 1$ 可选取足够大的界 $M_1$ 及足够小的 $h$ 使得 $S_h$ 中的任何函数 $v$ 都变换为 $S_h$ 中的另一个函数 $w = Tv$.

再者, 迭代函数 $u_n$ 在 $G_h$ 上一致收敛于极限函数 $u$. 这个函数是唯一确定的并且显然满足特征形式的微分方程 $lDu + lB = 0$. 同 5.6 中所述, 压缩性及唯一性可由对两个容许函数 $u = Tv$ 和 $u^* = Tv^*$ 的差 $z = u - v^*$(记 $\zeta = v - v^*$) 的微分方程

$$z_t + A(v)z_x + (A(v) - A(v^*))u_x^* + B(v) - B(v^*) = 0$$

立即推出. 运用中值定理并参照 5.6 中的 (4), 有

$$z_t + A(v)z_x + \zeta K = 0,$$

其中 $K$ 是 $x, t$ 的有界函数, 并且同 5.6 一样得到一个形如

$$||z|| < M_3 hk||\zeta||$$

的不等式. 取足够小的 $h$ 可得到不等式 $||z|| \leqslant \dfrac{1}{2}||\zeta||$, 从而得到变换 $T$ 的压缩性. 所以 $u_n$ 在 $G_h$ 上一致收敛于函数 $u$.

要证明 $u$ 具有 Lipschitz 连续的一阶导数并在严格意义下解决了 (1), 此根据 5.6 末尾的附注. 由 5.6 中 (5) 的证明变换 $TV$ 保持一阶导数的 Lipschitz 连续性就可得出. 所以, 迭代函数 $u_n$ 的一阶导数是同等连续的, 它们形成一个列紧集并且同上所述, 极限函数具有 Lipschitz 连续的导数.

也可以采用稍微不同的论证：首先用适当选取的具有连续且有界的二阶导数的函数来逼近 $A, B$ 及 $\psi$. 于是相应的解 $u_n$ 将有一致有界的二阶导数. 取极限后, 这些界限将变为 $u$ 的一阶导数的 Lipschitz 界限. 无论如何, 关于非线性组的结论与线性的情形是一样的.

补充说明：易将 Lipschitz 连续性条件代之以任何 (凹的) 连续模条件②.

---

① 参考 R. Courant[3].

② 参考 A. Douglis[1].

## 5.8 对于单个的高阶双曲型微分方程的 Cauchy 问题

单个的高阶微分方程所表现出来的性状与一阶的方程组有相当多的不同之处,应另予简略的讨论.

以前曾用符号形式将一个函数 $u(x,t)$ 的 $k$ 阶线性微分方程写作

$$L[u] \equiv (P^{\kappa} + P^{\kappa-1} + \cdots + P^{0})u + f = 0. \tag{1}$$

这里

$$P^{\kappa} = P^{\kappa}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_0^{\kappa}\frac{\partial^{\kappa}}{\partial t^{\kappa}} + a_1^{\kappa}\frac{\partial^{k}}{\partial t^{\kappa-1}\partial x} + \cdots + a_k^{\kappa}\frac{\partial^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} \tag{1a}$$
$$(\kappa = 0, 1, \cdots, k),$$

是 $\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}$ 的 $\kappa$ 次齐次多项式, 具有依赖于 $x, t$ 的系数 $a_i^{\kappa}$.

对于初始线 $t=0$ 的 Cauchy 问题: 当 $u$ 的值以及它的偏导数 $u_t, u_{tt}, \cdots, u_{t^{k-1}}$ 的值在 $t=0$ 上给定时要从 (1) 确定 $u$. 不失一般性, 假定 Cauchy 初始数据为 0, 即 $u$ 及 $u$ 的直到 $\kappa-1$ 阶的导数当 $t=0$ 时恒为 0.

假定在所论域 $t \geqslant 0$ 上, (1) 是在每个点处有 $k$ 个特征方向的意义下为双曲型的①(见 5.2), 这 $k$ 个特征方向对应于 $k$ 个不同的特征导数

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \quad (i = 1, \cdots, k).$$

在 5.1 中曾经见到, 系数 $\tau_i = -\dfrac{\phi_t^i}{\phi_x^i}$ 对应着特征曲线族 $\phi^i(x,t)=$常数, 这个特征曲线族满足特征方程

$$P^k(\phi_t, \phi_x) = 0.$$

假定直线 $t=$常数不是特征曲线, 则 $\phi_x \neq 0$, 且 $a_0^k \neq 0$, 用 $a_0^k$ 去除, 则可用 1 代替 $a_0^k$ 并且可用

$$P^k(\tau, -1) = 0 \qquad (\text{或} P^k(-\tau, 1) = 0)$$

代替特征方程.

在本节中, 将讲述关于 (1) 在这种双曲型情况下求解 Cauchy 问题的若干方法. 也将考虑更广泛的情形, 在这些情形中, 即使出现多重的特征, Cauchy 问题也是可解的.

① L. Gårding[2] 对常系数情形给出的双曲型的更广泛的定义包含着有实的多重特征的方程. 本节中有几个方法也适用于这种方程. 这种一般的定义的目的是为了确定 Cauchy 问题是否提得适当而制定一个可检验的判据.

### 5.8.1　化为一阶特征组

Cauchy 问题可化为对角线型的一阶线性组的初值问题.

将先引用 $u$ 的导数作为新的未知函数 (如前所述) 来作这种化简. 所得到的一阶组将有和 (1) 一样的 $k$ 个不同的特征, 此外, 还有直线 $x =$常数, 是明显的多重特征. 这个组可同 5.6.2 中所作的一样化为对角线型的标准形式. 在 5.8.3 中, 将讨论更优美的且更一般的简化法.

写 $a_i$ 代替 $a_i^k$ 并令 $a_0 = 1$, 用 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个函数

$$p^{i,j}(x,t) \qquad (x+j \leqslant k-1)$$

的微分方程组代替 (1), 函数 $p^{i,j}(x,t)$ 恒等于导数 $\frac{\partial^{i+j}u}{\partial t^i \partial x^j}$, 主要方程是

$$p_t^{k-1,0} + (a_1 p_x^{k-1,0} + a_2 p_x^{k-2,1} + \cdots + a_k p_x^{0,k-1}) + H = 0, \tag{2}$$

这里将 (1a) 中的所有 $k$ 阶导数, 除了对 $t$ 的 $k$ 阶导数外, 都换成了量 $p^{i,j}(i+j = k-1)$ 的 $x$ 导数. $H$ 是当 $i+j < k-1$ 时量 $p^{i,j}$ 的线性表达式, 且不含有导数. 现在用下列诸方程:

$$p_t^{i,j} - p^{i+1,j} = 0,$$

$$\text{对于} i+j = 0,1,\cdots,k-2, \tag{2a}$$

$$p_t^{i,j} - p_x^{i+1,j-1} = 0,$$

$$\text{对于} i+j = k-1 \text{且} i \neq k-1 \tag{2b}$$

来补充方程 (2).

选取由 Cauchy 数据给出或导出的那些数据作为初始条件, 即对 $t = 0$, 选取函数 $p^{i,0}$ 等于 $\frac{\partial^i u(x,0)}{\partial t^i}, i = 0,\cdots,k-1$. 于是 (2a) 和 (2b) 蕴含着对 $p^{i,j}$ 的零 Cauchy 数据, 并且表明当 $i+j < k$ 时处处有 $p^{i,j} = \frac{\partial^{i+j}(p^{0,0})}{\partial t^i \partial x^j}$.

现在用 $U(x,t)$ 表示以 $p^{i,j}$ 为分量的列矢量, 同 (2), (2a)、(2b) 依 $i+j$ 的减序及 $j$ 的增序排列. 则方程组就具有形式:

$$U_t + AU_x + BU + C = 0, \tag{2c}$$

这里矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

并且容易求出特征方程 $||-I\tau + A|| = 0$ 为

$$||-I\tau + A|| = \tau^N P^k(-\tau, 1) = 0,$$

其中 $N = \dfrac{1}{2}k(k-1)$. 因子 $\tau^N$ 对应着方程组的明显的多重特征 $x =$ 常数.

于是组 (2c) 变成 5.6.2 中处理过的那种类型. 所以, 具有上面给出的数据的 Cauchy 问题有唯一的解, 这解同时也是方程 (1) 的原来的问题的解.

### 5.8.2 $L[u]$ 的特征表示

解双曲型方程 (1) 的 Cauchy 问题的更一般的方法在于将算子 $L[u]$ 用特征方向导数表达出来.

事先考虑 $r$ 个不一定是特征的但都是不同的方向导数

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \tau_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

当 $i \neq j$ 时, $\tau_i \neq \tau_j$. 假定函数 $\tau_i(x,t)$ 是足够多次可微的, 于是, 容易验证下述引理:

**引理 a)**: $D_i(\alpha D_j) = \alpha D_i D_j + \beta D_j,\ \beta = D_i(\alpha)$.

**引理 b)**: $D_i D_j - D_j D_i = a(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{a}{\tau_i - \tau_j}(D_i - D_j)$.

这里系数 $a$ 由

$$a = -\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \frac{\partial \tau_j}{\partial t} + \tau_i \frac{\partial \tau_j}{\partial x} - \tau_j \frac{\partial \tau_i}{\partial x} = -D_j \tau_i + D_i \tau_j$$

给出(如果 $\tau_i, \tau_j$ 是常数, 则 $a$ 等于 0, 于是算子 $D_i$ 和 $D_j$ 可变换).

**引理 b′)**: 在 $k$ 个不同的方向导数的乘积中, 改变因子 $D_i$ 的次序后, 其结果只附加了一个低于 $k$ 阶的线性微分算子 (在常系数的情形下, 这个附加的算子为 0).

现在用归纳法易于证明如下的引理.

**引理 c)**：任何阶数 $r<k$ 的线性微分算子 $N_r$ 可以表示为形如

$$N_r = \sum_{i \leqslant r+1} a_i U^{r,i} + N_{r-1} \tag{3}$$

的和式, 这里 $U^{r,i}$ 是 $r+1$ 个算子 $D_1, \cdots, D_{r+1}$ 中 $r$ 个的乘积; 略掉的算子为 $D_i$, 例如, $U^{r,r+1} = D_r \cdots D_1$ 或 $D^{r,1} = D_{r+1} D_r \cdots D_2$. 附加项 $N_{r-1}$ 是一个阶数不超过 $r-1$ 的算子.

对 $N_{r-1}$ 运动引理 c) 并一直进行下去, 就得到

**引理 c′)**：任何 $r$ 阶的算子可以写成

$$N_r = \sum a_i^s U^{s,i} \qquad (i \leqslant s+1, s \leqslant r). \tag{4}$$

引理 c) 的证明可用归纳法进行, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}(D_2 - D_1),$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}(\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1).$$

这就对 $s=r=1$ 建立了 $c$). 现在假定 $c$) 对 $r=s\leqslant k-1$ 成立. 来证明 $\dfrac{\partial N_r}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial N_r}{\partial t}$ 具有由 (4) 所规定的形式. 考虑 $U^{s,i}$ 这一项, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 二者都具有形式 $pD_i + qD_{s+2}$. 根据引理 $b$) 和 $b'$) 得知

$$pD_i U^{s,i} = pU^{s+1,s+2} + N_s$$

和

$$qD_{s+2} U^{s,i} = qU^{s+1,i}.$$

如果对 $N_s$ 中所有的项都运用这个道理, 那么根据归纳法就完成了引理 $c$) 的证明.

如果总共只考虑了 $k$ 个导数 $D_i$, 那么这个方法就终止于 $s=k-1$. 事实上, 如果给出了 $k$ 个不同的导数 $D_i$, 一般不能将阶数 $r=k$ 的线性微分算子表示为形式 (3). 例如, 从 5.8.1 易知：如果导数 $D_i$ 是双曲型算子 $L[u]$ 的 $k$ 个特征导数, 则将特征多项式 $P^k$ 分解成线性因子就得到基本的分解式

$$L[u] = Mu + N_{k-1} u, \tag{5}$$

这里

$$Mu = D_k D_{k-1} \cdots D_1 u, \tag{6}$$

而 $N_{k-1}$ 是一个阶数不超过 $k-1$ 的算子. 在 $N_{k-1}$ 中除去不含 $u$ 的导数的项, 则根据引理 $c'$), 可将微分方程 (1) 写成标准形式

$$L[u]=Mu+N_{k-1}u=Mu+\sum_{\substack{s<k\\ i\leqslant s+1}}a_i^sU^{s,i}u+au=-f(x,t). \tag{7}$$

### 5.8.3 Cauchy 问题的解

对 (1) 的当 $t=0$ 时初始条件为 $u=0, U^{s,i}u=0$ 的 Cauchy 问题现在可化为对角线型标准形式而立即解出.

对记号稍加修改, 记 $u=U^0$ 并以符号 $U^{s,i}$ 代替 $U^{s,i}u$. 把所有的量 $U^0$, $U^{s,i}$ 都看做是未知量, 它们形成一个具有 $\dfrac{k(k+1)}{2}$ 个分量的矢量 $U$.

用 $l(U)$ 表示 $U$ 的分量的一个线性表达式, 根据 5.8.2 及方程 (4), 显然有

$$D_iU^{s,i}=l_{s,i}(U)\quad(s<k-1, i<s+1), \tag{8}$$

及

$$D_iU^{k-1,i}=Mu+l_{k-1,i}(U)=l^*_{k-1,i}(U)-f, \tag{9}$$

这里 $L^*_{k-1,i}(U)$ 仍然是 $U$ 的分量的一个线性表达式.

方程组 (8), (9) 正好是 5.6 中所解过的那样一个特征对角线型组.

因此, Cauchy 问题就用化为特征标准形式的方法解出来了.

前述解在一种自然的条件下可立即扩展到具有多重特征的情况.

为了得出这个条件, 要注意到特征导数中即使有一些是重复的, $L[u]$ 的形式 (5) 仍成立. 现在可能不正确的是表示式 (7), 它可能对于 $N_{k-1}$ 这一项不正确. 例如, 对于 $k=4$, 若 $D_1=D_2, D_3=D_4$, 则算子 $L[u]=D_4D_3D_2D_1u+D_4D_3D_3u$ 具有形式 (5) 而不是 (7). 不过, 可以设想多重特征是由参数的连续变动使得一些原来不同的导数 $D_i$ 变为相同而得到的. 表达式 $N_{k-1}$ 也采取 (7) 所给出的形式, 其中只有相应的因子 $D_i$ 相重合. 现在把这个言之入理的说法写成"条件 $A$". 这个条件就是约定 $L[u]$ 能够写成形式 (7), 其中没有一项所含导数 $D_i$ 的幂高于主要项 $M$ 中所含导数的幂. 于是 (1) 的化为对角线型标准形式的方法在字面上是保持不变的. 因此, 在"条件 $A$"之下, Cauchy 问题仍是唯一可解的, 并且对于多重特征也是"适定的"①.

① 关于 5.8, 参考 E. E. Levi 的著作 [3]. A. Lax[1] 独立地得到了这些结果. 在这篇文章中, 对于常系数的情形证明了多重特征的"条件 $A$"是使 Cauchy 问题成为适定的充要条件. 对于常系数的 $n$ 个变量的方程, L. Gårding[2] 给出了关于相应于算子的多项式的根的性质的充要判别法.

### 5.8.4　其他解法. P. Ungar 给出的一个定理

在 5.8.3 中, 避开了额外的特征, 但却引入了大量的未知函数, 这表明特征有高度的多重性.

1) P. Ungar 已经用下述著名的定理①证明了将单个方程化为对角线组时, 既可避免引入额外的特征, 又可避免引用过多的方程.

如果 $L$ 是满足"条件 $A$"的一个 $k$ 阶算子, 那么存在一个把 $L[u]=f$ 的Cauchy 问题化为恰好是 $k$ 个一阶方程的对角线组的 Cauchy问题的方法.

对因子的次序稍加修改而将 (5) 写作 $r$:

$$L=D_1D_2\cdots D_k+N_{k-1},$$

这里相等的 $D_j$ 依次编了号. 存在一个算子链如下:

$$\begin{aligned}&L_0=1,\\&L_1=D_1L_0+R_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&L_{k-1}=D_{k-1}L_{k-2}+R_{k-2},\\&L=L_k=D_kL_{k-1}+R_{k-1},\end{aligned}$$

这里 $R_\nu=\sum_{i=0}^{\nu}a_i^\nu L_i$. 引入新变量 $u_0=u,u_i=L_iu\ (i=1,2,\cdots,k-1)$, 得到一个对角线方程组

$$\left.\begin{aligned}&u_\nu=D_\nu u_{\nu-1}+\sum_{i=0}^{\nu-1}a_i^{\nu-1}u_i\qquad(\nu=1,2,\cdots,k-1),\\&f=D_ku_{k-1}+\sum_{i=0}^{k-1}a_i^{k-1}u_i.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

同前所述, 对 $u$ 指定的 Cauchy 数据导出对函数 $u_i$ 的相应的初始数据. 特别地, 当 $u$ 的 Cauchy 数据为 0 时, $u_i$ 的初始值均为 0.

2) 将 5.6.1 中给出的 $u_{xy}=-au_x-bu_y+f$ 的解直接推广, 得到求解的另一种方法. 简短地描述如下:

将微分方程 $L[u]=-f$ 仍旧写作

$$L[u]=Mu+N_{k-1}u=-f$$

① 参考 P. Unger[1].

或

$$Mu = -Nu - f.$$

方程

$$Mu = -Nv - f \tag{11}$$

和初始条件一起定义了一个变换

$$u = Tv.$$

需证明迭代函数

$$v^n = Tv^{n-1}$$

收敛; 特别是要证明

$$||Tv^n - Tv^{n-1}|| \leqslant \frac{1}{2}||v^n - v^{n-1}||,$$

这里 $||w||$ 是一个适当的范数. 使用

$$||w|| = \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw|$$

是方便的. 因为在一个适当窄的带 $0 \leqslant t \leqslant h$ 上, 对于具有零 Cauchy 数据的函数 $w$, 利用沿着特征的累次积分及重复应用 5.8.2 中的引理 a) 及 b), 容易证出估算式

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Nw| \leqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |Mw|. \tag{12}$$

因此, 可证明 $T$ 是一个压缩变换, 并在一个毗邻于初始线的适当窄的域上, 迭代函数 $v^j$ 一致收敛于函数 $u$, 故有

$$u = Tu,$$

即

$$Mu + Nu = -f.$$

不难证明, 这个 $u$ 不仅具有一切有关的方向导数, 并且满足初始条件, 因此解决了初值问题.

### 5.8.5 附注

与双曲型组的情形一样, 上面 Cauchy 问题的解不仅是唯一的而且又连续地依赖于初始数据. 因此 Cauchy 问题在第 3 章 3.6 的意义下是“适定的”. 这种适定性在解的构造中是固有的. 违背了“条件 $A$”可以损害 Cauchy 问题的解对初始条件的连续依赖性. 这可用例子来说明:

$$L[u] = u_{tt} + u_x = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n^2 x},$$

它的解是

$$u = \frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{e}^{nt} - \mathrm{e}^{-nt}}{2}\mathrm{e}^{-n^2 x}.$$

显然当 $n \to \infty$ 时, 对于 $t = 0$ 一致地有 $u = 0, u_t \to 0$, 而 $u(x,t)$ 在每个域 $t > 0$ 上发散. 另一方面, 对于 $u$ 及 $u_t$ 的初值为 0 时的初始值问题有恒等于 0 的解. 因此违背了连续性条件, 于是, Cauchy 问题对这个算子 $L$ 不是 "适定的".

## 5.9 解的间断性. 激波

波的传播现象用具有指定的初始数据及边界数据的双曲型方程的解来表示. 若已给数据是不连续的 (如由冲击引起波动的情形), 则解也是不连续的.

目的是"间断解"的确切定义. 例如, 函数 $u = f(x+t) + g(x-t)$ 是波动方程 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 的真正的解, 只要 $f$ 和 $g$ 是二阶可微的. 如果 $f$ 和 $g$ 不是可微的, 则 $u$ 应看做是"广义解". 下面将给出这种概念的一种本质描述.

### 5.9.1 广义解. 弱解[①]

同 5.3 中所述, 令 $L[u] = 0$ 表示未知的函数矢量 $u^1, u^2, \cdots, u^k$ 的线性方程组

$$L[u] \equiv Au_x + Bu_t + Cu = 0.$$

用 $\zeta L[u] - uL^*[\zeta]$ 是一个散度式的条件来定义伴随于 $L$ 的算子 $L^*$, 即

$$L^*[\zeta] = -(A\zeta)_x - (B\zeta)_t + C\zeta$$

且

$$\zeta L[u] - uL^*[\zeta] = (\zeta Au)_x + (\zeta Bu)_t. \tag{1}$$

在 $u$ 的所论域 $G$ 上引入"试探函数" $\zeta$, 它在 $G$ 的子域 $R$ 的外部恒等于 0[②]. 在 $R$ 上将 (1) 积分, 由 Gauss 定理得到

$$\iint_R (\zeta L[u] - uL^*[\zeta])\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{2}$$

若 $L[u] = 0$, 则

$$\iint_R uL^*[\zeta]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

① 有一种稍异于此但更周密的讲法, 参考第 6 章 6.4 及其附录.

② 这种函数有时叫做列紧支集的函数; 在其上函数不为 0 的域是函数的"支集".

反之, 若 (3) 对于具有连续导数的函数 $u$ 成立, 并对 $G$ 的一切子域 $R$ 上的所有容许的试探函数 $\zeta$ 都成立, 则由 (2) 得到

$$\iint_R \zeta L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

因此, 根据"变分法基本引理" (参考卷 I 第 4 章 4.3.1), 得到 $L[u]=0$.

现在给出解的概念的推广：允许矢量函数 $u$ 及其导数是分块连续的, 即沿着分段光滑的曲线 $C$ 具有跳跃间断. 若对一切容许的试探函数 $\zeta$ 及 $G$ 的一切子域 $R$,

$$\iint_R uL^*[\zeta]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

则这种解 $u$ 叫做方程 $L[u]=0$ 在 $G$ 上的**弱解**[1].

假定 $L[u]=0$ 是间断解 $u$ 在不包含 $C$ 的所有域上都是正则的, 将证明间断性曲线 $C$ 必定是特征曲线. 假定 $C$ 将域 $R$ 分为 $R_1$ 及 $R_2$ 两部分, 分别在 $R_1$ 及 $R_2$ 上用分部积分法积分 (2). 因为在这两个域上都有 $L[u]=0$, 且因在 $R$ 的边界上 $\zeta=0$, 故得 (用 $[u]$ 表示 $u$ 跨过 $C$ 时的跃度)

$$\int_C \zeta(A[u]\phi_x + B[u]\phi_t)\mathrm{d}s = 0,$$

这里 $\phi_x, \phi_t$ 表示 $C$ 的法线的方向余弦, 而 $s$ 表示 $C$ 上的弧长, 但 $\zeta$ 在 $C$ 上是任意的, 因此, 由变分法基本引理得知

$$(\phi_x A + \phi_t B)[u] = 0. \tag{5}$$

在跃度 $[u]$ 不为 0 的假设下, 这个线性齐次方程意味着矩阵 $\phi_x A + \phi_t B$ 是奇异的, 即 $C$ 是特征曲线 (见 5.2). 作为例子, 如果函数 $f$ 和 $g$ 是间断的, 读者容易验证 $u = f(x+t) + g(x-t)$ 是波动方程的弱解.

对于高阶方程可给出弱解的类似的定义.

沿着特征曲线, $u$ 变为无穷大时也可以引入广义解. 例如, 取一个由函数 $v$ 的导数所定义的函数 $u = v_t$ 为弱解, $v$ 可以出现跳跃间断, 并约定对一切光滑的试探函数 $\zeta$ 有

$$\iint_R v\frac{\partial}{\partial t}L^*[\zeta]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

同前所述, $v$ 的间断性只能在跨过特征曲线时出现, 并且 $[v]$ 与前述 $[u]$ 一样满足同样的关系式, 即

$$(A\phi_x + B\phi_t)[v] = 0.$$

---

[1] 当然, 可只要求 $u$ 的可积性来推广这个定义, 但这对本文的目的不特别有用.

### 5.9.2　表现守恒定律的拟线性组的间断性. 激波

拟线性方程组, 若其具有散度方程或"守恒定律"[1]的形式

$$L[u] = p_t(x,t,u) + q_x(x,t,u) + n(x,t,u) = 0, \tag{6}$$

其中 $p, q, n$ 是对 $G$ 上的自变量 $x, t$ 以及某个给定域上的 $u$ 的二次连续可微的函数矢量[2], 则对其间断解有一种类似的理论, 在可压缩流体动力学中极为重要. 除此之外, 与 Hamilton 原理相关而产生的微分方程也呈现这种形式.

要定义守恒定律的方程组的弱解, 再考虑在 $R \subset G$ 上光滑而在 $R$ 之外为 $O$ 的任意试探函数 $\zeta$. 用 $\zeta$ 乘 (6), 在 $R$ 上积分, 得到

$$\iint_R \zeta L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

对于光滑的 $u$, 据 Gauss 定理得

$$\iint_R (p\zeta_t + q\zeta_x - n\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{7}$$

反之, 如果 (7) 对于具有连续一阶导数的函数及所有容许的试探函数 $\zeta$ 成立, 则又一次应用 Gauss 定理, 得到

$$\iint_R \zeta L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{8}$$

同前所述, 可归结出 $L[u] = 0$. 如果函数 $u$ 是分块连续的、具有分块连续的一阶导数, 并且如果 (7) 能为 $G$ 的一切子域 $R$ 上的一切容许的试探函数 $\zeta$ 所满足, 则称 $u$ 为弱解.

还要导出对于间断的弱解 $u$ 的跃度的关系式. 令 $C$ 是将 $R$ 分为两个域的间断性曲线. 对每个域分别使用 Gauss 定理, 并注意到在 $R$ 之外 $\zeta = 0$ 以及在 $C$ 外 $L[u] = 0$, 得到

$$\iint_C \zeta(\phi_t[p] + \phi_x[q])\mathrm{d}s = 0,$$

因此也有跨过 $C$ 的跃度条件

$$\phi_t[p] + \phi_x[q] = 0, \tag{9}$$

这里 $\phi_t, \phi_x$ 仍然表示 $C$ 的法线的方向余弦, 而 $[p], [q]$ 表示跨过 $C$ 时 $p$ 及 $q$ 的跃度.

---

[1] 参考本小节末尾的附注 $(V)$, 它指出这种守恒律不是单独由这个微分方程所唯一确定的, 还必须外加物理意义.

[2] 线性组总可以写成这种形式.

在拟线性和线性的情形之间有几点深刻的区别, 如下所述.

1) 在拟线性情形中, 间断性之间的关系和曲线 $C$ 的斜率的关系不是分开来的而是互相牵连的. 间断性曲线 $C$ 或"激波"不是特征曲线.

2) 在线性情形下, 间断解可作为真正解的极限而得到; 事实上, 可用此法定义弱解. 然而, 对于非线性的守恒定律, 间断的弱解不能作为光滑解的极限而得出.

3) 在线性情形下, 跃度条件 (5) 对给定的不连续初值 (或混合初、边值) 问题足以定出唯一的间断解. 在非线性情形下, 跃度条件 (9) 必须加以补充, 例如, 用所谓"熵"条件来补充, 才能从它们得出相应问题的唯一的解.

4) 线性方程的解仅当预先给定的数据为间断时才是间断的. 与此相反, 具有光滑的 (甚至解析的) 初始数据的非线性方程的解经过一段有限的时间后, 却能发展成为间断的.

5) 将各组不同的守恒定律视为微分方程组可能是等价的, 也就是说, 一个组的光滑解也是另一组的光滑解. 但是, 一个组的间断解却未必是 (而且一般不是) 另一组的解. 一个生动的例子：一个表示质量、动量和能量守恒的方程组, 另一个表示质量、动量和熵守恒的方程组.

Riemann, Hugoniot, Rankine 和另外一些人在联系到可压缩流动时研究了间断性①. 关于守恒定律方程组的解的间断性, P. D. Lax 发展了一般理论②.

① 参考 R. Courant and K. O. Friedrichs[1], O. A. Oleinik[4], I. M. Gelfand[1].
② 参考 P. D. Lax[2].

# 第 5 章附录 I　特征作为坐标的应用

## 5′.1　关于一般二阶非线性方程的附注

非线性微分方程的 Cauchy 问题可用一般性的方法化为一阶拟线性组的 Cauchy 问题. 有趣的是, 在二阶方程的情形下, 引用特征坐标系 $\alpha, \beta$ 去处理这个问题要更直接些①, 这样就导致了用这两个特征参数表示的八个量 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 的一阶方程组 (参考 5.2.3).

### 5′.1.1　拟线性微分方程

先考虑拟线性方程

$$L[u] \equiv au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \tag{1}$$

其中 $a, b, c, d$ 是 $x, y, u, p = u_x, q = u_y$ 的已知函数, 它们在 $x, y, u, p, q$ 空间的所论域中有连续的二阶导数.

如果

$$a\phi_x^2 + b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0, \tag{2}$$

则曲线族 $\phi(x, y) =$常数是特征 (参考 5.1.1 和 5.1.2); 要求

$$b^2 - 4ac > 0,$$

即在 $x, y, u, p, q$ 空间的所论域上 (1) 是双曲型的, 而且不失一般性, 可假定 $a \neq 0, b \neq 0$, 就是说直线 $x =$常数, $y =$常数不是特征.

同 5.2.3 中所述, 对于解 $u(x, y)$ 的两个特征曲线族是 $\phi = \alpha(x, y) =$常数和 $\phi = \beta(x, y) =$常数, 沿着特征曲线 $C$ 对它的参数求导将用字母上面加一个点表示. 使用缩写符号

$$u_{xx} = r, u_{xy} = s, u_{yy} = t,$$

则方程 (1) 及沿特征 $C$ 的成带条件可写成:

$$ar + bs + c_t + d = 0,$$

① 详见 H. Lewy[7] 和 J. Hadamard[2] 中的介绍. 对于二阶非线性 Cauchy 问题的 H. Lewy 的解是本章所述理论中决定性的一步, 挑选出二阶的情形是因为可引用两个特征参数作为自变量.

$$\dot{x}r + \dot{y}s - \dot{p} = 0, \tag{3}$$
$$\dot{x}s + \dot{y}t - \dot{q} = 0.$$

一方面, $C$ 是特征, $r, s, t$ 不能由 (3) 唯一地确定; 另一方面, 如果有一个解 $u(x, y)$, 那么 (3) 中诸方程必定是相容的. 所以, 矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 & -\dot{p} \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} & -\dot{q} \end{pmatrix}$$

的秩最多是 2. 由此又得到特征条件

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \equiv a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0 \tag{3a}$$

和

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ \dot{x} & 0 & -\dot{p} \\ 0 & \dot{y} & -\dot{q} \end{vmatrix} \equiv d\dot{x}\dot{y} + a\dot{y}\dot{p} + c\dot{x}\dot{q} = 0. \tag{4}$$

因为 $b^2 - 4ac > 0$, 且 $a \neq 0, c \neq 0$, 可将 (3a) 写作

$$a\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 - b\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + c \equiv a\left(\tau^1 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\left(\tau^2 - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0,$$

其中 $\tau^1(x, y, u, p, q), \tau^2(x, y, u, p, q)$ 是两个不同的实函数, 并由微分方程

$$\tau^1 x_\alpha - y_\alpha = 0, \qquad \tau^2 x_\beta - y_\beta = 0,$$

规定两个特征曲线族. 要想用 $\alpha, \beta$ 作为坐标, Jacobi 式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha = (\tau^2 - \tau^1)x_\alpha x_\beta$$

必须异于零, 即不失一般性, 可设 $x_\alpha^2 + x_\beta^2 \neq 0$.

现在能写出五个量 $x, y, u, p, q$ 的微分方程组：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a) } \tau^1 x_\alpha - y_\alpha = 0, \\ &\text{(b) } \tau^2 x_\beta - y_\beta = 0, \\ &\text{(c) } d\tau^1 x_\alpha + a\tau^1 p_\alpha + c q_\alpha = 0, \\ &\text{(d) } d\tau^2 x_\beta + a\tau^2 p_\beta + c q_\beta = 0, \\ &\text{(e) } -p x_\alpha - q y_\alpha + u_\alpha = 0, \\ &\text{(f) } -p x_\beta - q y_\beta + u_\beta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(5) 中前两个方程来源于 (3a), 中间两个方程来源于 (4), 最后两个方程是 $\dot{u}$ 的成带关系. 这些方程中有一个是多余的, 它是其他五个的必须结果①. 因此已经导出了关于五个量的五个一阶方程组成的方程组.

这些方程形成一个以特征参数 $\alpha,\beta$ 为自变量的一阶双曲型组, 是 5.7 所讨论过的类型. 如果对于原来的方程在某个无处为特征的曲线上给定了初始值 $u,u_y$, 则在那条曲线 (现在在 $\alpha,\beta$ 坐标中考虑) 上可立即导出 $x,y,u,p,q$ 的初始值.

根据 5.7, 肯定了 (5) 的解的存在性和唯一性. 而且由 (5) 的初值问题 (它的 Cauchy 数据是由原来对 (1) 的 Cauchy 数据导出的) 的解可得到方程 (1) 的原 Cauchy 问题的解. 证明如下所述.

首先, 由 Jacobi 式 $x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$ 不为零, 可引用 $x,y$ 作为自变量, 且 $u,p,q$ 是 $x,y$ 的连续可微函数. 为了证明 $u_x=p,u_y=q$, 考虑等价的关系式

$$A\equiv u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0,$$

$$B\equiv u_\beta - px_\beta - qy_\beta = 0.$$

根据 (5) 中 (e), 关系式 $A=0$ 成立; 如上所述, 关系式 $B=0$ 是 (5) 中 (a)~(e) 及初始值 $B=0$ 的结果. 最后, 需要验证由 (5) 得到的量 $u,p,q,u_{xx}=r,u_{xy}=s,u_{yy}=t$ 满足微分方程 (1). 事实上, 根据

$$p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha, q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha,$$

由 (5) 得到关系式

$$\begin{aligned}0&=d\tau^1 x_\alpha + a\tau^1(rx_\alpha+sy_\alpha)+c(sx_\alpha+ty_\alpha)\\&=\tau^1 x_\alpha\left[d+ar+ct+s\left(a\tau^1+\frac{c}{\tau^1}\right)\right].\end{aligned}$$

---

① 事实上, 要想得出方程 (5) 中 (f) 是其他几个方程的必然结果, 将表达式

$$B=u_\beta - px_\beta - qy_\beta$$

对 $\alpha$ 微分, 并将方程 (5) 中 (e) 对 $\beta$ 微分. 相减得到

$$B_\alpha = p_\beta x_\alpha - p_\alpha x_\beta + q_\beta y_\alpha - q_\alpha y_\beta.$$

借助于方程 (5) 中 (a)、(b) 将 $y_\alpha, y_\beta$ 用 $x_\alpha, y_\beta$ 表示出来, 然后利用 (5) 中 (c)、(d) 将后两项合并, 得到

$$B_\alpha = \left(\frac{a}{c}\tau^1\tau^2 - 1\right)\left(p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha\right).$$

但是, 由特征条件 (3a), 有 $\tau^1\tau^2=\dfrac{c}{a}$, 于是

$$B_\alpha = 0.$$

这说明沿着每条曲线 $\beta=$常数, 有 $B=$常数. 又因假定了初始数据满足方程组 (5), 故知处处有 $B=0$.

但因 $\tau^1 x_\alpha \neq 0$, 且根据二次方程 $a\tau^1 + \dfrac{c}{\tau^1} = b$, 得到

$$0 = ar + bs + ct + d,$$

这正是所要证明的.

因此解决了拟线性方程的 Cauchy 问题, 也蕴含着证明了解的唯一性.

为建立解所作的假设可总结如下, 无处为特征的且处处光滑的初始带偕同有连续导数的初始值 $u, p, q$; 系数 $a, b, c, d$ 有直到二阶的连续导数. 解的唯一性和存在性是肯定的, 点 $P$ 的依赖区域由过 $P$ 的两条特征和两特征之间的初始曲线弧所界定①.

还须指出, 特征初值问题也可用相同的方法叙述和解决.

### 5′.1.2 一般的非线性方程

对于具有相同的主要部分的拟线性组, 即形如

$$au^j_{xx} + bu^j_{xy} + cu^j_{yy} + d^j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{6}$$

的方程组 (其中 $a, b, c, d^j$ 都是 $x, y, u^j, p^j, q^j$ 的已知函数), 5′.1.1 中的方法几乎可逐字逐句地使用.

一般的非线性双曲型方程

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{7}$$

也可化成有相同主部的等阶的拟线性方程组, 方法是将方程 (7) 对 $x$ 和对 $y$ 微分.

一般地得到以特征参数为自变量的一个等价的一阶典型组, 不像前面有五个方程, 而是有作为 $\alpha, \beta$ 的函数的八个量 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 的八个微分方程②(对于 Monge-Ampére 方程的特殊情形将在 5′.2 中进行论述).

于是用与 5′.1.1 相同的方法得到关于 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 这八个量的十二个方程, 并且可以证明：a) 这十二个方程中的四个是其他方程的结果, 它们之中只有八个是独立的. b) 如果对方程 (7) 提出了一个初值问题, 则对于这八个一阶方程组成的方程组可推导出相应的初始值. 再用迭代法构出这个组的解 $x, y, u, p, q, r, s, t$, 则对方程 (7) 得到解

$$u(x, y) = u(\alpha(a, y), \beta(x, y)).$$

c) 如果 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 的初始值是连续可微的并且如果 $F$ 有对 $x, y, u, p, q, r, s, t$ 的直到三阶的连续导数, 则这个组的解 $u$ 有直到三阶的连续导数.

---

① A. Douglis[1] 曾指出, 这个假设可稍减弱一些 (也可参考 P. Hartman and A. Wintner[1]).

② 详见 H. Lewy[7] 和 J. Hadamard[2].

## 5′.2　Monge-Ampère 方程的特殊性质

在各个领域中, 如微分几何, 很多学者都有很大兴趣的 Monge-Ampère 方程

$$F = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0 \tag{1}$$

是真正非线性的 —— 它对于 $r, s, t$ 是二次的. 但是, 与一般的化为方程组的八个非线性微分方程有所不同, (1) 的初值问题恰如二阶拟线性方程初值问题的情形一样, 可以化为一个只含五个一阶拟线性方程的方程组. 这个事实产生一些有趣的结果, 例如, 对于 Monge-Ampère 方程的可容许的初始数据的种类要比一般非线性方程更广泛些 (少一些严格的光滑性的要求).

考虑方程 (1), 其中 $A, B, C, D, E$ 都是 $x, y, u, p, q$ 的光滑函数. 5.1 中的特征条件 (9) 变为

$$(A + Dt)\dot{y}^2 - (B - 2Ds)\dot{y}\dot{x} + (C + Dr)\dot{x}^2 = 0. \tag{2}$$

可假定 $A + Dt \neq 0, C + Dr \neq 0$. 如果方程 (1) 是双曲型的, 即若判别式

$$\Delta^2 = F_s^2 - 4F_rF_t = B^2 - 4AC + 4ED > 0, \tag{3}$$

则方程 (2) 有不同的实根 $\tau^1, \tau^2$. 有意义的是二阶导数 $r, s, t$ 不在判别式的表达式中.

再者, 下面的恒等式是由方程 (1) 和判别式 $\Delta^2$ 得到的结果.

$$\begin{aligned} 0 &= D\{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E\} \\ &= (A + Dt)(C + Dr) - \frac{1}{4}(B - 2Ds)^2 + \frac{1}{4}\Delta^2 \end{aligned}$$

或

$$\frac{A + Dt}{\frac{1}{2}(B - 2Ds - \Delta)} = \frac{\frac{1}{2}(B - 2Ds + \Delta)}{C + Dr}. \tag{4}$$

解出 (2) 中的比 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, 得到两个根

$$\tau^1 = \frac{B - 2Ds + \Delta}{2(A + Dt)}, \quad \tau^2 = \frac{B - 2Ds - \Delta}{2(A + Dt)}.$$

用特征自变量表示, 得到的方程为

$$\begin{aligned}(A+Dt)y_\alpha-\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)x_\alpha=0,\\(A+Dt)y_\beta-\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)x_\beta=0\end{aligned}\tag{5}$$

或

$$\begin{aligned}D(ty_\alpha+sx_\alpha)+Ay_\alpha-\frac{1}{2}(B+\Delta)x_\alpha=0,\\D(ty_\beta+sx_\beta)+Ay_\beta-\frac{1}{2}(B-\Delta)x_\beta=0.\end{aligned}\tag{5a}$$

根据成带关系

$$\dot q=s\dot x+t\dot y,$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(B+\Delta)x_\alpha-Ay_\alpha-Dq_\alpha=0,\\\frac{1}{2}(B-\Delta)x_\beta-Ay_\beta-Dq_\beta=0.\end{aligned}\tag{5b}$$

利用恒等式 (4), 由 (5) 得出两组附加方程为

$$\begin{aligned}(C+Dr)x_\alpha-\frac{1}{2}(B-2Ds-\Delta)y_\alpha=0,\\(C+Dr)x_\beta-\frac{1}{2}(B-2Ds+\Delta)y_\beta=0\end{aligned}\tag{6}$$

或

$$\begin{aligned}D(rx_\alpha+sy_\alpha)+Cx_\alpha-\frac{1}{2}(B-\Delta)y_\alpha=0,\\D(rx_\beta+sy_\beta)+Cx_\beta-\frac{1}{2}(B+\Delta)y_\beta=0.\end{aligned}\tag{6a}$$

再利用成带关系

$$\dot p=r\dot x+s\dot y,$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(B-\Delta)y_\alpha-Cx_\alpha-Dp_\alpha=0,\\\frac{1}{2}(B+\Delta)y_\beta-Cx_\beta-Dp_\beta=0.\end{aligned}\tag{6b}$$

注意：由 (5b), (6b) 和成带条件

$$u_\alpha-px_\alpha-qy_\alpha=0,\tag{7}$$

这五个方程组成的方程组在下述意义下等价于原来的 Monge-Ampère 方程 (1). 如果 $x, y, u, p, q$ 是这组方程的一组解, 它的初始值是由对 (1) 给定的初始值推导出来的, 又如果 Jacobi 式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}$ 不为 0, 那么

$$u(\alpha(x,y),\beta(x,y)) = u(x,y)$$

就是 (1) 的初值问题的解.

为了肯定这个结论, 先从四个成带条件

$$\begin{aligned} x_\alpha r + y_\alpha s - p_\alpha = 0, \\ x_\beta r + y_\beta s - p_\beta = 0, \\ x_\alpha s + y_\alpha t - q_\alpha = 0, \\ x_\beta s + y_\beta t - q_\beta = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

算出三个量 $r, s, t$. 由前两个方程消去 $r$, 再由后两个方程消去 $t$, 得到

$$s = \frac{x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}} \text{ 和 } s = \frac{y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}}.$$

形如 $q_\alpha = q_x x_\alpha + q_y y_\alpha$ 的关系式说明只要 $q_x = p_y$, (8) 中诸方程就是相容的. 由 (8) 得出的函数 $r, s, t$ 显然满足方程 (5a) 和 (6a), 因而也满足 (5) 和 (6). 由 (5) 和 (6) 中的第一个方程得到恒等式

$$D\{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E\} = 0,$$

或者由于 $D \neq 0$(否则 (1) 就是拟线性的了), 得到

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0.$$

因此, 方程组的解导致了 (1) 的解, 并且可立即验证这个解有正确的初始值.

只要要求 Monge-Ampère 方程的初始数据 $u(x,0)$ 是二次可微的, $u_y(x,0)$ 是一次可微的, 这样的光滑性就够了. 换句话说, 要求只像对拟线性情形的那种严格程度, 而不像对一般非线性情形那么严格.

另一点也说明 Monge-Ampère 方程的特殊性. 它所涉及的是初值问题, 对于二阶导数是二次的微分方程

$$Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + Drs + Ert + Fst + Gr + Hs + It + K = 0, \tag{9}$$

其中 $A, \cdots, K$ 都是 $x, y, u, p, q$ 的函数, 考虑如下的初值问题：沿着曲线 $x(\lambda), y(\lambda)$ 指定 $u(\lambda), p(\lambda), q(\lambda)$ 的值使之满足成带关系 $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$. 由 (9) 和成带关系

$$r\dot{x} + s\dot{y} = \dot{p},\ s\dot{x} + t\dot{y} = \dot{q},$$

算出 $r, s, t$ 的初始值而将这条一阶带扩展为二阶积分带. 由于 (9) 的二次性质, 这种扩展一般能由两种途径进行. 不过, 能够证明在形如 (9) 的一切方程中, 唯独 Monge-Ampère 方程只允许用一种方法将任意的一阶初始带扩展为积分带.

为了证明这一点, 在上述成带关系中令 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\alpha$, 就得到

$$s = \alpha t + \cdots, \ r = \alpha^2 t + \cdots,$$

后面的一些点表示沿一阶带为已知的那些量. 把 $r$ 和 $s$ 的这两个表达式代入 (9), 得到 $t^2$ 项的系数

$$A\alpha^4 + D\alpha^3 + (E+B)\alpha^2 + F\alpha + C.$$

这个表达式对一切 $\alpha$ 为零等价于方程

$$A = D = F = C = 0, \ E + B = 0,$$

这就证明了结论.

对于初值问题的这个结果似乎特别值得注意, 因为在第 4 章 4.6.3 中, 对于椭圆型的 Monge-Ampère 方程的边值问题证明了可能有两个解.

## 5′.3 利用复数域由椭圆型转变为双曲型的情形

在本书各处, 对一切变量本质上都假定是实的, 复值量只偶然地在形式上引入. 不过, 在 5′.4 和 5′.5 中, 将简短地叙述关于复变量的颇为深入的运用, 它始于 H. Lewy① 而被 H. Lewy、P. Garabedian② 和其他人所推进.

考虑具有分量 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ 的函数矢量 $u(x,y)$ 的一阶线性方程组

$$u_y^\nu + \sum_{\mu=1}^{n} a_\nu^\mu u_x^\mu = f_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

其中 $a_{\nu\mu}$ 和 $f_\nu$ 是 $x, y$ 的函数. 当函数 $f_\nu$ 和系数 $a_{\nu\mu}$ 是实变量 $x, y$ 的复值函数时, 前面对线性方程所讲的一切对这个方程仍然适用③. 可把解分离成它们的实部和虚部: $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$; 于是, 得到关于函数 $u_1$ 和 $u_2$ 的相同类型的 $2n$ 个方程, 以取代具有复值系数的 $n$ 个方程. 积分理论、唯一性定理和前面关于解对参数的连续及可微的依赖性诸结论都保持不变.

① 参考 H. Lewy[6].

② 参考 P. Garabedian and H. M. Lieberstein[1].

③ 原书这里漏掉一段. “考虑具有分量 ······ 仍然适用” 这一段是译者根据后面的文字加以揣测而补上去的. —— 译者注.

再者, 如果一个实微分方程 $F(x,y,u,\cdots)=0$ 的左边是它的所有变量的解析函数, 并且如果还知道解 $u(x,y)$ 解析地依赖于 $x,y$, 那么当把 $x,y$ 看做是复变量 $x=x_1+\mathrm{i}x_2, y=y_1+\mathrm{i}y_2$ 时, 就能把这个微分方程和它的解析延拓到复数域上去. 当这样作的时候, 类型之间的区别消失了, 所以原则上能够把椭圆型过渡到双曲型.

量简单的典型例子是微分方程

$$\Delta u \equiv u_{xx}+u_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y), \tag{1}$$

它是椭圆型的 (在实数域上). 假定右边是其五个变量的解析函数. 如果解 $u$ 解析地依赖于 $x$ 和 $y$, 可将 $u$ 看做是复变量 $x=x_1+\mathrm{i}x_2, y=y_1+\mathrm{i}y_2$ 的函数或者看做是四个实变量 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 的复值函数. 于是, 在实数域上, 微分方程具有形式

$$u_{x_1x_1}+u_{y_1y_1}=f(x_1,y_1,u,u_{x_1},u_{y_1}), \tag{2}$$

但因在复平面上, 能够像对 $y_1$ 一样对 $\mathrm{i}y_2$ 微分, 把复解析函数 $u$ 看做四个变量 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 的函数, 则它也满足方程

$$u_{x_1x_1}-u_{y_2y_2}=f(x,y,u,u_{x_1},-\mathrm{i}u_{y_2}), \tag{3}$$

这个方程呈现了双曲型性质. 之所以能做这样一个变换, 道理在于对解所假设的解析性, 即在于函数 $u$ 在复数域上的导数与求导的方向无关.

现在把推理倒转过来就是, 从原方程的一个实解出发, 把它按如下方式向复数域延拓：使得延拓函数满足双曲型方程 (3) 或相应的方程组, 然后论证这样得到的复值函数的解析性. 这是 H. Lewy 在其证明椭圆型微分方程解的解析性的方法中首先使用的基本思路[①].

## 5′.4　在椭圆型情形中解的解析性

### 5′.4.1　函数论的注记

一个具有一阶连续偏导数的复值函数 $w(x_1,x_2,y_1,y_2)=w_1+\mathrm{i}w_2$, 当它在四维空间 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 的域 $B$ 上满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\nabla w \equiv w_{x_1}+\mathrm{i}w_{x_2}=0,\ \Lambda w \equiv w_{y_1}+\mathrm{i}w_{y_2}=0 \tag{1}$$

时, 叫做域 $B$ 上的两个复变量 $x=x_1+\mathrm{i}x_2$ 和 $y=y_1+\mathrm{i}y_2$ 的解析函数. 一个等价的定义, 如果存在一个正数 $M$, 使得 $|x|\leqslant M, |y|\leqslant M$ 时, 函数 $w$ 能展成一个幂级

① 参考 H. Lewy[6].

数

$$w=\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty}a_{\nu\mu}x^{\nu}y^{\mu},\tag{2}$$

那么函数 $w$ 叫做在点 $x=0,y=0$ 的邻域是解析的[①]; 如果 $w$ 在域 $B$ 的每个点的邻域是解析的, 就称它在域 $B$ 上是解析的.

### 5′.4.2 $\boldsymbol{\Delta u=f(x,y,u,p,q)}$ 的解的解析性

假定在微分方程

$$\Delta u=f(x,y,u,p,q)\tag{3}$$

中, 函数 $f$ 是它的五个变量的 (实的) 解析函数, 并且 $u(x,y)$ 是微分方程在 $x=0,y=0$ 的一个 (实的) 邻域内的一个已知的二次连续可微解. 对 $f$ 所假定的这个解析性可以认为是在这个邻域以及由所论解 $u$ 确定的 $u,p,q$ 的值域上成立的. 由此可知, 问题中的解 $u$ 不仅是二次连续可微的, 而且是解析的.

将借助向复数域的延拓来得出证明, 就是将 $u$ 连续地扩展为 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 的复值二次连续可微函数, 使之满足条件 (1)[②]. 引入复变量 $x=x_1+\mathrm{i}x_2,y=y_1+\mathrm{i}y_2$, 要构造一个这样的复变函数 $u(x_1,x_2,y_1,y_2)$ —— 以后将证明它对 $x$ 和 $y$ 是解析的 —— 使它当 $x_2=y_2=0$ 时变为已知的函数 $u(x,y)=u(x_1,y_1)$.

---

① 这个性质可从 Cauchy-Riemann 定义借助重复运用复变量的 Cauchy积分表示式而推导出来: 设 Cauchy-Riemann 关系式 (1) 在由 $|x|<M,|y|<M$ 规定的域 $B$ 上成立. 对于 $|\xi|\leqslant\dfrac{M}{2}$ 中的每个数对 $\xi_1,\xi_2$ 来说, 圆 $K_x:|x-\xi|=\dfrac{M}{2}$ 完全包含在 $B$ 内, 因而满足 $|x-\xi|\leqslant\dfrac{M}{2}$ 的所有点 $x$ 也都包含在 $B$ 内. 所以, 当把 $y_1,y_2$ 看做参数时, 根据 Cauchy 积分公式, $w$ 在 $K_x$ 内可表示为

$$w(x_1,x_2;y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{K_y}\frac{w(\xi_1,\xi_2;y_1,y_2)}{(\xi_1+\mathrm{i}\xi_2)-(x_1+\mathrm{i}x_2)}(\mathrm{d}\xi_1+\mathrm{i}\mathrm{d}\xi_2).$$

同样, 当用关系式 $|\eta|\leqslant\dfrac{M}{2}$ 限定 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 时, 圆 $K_y:|y-\eta|=\dfrac{M}{2}$ 及其内部都含于 $B$ 中. 因此 $w$ 又可表示为

$$w(\xi_1,\xi_2;y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{K_y}\frac{w(\xi_1,\xi_2;\eta_1,\eta_2)}{(\eta_1+\mathrm{i}\eta_2)-(y_1+\mathrm{i}y_2)}(\mathrm{d}\eta_1+\mathrm{i}\mathrm{d}\eta_2).$$

代入前式得到 Cauchy 重积分表示式

$$w(x_1,x_2;y_1,y_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{K_x}\int_{K_y}w(\xi_1,\xi_2;\eta_1,\eta_2)\frac{(\mathrm{d}\xi_1+\mathrm{i}\mathrm{d}\xi_2)(\mathrm{d}\eta_1+\mathrm{i}\mathrm{d}\eta_2)}{(\xi_1+\mathrm{i}\xi_2-x)(\eta_1+\mathrm{i}\eta_2-y)}.$$

现在将被积分式中的分式像单变量的情形那样展成 $x$ 和 $y$ 的幂级数, 然后逐项积分. 于是, 得到所需要的 $w$ 的幂级数表示式.

② 对于这个微分方程, 使用势论的方法来证明, 原则上是同样简单的. 不过, 这里陈述的 H. Lewy 的方法本身是有趣的而且为更多问题的解法开辟了道路 (参考 H. Lewy[3], [4] 和 [5]). 向多维空间扩展的类似想法已成功地在不同的相关课题中得到证明.

延拓是逐步进行的. 对于固定的 $x_1$, 先将原来的函数 $u(x_1,y_1)$ 扩展为复值函数 $u(x_1,x_2,y_1)$, 然后再把后面这个函数扩展为复值函数 $u(x_1,x_2,y_1,y_2)$. 将 $f$ 延拓为复变量的解析函数, 于是它对于这些变量就自然而然地是连续可微的了.

第一步是将 $x_1$ 看做函数, 并借助微分方程

$$u_{y_1y_1}-u_{x_2x_2}=f(x_1+\mathrm{i}x_2,y_1,u,-\mathrm{i}u_{x_2},u_{y_1}) \tag{4}$$

去确定新函数 $u(x_1,x_2,y_1)$. 方程 (4) 是由原来的方程 (3) 将 $x$ 换成 $x_1+\mathrm{i}x_2$ 而形式地得到的. 这里把 $x_1$ 看成是一个固定的参数, 而 $y_1$ 和 $x_2$ 是复值微分方程中的两个实的自变量. 对于这个方程, 考虑初始曲线为 $x_2=0$ 的初值问题.

在此曲线上, 一个初始条件的形式是

$$u(x_1,0,y_1)=u(x_1,y_1), \tag{5}$$

它的右边是 (3) 的原来的实解.

关于第二个初始条件, 用 $x_2=0$ 时的初始要求

$$\nabla u\equiv u_{x_1}+\mathrm{i}u_{x_2}=0 \tag{6}$$

来确定 $u_{x_2}$, 这个等式说明在初始曲线上满足 Cauchy-Riemann 条件. 因此, 根据前面的理论, $u(x_1,y_1)$ 能够在初始曲线的一个适当的邻域内扩充成为 $u(x_1,x_2,y_1)$. 又因在某个区间上 $u(x_1,y_1)$ 连续可微地依赖于参数 $x_1$(见第 5 章 5.5), 所以在点 $x_1=0,x_2=0,y_1=0$ 的一个长方体邻域内函数 $u(x_1,x_2,y_1)$ 有定义且对 $x_1$ 是连续可微的. 同样, 导数 $u_{x_2}$ 对 $x_1$ 也是连续可微的.

将第二个初始条件 (6) 对参数 $x_1$ 微分, 得到 $\dfrac{\partial(\nabla u)}{\partial x_1}=u_{x_1x_1}+\mathrm{i}u_{x_2x_1}=0$. 当 $x_2=0$ 时, 由 (3) 减去 (4), 得到

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=0 \qquad (x_2=0),$$

或者利用上面的关系, 得到

$$u_{x_2x_2}-\mathrm{i}u_{x_2x_1}=0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla u\equiv\frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1}+\mathrm{i}u_{x_2})=0. \tag{7}$$

现在对方程 (4) 使用 Cauchy 算子 $\nabla$. 为简便计, 令 $\nabla u=w$, 经形式地微分, 得到

$$w_{y_1y_1}-w_{x_2x_2}=f_x\nabla x+f_u\triangle u-\mathrm{i}f_p\nabla u_{x_2}+f_q\nabla u_{y_1}.$$

因 $\nabla x = 0$, 最后得到

$$w_{y_1y_1} - w_{x_2x_2} = f_u w - \mathrm{i} f_p w_{x_2} + f_q w_{y_1}.$$

右边的系数是 $y_1$ 和 $x_2$ 的已知复值函数. 所以这个方程是 $w$ 的一个线性齐次双曲型微分方程, 根据前面的结果, 这个方程的初值问题的解是唯一确定的. 但因根据 (6) 和 (7), $w$ 及 $\dfrac{\partial w}{\partial x_2}$ 的初始值为 0, 所以在原点邻近的三维域 $Q$ 中恒有 $w = 0$.

现在需要进行延拓的第二步, 就是把 $u$ 延拓到四维的 $x_1, x_2, y_1, y_2$ 域中去. 为此目的, 考虑 $Q$ 中任意两个值 $x_2$ 和 $y_1$, 并在双曲型微分方程

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -\mathrm{i} u_{y_2}) \tag{8}$$

的基础上将 $u$ 对新的变量进行延拓. 在 $x_1, y_2$ 平面的直线 $y_2 = 0$ 上, 规定初始条件

$$u(x_1, x_2, y_1, 0) = u(x_1, x_2, y_1),$$

并且要求当 $y_2 = 0$ 时, 有

$$\Lambda u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_2}\right) u = 0, \tag{9}$$

作为第二个初始条件. 于是唯一地规定了函数 $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$. 由于偏微分方程 (8) 的解对于参数 $x_2, y_1$ 的连续性质, 得知这个解在原点的一个四维邻域 $B$ 上确实有定义并且对参数是连续可微的.

要证明 $u$ 的解析性, 只要证明在 $B$ 上处处满足关系式 $\nabla u = 0$ 和 $\Lambda u = 0$. 关系式 $\Lambda u = 0$ 且当 $y_2 = 0$ 时恰好是初始条件 (9). 而且对于 $y_2 = 0$, 方程 (8) 和 (9) 都得到满足, 将二者相减, 得到当 $y_2 = 0$ 时, 有

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} + u_{x_2x_2} - u_{y_1y_1} = 0.$$

但因根据前面的讨论, 在 $y_2 = 0$ 上也有 $\nabla u \equiv u_{x_1} + \mathrm{i} u_{x_2} = 0$, 把它对 $x_1$ 和 $x_2$ 微分并相减, 得到 $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$, 因此对于 $y_2 = 0$, 得到

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0. \tag{10}$$

另一方面, (9) 也对于 $y_2 = 0$ 成立, 因此把它对参数 $y_1$ 微分, 得到 $u_{y_1y_1} + \mathrm{i} u_{y_1y_2} = 0$, 再利用 (10), 得到在 $y_2 = 0$ 上, 有

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \Lambda u = 0.$$

同前所述, 由初值问题的唯一性定理推知在四维域 $B$ 上处处有 $\Delta u = 0$, 仿此, 可证明在 $B$ 上关系式 $\nabla u = 0$ 成立.

由于这样推出了 $u$ 在 $x = x_1, y = y_1$ 的复数邻域上是解析函数, 椭圆型方程 $\Delta u = f$ 的原来的解 $u(x,y)$ 的解析性也就得到了证明.

### 5′.4.3 关于一般微分方程 $F(x,y,u,p,q,r,s,t) = 0$ 的注记

H. Lewy 的想法也可用到两个变量的二阶解析微分方程的一般情形上. 以下定理成立: 如果 $u(x,y)$ 是一个椭圆型微分方程的三次连续可微的解, 假定这个微分方程对它的所有变元是解析的, 那么 $u(x,y)$ 本身必定是两个变量 $x$ 和 $y$ 的解析函数.

关于详细的证明, 读者可参考文献①. 基本思路如下: 与前面一样, 将微分方程换成拟线性微分方程组. 不过, 由椭圆型性质, 不能引入实的特征参数 $\alpha, \beta$. 但却可以化为形如

$$v^\nu_{\alpha\alpha} + v^\nu_{\beta\beta} = f_\nu(\alpha, \beta, v^1, v^2, \cdots; v^1_\alpha, v^2_\alpha, \cdots; v^1_\beta, v^2_\beta, \cdots)$$

的对于未知函数 $v^1, v^2, \cdots$ 的微分方程组. 对这样一个方程组, 几乎可以不变地使用 5.2 的理论, 于是在这个基础上, 可作出解的解析性质的证明.

## 5′.5 对于解的延拓使用复数量

设 $u$ 是一个解析椭圆型方程的解, 这个解在定义域的部分边界上满足解析边界条件.

H. Lewy②, 还有 P. Garabedian③, 利用向复数域扩张完成了椭圆型方程的解越过边界的解析延拓. 这方法对于极小曲面的延拓、对于广义反映原理的叙述、对于自由边界问题以及对于激波计算的问题上的有意义的应用可在引用的文献中找到④.

在本节只用一个很初等的例子来阐明这个方法.

在 5.4 中已经得知, 如果 $u$ 是实数域上一个解析的椭圆型方程的解, 那么它可以通过求解某个双曲型方程的初值问题而延拓到复数域上去. 如果 $u$ 在边界的解析线段上满足解析边界条件, 能用边界条件向复数域的扩张得到关于双曲型方程的混合初边值问题, 它们提供了 $u$ 向更大区域的解析扩张. 这个扩张了的区域含有越过原来给定的存在区域边界线段的外延.

① 参考 H. Lewy[6] 以及 J. Hadamard[2] 对 Lewy 证明的讲解.
② 参考 H. Lewy[2].
③ 参考 P. Garabedian[2].
④ 也可参考 P. Garabedian[1].

要颇为一般地得出这个结果, 会牵涉到相当复杂的几何知识与分析知识. 到目前为止, 最广泛的结果是 Garabedian 给出的, 那里把 H. Lewy 和 J. Hadamard 的早期著作列为参考文献.

用一个最容易的非显然情况来说明这一方法, 考虑 5.4 方程 (3) 的在下半平面的矩形 $R$:$-\sigma \leqslant x \leqslant \sigma, -\tau \leqslant y \leqslant 0$ 上一个解. 设在 $y=0$ 上 $u=0$, 并假定 $u$ 在闭域 $R$ 上有连续的三阶导数. 将把 $u$ 向上半平面 $y>0$ 延拓.

引入 $x_1$ 和 $x_2$ 如前. 5′.4 中具有初始条件 (5) 和 (6) 的方程 (4) 加上边界条件: 在 $y=0$ 上 $u=0$, 组成一个双曲型半线性边值问题. 此问题在某个适当小的三角形域上可解, 这个三角形域的周界一边是特征曲线, 另一边是具有指定的边界值的直线 $y=0$(见图 5′-1).

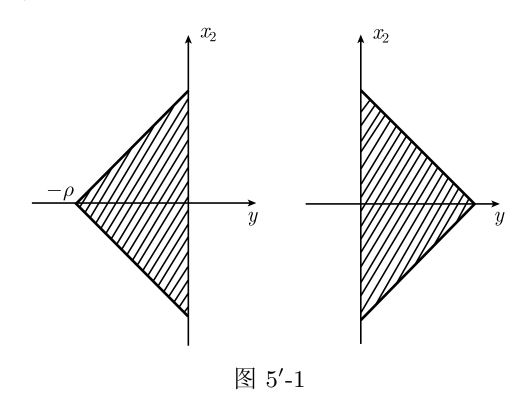



图 5′-1

显然, 这样一个三角形域可表示为

$$|y|+|x_2| \leqslant \rho, \quad y \leqslant 0. \tag{1}$$

$x_1$ 只作为参数引入初值问题. 而 $x_2, y$ 平面上使得 5′.4 的方程 (4) 有解的最大区域依赖于 $x_1$. 当 $\rho$ 取某个足够小的值时, 对于一切 $|x_1| \leqslant \sigma$ 以及一切满足 (1) 的 $x_2, y$ 有一个解.

现在知道在 $y=0, |x_2| \leqslant \rho, |x_1| \leqslant \sigma$ 上 $u, u_y$ 的值. 这些数据能够在 $y>0$ 的某个域上通过求解 (4)(5′.4) 的 Cauchy 问题而得出 $u$, 这个域包含着实半平面 $y \geqslant 0$ 上 $x_2=0$ 的一部分.

还应该验证所得到的延拓是原方程的解. 这可与前面一样通过证明 $u$ 在四维复数域上满足适当的方程来完成, 这里略.

应该注意的是, 对于形如 (4)(5′.4) 的线性方程, $u$ 可延拓出去的域只依赖于 $R$ 以及系数的奇异点的位置, 而不依赖于该解 $u$ 本身. 特别是, 当系数没有奇异点时, 则 $u$ 可延拓到整个反映矩形上去①.

① 正如 Garabedian 所指出的, Lewy 的反映原理 (参考 H. Lewy[2]) 可在此基础上得到.

# 第 5 章附录 II ①

# 瞬态问题与 Heaviside 运算微积

瞬态问题或混合问题 (见第 3 章 3.8) 在应用上 (如电机工程) 起极重要作用. 讨论这一问题的文献很多, 其研究重点都是 Heaviside 的符号算子法. 该方法处理问题直捷了当, 往往能给出不能以其他方法同样简单地获得的明确解答. 原先发表这一方法时对符号运算步骤并无严格道理可讲; 事实上, Heaviside 对职业数学家的疑虑甚至颇表不屑. 然而 Heaviside 方法的成就压倒一切, 使人们非得从数学上去弄清它的道理不可, 结果完全证明这种方法确有理论根据, 而终于大大促进符号方法的发展.

详尽讨论将超出本书范围②, 但这里至少可讲述最简单的几类瞬态问题的理论, 并略举数例.

## 5″.1　用积分表示解瞬态问题

### 5″.1.1　显例. 波动方程

求波动方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的解 $u(x,t)$, 使满足初始条件

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$$

及边界条件

(a) $$u(0,t) = f(t), u(l,t) = 0;$$

或

(b) $$u(0,t) = f(t), u_x(l,t) = 0,$$

这里的“力” $f(t)$ 是已给函数.

第一个问题 (a) 可以看做是弦振动问题, 该弦在 $t = 0$ 时静止, 其一端 $x = l$ 固定, 另一端 $x = 0$ 受函数 $f(t)$ 所定的力运动而引起偏移 $u$.

① 本附录虽与第 3、5、6 章中讨论的问题密切相关, 但应看做是穿插的内容, 它与本书其他部分在行文上, 重点上稍有不同.

② 读者可在 J. Mikusinski[1] 中找到详尽讲解, 其中并含有许多新近的发展材料.

在第二个问题 (b) 中, $x = 0$ 处受同样的运动, 但弦的另一端却可沿垂直于 $x$ 轴 (弦的静止位置) 的直线自由移动. 第二个问题也可以看做是决定理想输电线上电压 $u(x,t)$ 的问题, 在那种输电线上终端处的电流为零. 在这两个问题中, 都假定 $t \leqslant 0$ 时

$$f(t) = 0.$$

解这问题不难, 只要使波动方程一般解

$$u(x,t) = \phi(t+x) + \psi(t-x) \tag{2}$$

中的函数 $\phi(\lambda)$ 及 $\psi(\lambda)$ 适合初值条件与边界条件就行了. 把 $\lambda$ 轴分为一些区间 $J_\nu : \nu l \leqslant \lambda \leqslant (\nu+1)l$, 然后在各区间上依次定出函数 $\phi$ 及 $\psi$.

先来看第二个问题, 这相当于终端处有反射的情形. 从 $t = 0$ 时的初始条件, 得到所需函数应满足的关系式

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(-x) = 0, \\ \phi'(x) + \psi'(-x) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

将 (3) 中第一式微分, 得

$$\phi'(x) - \psi'(-x) = 0. \tag{3a}$$

这里 $x$ 在区间 $J_0$ 内, $-x$ 在区间 $J_{-1}$ 内. 由此可知 $\phi(\lambda)$ 及 $\psi(\lambda)$ 对这些区间内的 $\lambda$ 都是常数; 可以假定 (只要适当调整 $\phi$ 及 $\psi$ 所含的任意常数) 这些常数是零. 从 $x = 0$ 处的边界条件, 可知

$$\phi(t) + \psi(t) = f(t) \tag{4}$$

对所有区间 $J_\nu$ 都成立. 从另一端点处的反射条件得

$$\lim_{x\to l}[\phi'(t+x) - \psi'(t-x)] = 0. \tag{5}$$

假定 $\phi'(t+l) - \psi'(t-l)$ 处处连续, 便可积分而得

$$\phi(t+l) - \psi(t-l) = 0, \tag{6}$$

由此得出递推公式

$$\phi(t+2l) = \psi(t) \tag{7}$$

对区间 $J_{-1}, J_0, \cdots$ 中的所有 $t$ 都成立. 由 (4) 及 (7), 可通过递推, 对所有 $t > 0$ 的值唯一确定函数 $\phi$ 及 $\psi$, 从而也唯一确定了 $u$. 不难验证, 解的显式可以写为

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \tag{8}$$

这里右边的形式虽为无穷和, 但对每一时刻 $t$, 其中只有有限项是异于零的. 可设想这一级数表示波列; 这些波列具有波形 $f(\lambda)$ 或 $f(-\lambda)$, 沿着弦 $-\infty < x < \infty$ 朝两个方向进行, 它们叠加的结果就构成解.

关于这个解应指出, 设 $f(t)$ 表一脉冲[①], 即在一小区间 $0 \leqslant t \leqslant \in$ 上 $f(t) = 1$ 而在其余各处恒有 $f(t) = 0$. 于是在 $l < t < l+ \in$ 这段时间内函数在终点 $x = l$ 处的值是 2(见图 5″-1). 应用在电机工程上, $u$ 表电压, 这说明若输电线终端的电阻为无穷大, 则加在输电线上的电压可以倍增.

终点固定情形下的问题 (a) 也可同样简单地得出显解：

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \tag{9}$$

这可以看做是形状一样的一些波的叠加. 图 5″-2 相当于有这样一个外力函数 $f(t)$ 的脉冲：它只在区间 $0 \leqslant t \leqslant \in$ 上取值 1, 其余各处的值均为零. 图中 $x, t$ 平面上所论的带形域被划分为一些子域, 其上的函数 $u$ 分别取值 $+1, -1$ 或零.

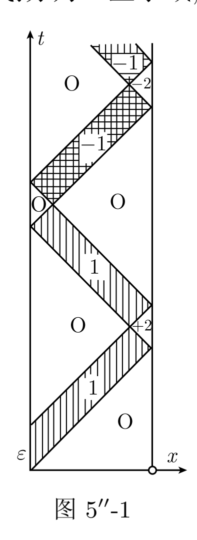



图 5″-1

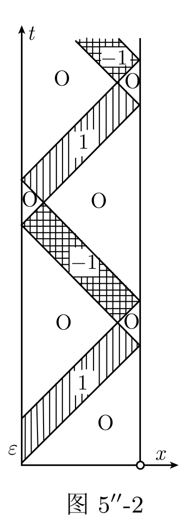



图 5″-2

### 5″.1.2　问题的一般性提法

在更一般的观点下来考察瞬态问题时, 可限于考察一维空间 $x$ 和时间坐标 $t$ 的情形, 至于多维空间的情形可类似地来处理. 来看下面的问题.

问题 I：设给定微分方程

$$au_{tt} + bu_t = L[u] \equiv pu_{xx} + qu_x + ru, \tag{10}$$

① “脉冲”这个词常用来描述瞬时现象.

其中 $a, b, p, q, r$ 是在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的 $x$ 的连续函数, 并满足下列诸条件:

$$p > 0;$$

$$\begin{cases} a > 0, \text{在双曲型情形下}, \\ a = 0, b > 0 \text{在抛物型情形下}. \end{cases}$$

现要求微分方程 (10) 在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上及对于时间 $t > 0$ 的一个解 $u(x, t)$, 使之满足初始条件

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = \phi(x), \\ &u_t(x, 0) = \psi(x)(\text{在双曲型情形下}) \end{aligned} \tag{11}$$

以及边界条件

$$\begin{aligned} &u(0, t) = f(t), \\ &\rho u_x(l, t) + \lambda u_t(l, t) = \sigma u(l, t). \end{aligned} \tag{12}$$

这里 $\phi(x), \psi(x)$ 及 $f(t)$ 是预先指定的函数, $\rho, \lambda, \sigma$ 是指定的常数.

特别地, 要考察 $\phi = \psi = 0$ 时的情形, 这是一种最重要的情形, 即在 $t = 0$ 时整个系统处于静止状态的情形①(本来意义下的瞬态问题).

### 5″.1.3 Duhamel 积分

这样选定了初始条件之后, 即在双曲型的情形下选定 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, 在抛物型情形下选定 $u(x, 0) = 0$, 就容易把一般问题 I 化为有特殊函数 $f(t)$ 的问题 (见第 3 章 3.4). 注意到, 既已假定各系数不依赖于 $t$, 则 $u_t, u_{tt}, \cdots$ 等导数 (如果它们存在或能适当加以规定) 就是相应于“力”$f'(t), f''(t), \cdots$ 的解.

引入一个解 $U(x, t)$, 它适合间断的边界条件

$$U(0, t) = f(t) = \begin{cases} 1, & \text{当} t \geqslant 0, \\ 0, & \text{当} t < 0 \end{cases}$$

以及给定的初始条件

$$U(x, 0) = 0,$$

并假定带 $0 \leqslant x \leqslant l, t > 0$ 内每一有界域可分为有限个闭子域, 使其上 $U$ 及其高达二阶的导数为连续. 这个函数 $U$ 可定义为或者它是适合边界条件

$$f(t) = \begin{cases} t^2/2, & \text{当} t \geqslant 0, \\ 0, & \text{当} t < 0 \end{cases}$$

的一个解 $U_2(x, t)$ 对时间的二阶导数, 或者干脆用广义函数或分布概念 (见第 6 章 6.3 及附录) 来定义 $U$.

① 如在第 3 章 3.8 中所见过的, 一般情形总可以用形式方法化为这种情形.

这样就有 Duhamel定理：若 $f(t)$ 及其导数 $f'(t)$ 在 $t>0$ 时分段连续，则 Duhamel 积分

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

是以 (12) 为边界条件的问题 I 的解.

函数 $U(x,t)$ 无需处处连续, 这是可用实例说明的. 事实上, 必须明确 $U$ 有间断性, 因边界条件 $U(0,t)=1$ 及初始条件 $U(x,0)=0$ 的意思就是说在 $x=0$ 点及 $t=0$ 时出现一个脉冲, 它把数值 $U=(0,0)=0$ 一下子增大到数值 1. 这就立刻给出 Duhamel 积分 (13) 的直观意义.

把“力”$f(t)$(在区间左端) 的效应想象为出现在时刻 $\tau_0=0,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 的一些个别脉冲, 每一脉冲使数值 $u(0,\tau_{\nu-1})$ 跃增 $f(\tau_\nu)-f(\tau_{\nu-1})$. 若 $U(x,t)$ 是上述定义的特解, 则相应于这些脉冲的解 $u(x,t)$ 可以合起来写成下列形式：

$$u(x,t)=\sum_{\nu=0}^{n}U(x,t-\tau_\nu)[f(\tau_{\nu+1})-f(\tau_\nu)]+U(x,t)f(0)\quad(\tau_{n+1}=t).$$

若假定 $f(t)$ 在 $t>0$ 时连续可微但 $f(0)$ 可异于零 —— 这相当于 $t=0$ 时出现有限的跃度, 且若令每段时间趋于零而取极限, 便得到解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=U(x,t)f(0)+\int_0^t U(x,t-\tau)f'(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{13a}$$

与 (13) 所得结论一致.

可以不用这一启发性论证, 而不难根据一个恒等式来直接验证. 这一恒等式是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=&U(x,t)f(0)+U_1(x,t)f'(0)\\&+U_2(x,t)f''(0)+\int_0^t U_2(x,t-\tau)f'''(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

这恒等式成立, 因 $U_2(x,0)=U_1(x,0)=0$, 这里 $U_1(x,t)$ 是在边界条件

$$f(t)=\begin{cases}t, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

下的解. 由此恒等式可知微分方程和 $U,U_1,U_2$ 在 $x=l$ 的边界条件为 $u(x,t)$ 所满足. 至于 $u$ 的初始条件则由下一事实得出：微分方程与条件 $U_2(x,0)=U_1(x,0)=0$ 蕴含 $U(x,0)=U_t(x,0)=0$. 最后, 因 $U(0,t)=1$, 故 (13a) 蕴含 $u(0,t)=f(0)+\int_0^t f'(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$. 所以 (12) 的第一个边界条件成立.

Duhamel 积分公式 (13) 可以看做是这样一个线性算子 $T$ 的表示式, 它把给定的边界值 $f(t)$ 变换为解 $u(x,t)$; 即 (13) 表示 $u=Tf$. 但是 Duhamel 积分公式不仅对所论微分方程的求解算子 $T$ 成立, 而且对满足以下条件的一切线性算子都成立①.

1) 算子 $T$ 对所有这样的函数 $f(t)$ 有定义: $f(t)=0$ 当 $t<0$, 而且 $T$ 把 $f(t)$ 变换为函数 $Tf(t)$, 它在 $t<0$ 时也等于零 ($Tf(t)$ 除依赖 $t$ 之外可能还依赖于其他变量 $x,\cdots$)②.

2) $T\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t,\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2} Tf(t,\tau)\mathrm{d}\tau$, 这里 $\tau$ 是参数.

3) 若 $f(0)=0$ 且 $f(t)$ 可微, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Tf(t))=T\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}.$$

4) 若 $Tf(t)=\phi(t)$, 则对任何 $\tau>0$

$$Tf(t-\tau)=\phi(t-\tau).$$

要证明 (13), 只需把 $f(t)$ 表成如下形式就行了.

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\infty}\eta(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

这里

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & \text{当}t\geqslant 0,\\ 0, & \text{当}t<0.\end{cases}$$

因此, 再由条件 1), 2), 3) 及 4), 可得

$$Tf(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\infty}T\eta(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{t}U(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

这里

$$U=T\eta.$$

可以看出, 条件 1), 2), 3), 4) 主要刻画了 Duhamel 积分所表示的那一类线性算子.

① 这段话来自本书德文原著俄译本的附注.
② 函数对其他这些变量的依赖关系不表为显式.

### 5″.1.4 实验解叠加法

在第 3 章 3.7.1 中讨论初值问题时, 用了 Fourier 积分的方法, 也就是用了指数函数所表示的解的叠加法; 这方法经适当改变后也能用来解瞬态问题. 这里仍限于作启发性的论证, 而以 5′.3 的一个存在定理来完成它. 考察对 $u(0,t)=0, u(x,0)=u_t(x,0)=0$ 的特殊问题, 并求出 5″.1.3 中所讨论的那个函数 $U(x,t)$. 先构造微分方程 (10)

$$au_{tt}+bu_t=L[u]$$

的特解, 使之具有形式

$$u=\mathrm{e}^{\gamma t}v(x,\gamma)\quad(\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta).$$

于是得出对 $v$ 的常微分方程

$$L[v]=(a\gamma^2+b\gamma)v, \tag{14}$$

这里 $\gamma$ 作为一个参数出现. 若在终点 $x=l$ 给 $v$ 加上边界条件

$$\rho v_x=(\sigma-\lambda\gamma)v, \tag{15}$$

则 $u=v(x,\gamma)\mathrm{e}^{\gamma t}$ 显然满足边界条件 (12) 中所给的第二个条件

$$\rho u_x+\lambda u_t=\sigma u.$$

对于具有不同参数 $\gamma$ 的这类解的任何线性组合, 情况也一样. 现把这些解叠加, 设法使之满足边界条件 $t>0$ 时 $u(0,t)=1$ 及初始条件 $u(x,0)=0, u_t(x,0)=0$.

为此, 假定 $v$ 及其有关导数是复参数 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 在上半平面 $\alpha>0$ 上的解析函数. 沿复变量 $\gamma$ 右上半平面内的一条路线 $L$ 积分, 得到微分方程 (10) 的满足边界条件 (12) 中第二个条件的新解. 这些新解的形式是

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma. \tag{16}$$

在 $x=0$ 处有

$$u(0,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{v(0,\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}\gamma,$$

现在的问题是怎样选取积分路线 $L$ 以及可能有的边界值 $v(0,\gamma)$, 以使

$$u(0,t)=1,\quad 当t>0,$$

$$u(0,t)=0,\quad 当t<0.$$

若设

$$v(0,\gamma)=1 \tag{15a}$$

并假定 $L$ 是复变量 $\gamma$ 的右上半平面 $(\alpha>0)$ 中平行于虚轴的任一直线, 则 $x=0$ 处的边界条件可以满足. 选定了这些之后, 得积分

$$u(0,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma}\mathrm{d}\gamma=\frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\mathrm{d}\beta, \tag{17}$$

根据初等定理, (17) 中的积分对一切 $\alpha\neq 0, t\neq 0$ 收敛. 由于平行于实 $\alpha$ 轴一段有限长 $l_2-l_1$ 直线上的积分 $\int_{l_1+\mathrm{i}\beta}^{l_2+\mathrm{i}\beta}\frac{\mathrm{e}^{rt}}{\gamma}\mathrm{d}\gamma$ 随 $|\beta|$ 的增大而趋于零, 故知积分 (17) 并不依赖于 $\alpha$. 这是通常从 Cauchy 积分定理得出的结果 (见图 5″-3). 故若令 $\alpha$ 无限增大, 则立即可知 $t<0$ 时方程 $u(0,t)=0$ 成立, 对 $t>0$ 的情形, 应用 Cauchy 积分定理并考察 $\gamma=0$ 的留数, 得等式：

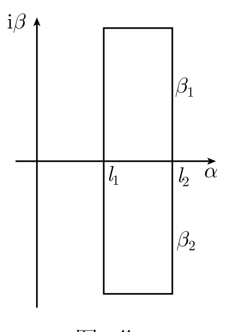



图 5″-3

$$u(0,t)=1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\alpha}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma}\mathrm{d}\gamma,$$

这里 $\alpha$ 是任意负数. 令 $\alpha\to-\infty$ 取极限, 得 $t>0$ 时 $u(0,t)=1$.

所以看来表达式

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}\gamma \tag{18}$$

很可能是方程 (10) 的解. 附带指出, 不能总指望这积分绝对收敛, 因对于给定的 $x, U(x,t)$ 一般对 $t$ 有间断. 但这一缺点可用以下方法来克服, 对足够大的 $n$ 考察表达式

$$U_n(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{n!}\int_L\frac{v(x,\gamma)}{\gamma^{n+1}}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma,$$

这在 $t>0$ 时相当于初始函数 $f(t)=t^n/n!$ 而在 $t<0$ 时相当于 $f(t)=0.U_n(x,t)$ 的这种表示式对大的 $n$ 肯定收敛并易于证明就是瞬态问题的解. 于是就可通过对 $t$ 微分而得 $U$. 这些初步讨论目前还是启发性的, 以后在 5″.3 中还要从略微不同的观点重新提出.

## 5″.2 Heaviside 算子法

Heaviside 符号方法在实践上比之于 5″.1.4 的方法有很大优点. 它的严格道理可以根据 5″.1 及 5″.3 给出的概念来论证. 它的好处是将求解的形式计算与数学内容的意义脱离关系. 这一脱离就有可能使符号方法得出的结果暂时无需有什么实际意义. 而且符号算子的结果还可以事先列表备查. 这样就可在许多应用问题上, 除了形式计算之外, 避免由数学内容引起的难点.

这种形式算法的基本思想是考察那个把解 $u$ 与所给边值函数联系起来的线性泛函算子, 而不去直接求 5″.1.2 中微分方程的解 $u(x,t)$. 这里仍限于讨论本来意义

下的瞬态问题, 即在 $t=0$ 时整个系统处于静止状态的那种问题.

### 5″.2.1 最简单的算子

这方法的基础是引入代表互逆运算的微分法算子 $p$ 和积分算子 $p^{-1}$. 考察对 $t>0$ 的时间变量 $t$ 的函数 $f(t)$(可规定它在 $t<0$ 时恒等于零而加以延续), 并以

$$p^{-1}f(t)=g(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

来定义积分算子 $p^{-1}$. 若记 $p$ 为微分算子, 使

$$pg(t)=f(t)=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

则以性质

$$pp^{-1}=p^{-1}p=1 \tag{3}$$

为基础可建立一套运算方法, 其运算规则与代数运算规则相当. 为保证这种“相逆”关系确定存在, 必须外加一个限制性很强的条件: 算子 $p$ 只能使用在适合 $g(0)=0$ 的那种函数 $g(t)$ 上. 否则将有

$$p^{-1}pg=\int_0^t \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=g(t)-g(0),$$

$$pp^{-1}g=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau=g(t),$$

于是

$$p^{-1}pg\neq pp^{-1}g.$$

然而算子 $p^{-1}$ 却不像算子 $p$, 它能用在任意的连续函数上. 今若

$$Q(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$$

是任一 $m$ 次多项式, 则可按显见的方式来定义有理积分算子 $Q(p^{-1})$, 并将它施之于任一函数 $f$. 相应的算子 $Q(p)$ 定义为 $m$ 阶线性微分算子, 但只能施行在这样的函数 $f$ 上, 即 $f$ 及其直到 $m-1$ 阶为止的导数都必须在 $t=0$ 时等于零.

若

$$P(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_n\lambda^n$$

是另一 $n$ 次的多项式, 且若 $Q(0)=a_0\neq 0$, 则

$$R(p^{-1})=P(p^{-1})/Q(p^{-1}) \tag{4}$$

叫做分式正则有理算子.

$$R(p^{-1})f(t)=g(t)$$

这一算子可用各种方式来定义.

1) 若所给函数 $f$ 在 $t>0$ 时是分段连续的, 则可认为 $g$ 是下列微分方程的解

$$a_0g^{(m)}+a_1g^{(m-1)}+\cdots+a_mg=\phi^{(m)}, \tag{5}$$

这里

$$\phi=P(p^{-1})f.$$

这个解 $g$ 可唯一确定, 如若要求它满足以下初始条件：

$$\begin{gathered}a_0g(0)=\phi(0),\\ a_0g'(0)+a_1g(0)=\phi'(0),\\ a_0g''(0)+a_1g'(0)+a_2g(0)=\phi''(0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_0g^{(m-1)}(0)+a_1g^{(m-2)}(0)+\cdots+a_{m-1}g(0)=\phi^{(m-1)}(0).\end{gathered} \tag{6}$$

2) $g$ 可以这样来确定：把有理函数

$$P(\lambda)/Q(\lambda)=R(\lambda)$$

在原点附近展为 $\lambda$ 的幂级数

$$R(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\lambda^\nu,$$

不难看出相应的级数

$$R(p^{-1})f=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu p^{-\nu}f(t)$$

对 $t$ 的一切正值收敛, 其结果与以前所定义的函数 $g(t)$ 一样.

若系数 $a_0=0$, 则有理算子就叫非正则的, 并可表示为

$$p^kR(p^{-1})$$

这种形式, 而这里 $R$ 是正则的. 要把这样的算子用于函数 $f$, 就必须假定 $f$ 满足条件 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$.

显然, 可以按代数法则对这些算子作有理运算. 对这些算子, 5″.1 的 Duhamel 表示式得出：若定义 Heaviside“单位函数”$\eta(t)$ 为

$$\eta(t) = 1, \quad \text{当} t \geqslant 0,$$

$$\eta(t) = 0, \quad \text{当} t < 0,$$

且若对一算子 $T$, 关系式①

$$T\eta(t) = H(t) \tag{7}$$

成立, 则对于一任意函数 $f(t)$ 有

$$Tf(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t H(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

要使运算微积成为一种有用的工具, 重要的一点是不仅要对 $p$ 的有理函数作出解释, 而且要对 $p$ 的更一般的函数作合适的解释, 以使代数法则、Duhamel 原理及其他一些法则 (以下即将介绍) 对范围扩大了的算子都能适用.

### 5″.2.2　算子实例及应用

本小节要讨论一些简单算子, 并指出如何把它们用于解微分方程.

1) 算子

$$T = \frac{1}{1+\alpha p^{-1}}$$

可得出

$$T\eta = \mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad Tf(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-r)}f(\tau)\mathrm{d}\tau = g(t),$$

这里 $g$ 是微分方程 $g' + \alpha g = f'$ 在条件 $g(0) = f(0)$ 下的解.

2) 算子

$$T = \frac{1}{1+\nu^2 p^{-2}}$$

可得出

$$T\eta = \cos\nu t, \quad Tf = g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \cos\nu(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这里 $g$ 是微分方程

$$g'' + \nu^2 g = f''$$

在初始条件

$$g(0) = f(0), \quad g'(0) = f'(0)$$

① 单位函数 $\eta(t)$ 在文献中往往不明显写出. 那里算子符号 $T$ 就直接表示函数 $T_\eta$. 但有时若要表明定义于 $t > 0$ 的函数 $f(t)$ 是要延续到对 $t < 0$ 取零值的, 那就往往把 $f(t)$ 写成 $f(t)\eta(t)$.

下的解.

3) 考虑常系数非齐次线性微分方程

$$a_0u^{(m)}+a_1u^{(m-1)}+\cdots+a_mu=f(t), \tag{9}$$

它的解需满足初始条件

$$u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(m-1)}(0)=0, \tag{9a}$$

在这些初始条件之下, 可把微分方程 (9) 写为符号形式

$$Q(p)u=f(t) \qquad (Q(\lambda)=a_0\lambda^m+\cdots+a_m),$$

它的解可用符号形式得出

$$u(t)=\frac{1}{Q(p)}f(t), \tag{10}$$

若代数方程

$$Q(\lambda)=0$$

有 $m$ 个不同的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\neq 0$, 则可以用部分分式非常合理地解释这个解. 由

$$\frac{1}{pQ(p)}=\frac{c_0}{p}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{c_\nu}{p-\alpha_\nu},$$

得

$$u(t)=\frac{1}{Q(p)}f(t)=c_0f(t)+\sum_{\nu=1}^{m}c_\nu\frac{p}{p-\alpha_\nu}f(t).$$

在

$$f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\eta(t) \quad (\mathrm{i}\omega\neq\alpha_\nu)$$

的特殊情形下, 可以不用 Duhamel 积分, 而用下列甚至还要精美的方法来实现这算子所代表的运算.

把 $f(t)$ 写成

$$f(t)=\frac{p}{p-\mathrm{i}\omega}\eta,$$

得

$$u=\frac{p}{L[p]}\eta,$$

上式中 $L[p]$ 是一种缩写, 它表示

$$L[p]=(p-\mathrm{i}\omega)Q=a_0(p-\alpha_1)\cdots(p-\alpha_m)(p-\mathrm{i}\omega).$$

$p/L[p]$ 这个有理算子可写成如下形式：

$$\frac{p}{L[p]}=\frac{d_0p}{p-\mathrm{i}\omega}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{d_\nu p}{p-\alpha_\nu},$$

这里, 部分分式中的各系数由

$$d_0=\frac{1}{Q(\mathrm{i}\omega)},\qquad d_\nu=\frac{1}{a_\nu-\mathrm{i}\omega}\frac{1}{Q'(\alpha_\nu)}$$

给出, 利用第一个例子的结果, 立即得出所要求的解

$$u=d_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\sum_{\nu=1}^{m}d_\nu\mathrm{e}^{\alpha_\nu t}. \tag{11}$$

系数 $d_0$ 在应用上当然是最重要的.

4) 再一个例子是“奇异算子”

$$p^{\frac{1}{2}},\quad p^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

如果要把算子的种数前后一致地扩充起来, 就必须按以前的法则来定义这两个算子. 分数阶的微分法与积分法理论提示这样来定义：

$$\begin{aligned}&p^{-\frac{1}{2}}\eta=2\sqrt{t/\pi},\ p^{-\frac{1}{2}}f(t)=(2/\sqrt{\pi})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\sqrt{t-\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\\&p^{\frac{1}{2}}\eta=1/\sqrt{\pi t},\ p^{\frac{1}{2}}f(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{13}$$

容易验证, 这定义确实符合要求

$$p^{-\frac{1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}\eta=p^{-1}\eta.$$

同样的定义也可从观察如下事实的结果得出：方程 $p^{-n}\eta=ct^n$ 成立 $\left(c=\dfrac{1}{n!}\right)$. 所以有可信的理由来写出

$$p^{-\frac{1}{2}}\eta=c\sqrt{t},$$

但这里的常数 $c$ 必须另行合适地确定. 如果要求 Duhamel 原理及关系式

$$p^{-\frac{1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}\eta=p^{-1}\eta=t$$

得到满足, 就会有

$$t=c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\sqrt{t-\tau}\sqrt{\tau}\mathrm{d}\tau=2c^2t\int_0^1\sqrt{1-\tau}\sqrt{\tau}\mathrm{d}\tau=c^2\frac{\pi}{4}t,$$

于是

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

这样就确定了常数 $c$, 与 (13) 相符.

5) 一个极重要的非有理算子是指数算子, 它是用定义

$$\mathrm{e}^{-hp} f(t) = f(t-h) \tag{14}$$

引入的, 其中 $h$ 为常数. 这是从 $\mathrm{e}^{-hp}$ 和 $f(t-h)$ 的 Taylor 级数启示得出的. 不过这一可信的理由不能作为充分的论据, 因为算子的定义不能依赖于它所施函数 $f(t)$ 的解析性质. 这个定义之所以合理毋宁说是因为由它可得出关系式

$$\mathrm{e}^{-hp}\mathrm{e}^{-kp} f(t) = \mathrm{e}^{-(h+k)p} f(t)$$

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\mathrm{e}^{-hp} f(t) = -p\mathrm{e}^{-hp} f(t);$$

而后一式则等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} f(t-h) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t-h).$$

6) 现考察算子

$$\mathrm{e}^{-h\sqrt{p}}, \tag{15}$$

其中 $h<0$. 这算子的意义将在 5″.2.5 中解释. 这里只指出：若假定算子能对参数 $h$ 微分, 则由 $\mathrm{e}^{-h\sqrt{p}} f = g$, 得方程

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -\sqrt{p}\mathrm{e}^{-h\sqrt{p}} f.$$

当参数值 $h=0$ 时, 可望从下式给出函数 $\partial g/\partial h$ 的值：

$$\left.\frac{\partial g}{\partial h}\right|_{h=0} = -\sqrt{p} f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

这例子说明算子方法之直截了当.

7) 作为这方面的最后一个例子, 如下讨论 Heaviside 位移原理.

若 $T = \varPhi(p)$ 为一算子而 $k$ 为一常数, 则可给出算子 $\varPhi(p+k)$ 为

$$\varPhi(p+k) = \mathrm{e}^{-kt}\varPhi(p)\mathrm{e}^{kt}. \tag{17}$$

这对一切有理正则算子都可立即证明. 先用 $n$ 推到 $n+1$ 归纳法 (或称数学归纳法) 证明位移原理对算子 $1/p^n$ 成立. 于是就对一切有理正则算子都成立, 因其都能表

为 $1/p$ 的幂级数. 现作为一个可信的公式来引入对非正则算子的位移原理. 例如, 定义

$$\sqrt{p+\alpha^2}f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}\sqrt{p}\mathrm{e}^{\alpha^2 t}f(t)=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{\alpha^2\tau}f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau, \tag{18}$$

特别地,

$$\begin{aligned}\sqrt{p+\alpha^2}\eta(t)&=\frac{\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{\alpha^2\tau}}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\alpha^2 t}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned} \tag{19}$$

要充分证明这些非正则算子的合理性, 需先证明它们的引入符合初等代数计算法则. 这一证明将在 5″.2.5 中给出.

### 5″.2.3 应用于传热问题

下面把算子方法用于几个典型例子.

考察半无穷区间上的传热方程

$$u_t-u_{xx}=0 \tag{20}$$

设初始条件与边界条件为

$$u(x,0)=0,$$

$$u(0,t)=f(t),\quad u(\infty,t)=0.$$

需要有这样一个算子 $T=T(x)$(依赖于参量 $x$), 使之能把所给函数 $f(t)$ 变换为待求的解 $u(x,t)$. 把微分方程写成形式

$$(T_{xx}-pT)f=0, \tag{21}$$

并把边界条件写成形式

$$T(0)=1,\quad T(\infty)=0.$$

假设对于负的 $t$ 这些函数值是零, 则在 (21) 中

$$u_t=pTf$$

时, 初始条件已经包含在内. 把微分方程

$$T_{xx}-pT=0$$

中的 $p$ 当做参数看待, 立即得到解

$$T = \mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}. \tag{22}$$

现在要问：怎样来解释这个符号式子的意义? 式子

$$\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}\eta, \quad \mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}f(t)$$

表示什么函数? 这里至少可以给出直接与应用有关的部分回答：按通常法则对 $T$ 进行运算, 可求出在端点 $x=0$ 处的传热率, 也就是可求出 $u_x(0,t)$ 的显式. 应用 5″.2.2 中 6) 的结果, 得

$$u_x(0,t) = T_x(0)f = -\sqrt{p}f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau.$$

符号运算方法的主要优点之一在于其无需用易于表达的函数来完全解释算子的意义, 而有可能得出部分结果.

同样可以处理更一般的传热方程 $u_t - u_{xx} + a^2u = 0$, 其中规定 $x$ 在区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上, 而初始条件与边界条件同前. 对于给出解 $u(x,t) = T(x)f(t)$ 的算子 $T(x)$, 满足下列符号微分方程：

$$T_{xx} = (p+\alpha^2)T. \tag{23}$$

此方程在边界条件

$$T(0) = 1, \quad T(\infty) = 0$$

之下的符号解是

$$T = \mathrm{e}^{-x\sqrt{p+\alpha^2}}. \tag{24}$$

这算子比起前例的算子来更难于完全解释. 但仍能回答问题的重要部分; 能求得 $u_x(0,t)$ 的关系式

$$u_x(0,t) = T_x(0)f = -\sqrt{p+\alpha^2}f = -\frac{\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{\alpha^2}\tau f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau,$$

这右边的式子得自 5″.2.2 中 4).

在单位函数 $f=\eta$ 的特殊情形下, 得

$$u_x(0,t) = -\frac{2\mathrm{e}^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\alpha^2 t}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right). \tag{25}$$

### 5″.2.4 波动方程

5″.1.1 中讨论过的简单瞬态问题也可用运算微积来说明. 考察在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上解微分方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{26}$$

的问题. 其初始条件和边界条件是

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad u_x(l,t) = 0.$$

设

$$u(x,t) = T(x)f.$$

得到关于算子 $T$ 的微分方程

$$T_{xx} - p^2 T = 0 \tag{27}$$

及其应满足的条件

$$T(0) = 1, \qquad T_x(l) = 0.$$

这样就得出符号式

$$T(x) = \frac{\cosh p(l-x)}{\cosh pl} = \frac{\mathrm{e}^{-px} + \mathrm{e}^{-p(2l-x)}}{1 + \mathrm{e}^{-2pl}}, \tag{28}$$

或展开后得

$$T(x) = \mathrm{e}^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [\mathrm{e}^{-p(x+2\nu l)} - \mathrm{e}^{-p(2\nu l - x)}].$$

依据 5″.2.2 中各例, 解释这个算子就很简单. 有

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum (-1)^{\nu} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)], \tag{29}$$

与 5″.1.1 所得结果相符.

5″.1.1 讨论的另一问题 (有固定终点的问题 (a)) 当然也可以同样解出. 相应的算子取

$$T(x) = \frac{\sinh p(l-x)}{\sinh pl} \tag{30}$$

或

$$T = \mathrm{e}^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mathrm{e}^{-p(x+2\nu l)} - \mathrm{e}^{-p(2\nu l - x)}].$$

于是

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \tag{31}$$

### 5″.2.5 运算微积的理论根据. 其他一些算子的解释

运算微积可以严格论证. 先给出这些算子的一般定义, 然后依据这定义验证所规定的运算法则、位移定理以及 Duhamel 原理都正确. 还要验证这定义与以前所给各定义相符.

在 5″.1.4 的讨论启发之下, 可得出如下定义.

设 $F(\gamma)$ 是变量 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 在半平面 $\alpha>\alpha_0$ 上的正则解析函数. 设 $L$ 是半平面 $\alpha>\alpha_0$ 里平行于虚轴的任一直线; 或者, 若 $\alpha_0<0, L$ 是一条有缺口的路线, 形状如图 5″-4 所示. 那么, 倘若积分 $(1/2\pi\mathrm{i})\int_L [F(\gamma)/\gamma]\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma$ 存在且对一切 $t>0$ 不取决于 $L$的选择, 可定义

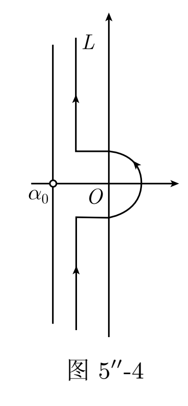


图 5″-4

$$F(p)\eta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{F(\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma,$$
$$F(p)f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{F(\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}\gamma. \tag{32}$$

保证 (32) 的积分存在的一个充分条件是, 如存在这样一个取正值的函数 $\varPhi(\rho)$, 使

$$\int_0^\infty \varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

收敛, 并使所有 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$(其中 $\alpha\geqslant\alpha_0+\delta(\delta>0)$) 满足不等式

$$\left|\frac{F(\gamma)}{\gamma}\right|\leqslant\varPhi(|\beta|).$$

这样, 就可在 (32) 的第二个积分的积分号下对 $\tau$ 积分. 从而, 若设

$$D(\gamma,t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\mathrm{d}\tau,$$

就有

$$F(P)f=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_L\frac{F(\gamma)}{\gamma}D(\gamma,t)\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma.$$

对这样定义的算子, 运算法则的正确性由乘法定理

$$F(p)G(p)=FG(p) \tag{33}$$

得到保证. 或者乘法定理可描述为相继施行两个算子 $F$ 及 $G$ 所得的结果, 也可由施行一个算子——相应于乘积函数的算子 $FG$ 而得出.

只要对单位函数 $\eta(t)$ 来证明此定理就够了. 证明时, 关于函数 $F$、$G$ 以及以下的假定①: 在每一半平面 $\alpha > \alpha_0 + \delta$ 上存在一取正值的函数 $\psi(\rho)$, 使积分 $\int_0^\infty \psi^2 \mathrm{d}\rho$ 收敛且使在这半平面上处处有

$$|F| \leqslant \psi(|\beta|), \quad |G| \leqslant \psi(|\beta|).$$

这样, 积分

$$\int_1^\infty \frac{\psi}{\rho}\mathrm{d}\rho \quad 及 \quad \int_1^\infty \frac{\psi^2}{\rho}\mathrm{d}\rho$$

也存在 —— 第一个积分之所以存在是因为有 Schwarz 不等式

$$\int_1^\infty \frac{\psi}{\rho}\mathrm{d}\rho \leqslant \sqrt{\int_1^\infty \psi^2 \mathrm{d}\rho}\sqrt{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2}}.$$

于是相应于函数 $F, G, FG$ 的积分 (32) 绝对收敛. 今若设

$$f(t) = G(p)\eta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{G(\delta)}{\delta}\mathrm{e}^{\delta t}\mathrm{d}\delta$$

及

$$D(\gamma, t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{G(\delta)}{\delta}\frac{\mathrm{e}^{(\delta-\gamma)t} - 1}{\delta - \gamma}\mathrm{d}\delta,$$

便得

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}D(\gamma, t)\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma.$$

基于所假设条件, 易见积分号下求导所得积分总在区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 (t_1 > 0)$ 上一致收敛, 故有

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\mathrm{d}\gamma \int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta}\frac{\delta \mathrm{e}^{\delta t} - \gamma \mathrm{e}^{\gamma t}}{\delta - \gamma}\mathrm{d}\delta.$$

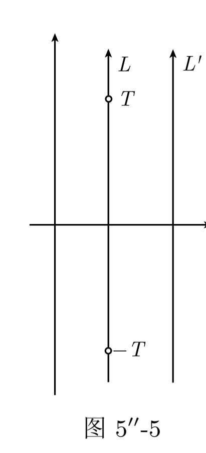


图 5″-5

这里取 $L'$ 为 $L$ 右边平行于 $L$ 的一直线 (见图 5″-5). 因从估算式

$$\left|\int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta(\delta - \gamma)}\mathrm{d}\delta\right| \leqslant \frac{1}{\alpha' - \alpha}\int_{L'} \left|\frac{G(\delta)}{\delta}\right|\mathrm{d}\delta$$

可见前式内积分的第二项随 $\alpha'$ 的增大而变得任意小, 所以积分趋于零. 因而

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\mathrm{d}\gamma \int_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta - \gamma}\mathrm{e}^{\delta t}\mathrm{d}\delta.$$

① 这两个假定对有些重要问题限制得太厉害. 但定理可在弱得多的假定下予以证明. 例如, 可参看 W. von Koppenfels[1].

由所作假定, 可知重积分的积分次序能交换[①]. 得

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{L'} G(\delta)\mathrm{e}^{\delta t}\mathrm{d}\delta \int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\mathrm{d}\gamma.$$

这样, 只待证明关系式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\mathrm{d}\gamma = \frac{F(\delta)}{\delta}$$

就行了. 但这关系式是 Cauchy 积分定理的一个结果.

位移定理也可从积分的复数表示式立即证明其正确性. 若 $F(p)$ 是一给定算子, 从而

$$F(p)\eta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma,$$

于是有

$$F(p+k)\eta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{F(\gamma+k)\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma}\mathrm{d}\gamma = \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma-k}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma.$$

上式即表示

$$F(p+k)\eta = \mathrm{e}^{-kt}F(p)\frac{p}{p-k}\eta.$$

而由于 $\dfrac{p}{p-k}\eta = \mathrm{e}^{kt}\eta$, 故有

$$F(p+k)\eta = \mathrm{e}^{-kt}F(p)\mathrm{e}^{kt}\eta.$$

也容易证明以前各例中所用的定义与现今这积分的定义是等价的. 有[②]

1) $$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma^{n+1}}\mathrm{d}\gamma,$$

其中 $n$ 是个正整数. 积分路线可变形为环绕原点的任一曲线, 所以

$$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\gamma^n}\mathrm{e}^{\gamma t}\right]_{\gamma=0} = \frac{t^n}{n!}.$$

---

① 设 $L_1$ 是直线 $L$ 上在纵坐标 $-T$ 与 $T$ 之间的一段有限区间 (见图 5″-5), 则有

$$FG\eta = \lim_{L_1\to L}\frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{L'} G(\delta)\mathrm{e}^{\delta t}\mathrm{d}\delta\int_{L_1}\frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\mathrm{d}\gamma.$$

于是从估算式

$$\left|\int_{L-L_1}\frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\mathrm{d}\gamma\right| \leqslant \frac{1}{\delta}\sqrt{2\int_T^\infty \psi^2\mathrm{d}\rho}\sqrt{2\int_L\left(\frac{1}{|\gamma|^2}+\frac{1}{|\gamma-\delta|^2}\right)\mathrm{d}\beta}$$

以及积分 $\displaystyle\int_0^\infty \psi^2\mathrm{d}\rho$ 立即得知所作断言.

② 为书写简便, 此后以 $F(p)$ 表 $F(p)\eta$.

2) $$\frac{p}{p+a}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma+a}\mathrm{d}\gamma=\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

3) $$\frac{p}{(p+\alpha)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{(\alpha+\gamma)^{n+1}}\mathrm{d}\gamma=\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{t^n}{n!}.$$

4) $$\sqrt{p}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}\gamma.$$

若将积分变量 $\gamma$ 换为 $\kappa=\sqrt{\gamma}$, 由此得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L'}\mathrm{e}^{\kappa^2}\mathrm{d}\kappa.$$

$\kappa$ 平面里的积分路线 $L'$(参考 5″.3.3) 是任一等轴双曲线的右分支, 故等价于虚轴. 这样就有

$$\sqrt{p}=\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta^2}\mathrm{d}\beta=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

5) $$p^s=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma^{1-s}}\mathrm{d}\gamma=t^{-s}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{r}}{r^{1-s}}\mathrm{d}\gamma.$$

积分值为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{\Gamma(1-s)},$$

故

$$p^s=\frac{t^{-s}}{\Gamma(1-s)}\qquad(s<1).$$

6) $$\mathrm{e}^{-kp}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{(t-k)r}}{\gamma}\mathrm{d}\gamma=\begin{cases}0, & (t<k),\\ 1, & (t>k).\end{cases}$$

7) $$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma^2+a^2}\mathrm{d}\gamma.$$

若把 $L$ 变形为环绕点 $\pm\mathrm{i}a$ 的曲线, 便得

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\mathrm{e}^{\gamma t}\frac{1}{2\mathrm{i}a}\left(\frac{1}{\gamma-\mathrm{i}a}-\frac{1}{\gamma+\mathrm{i}a}\right)\mathrm{d}\gamma=\frac{\sin at}{a}.$$

8) 再举例来解释其他一些算子. 考察

$$\sqrt{p}\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{\gamma}+\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}\gamma.\tag{34}$$

右边的积分容易计算, 有

$$\sqrt{p}\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.\tag{35}$$

对于算子 $e^{-x\sqrt{p}}$ 来说, 不直接计算积分

$$e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma}}}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma,$$

而按下述方法来解释它的意义:

$$e^{-x\sqrt{p}} = \sqrt{p}e^{-x\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}e^{-x\sqrt{p}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}.$$

故有

$$e^{-x\sqrt{p}} = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}d\tau.$$

9) 从公式

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}d\gamma = J_0(at) \tag{36}$$

可得出乘法定理的一个重要应用. 若把算子 $p/(p^2+a^2)$ 分解为乘积

$$\frac{p}{p^2+a^2} = \frac{1}{p}\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

则由 Duhamel 原理得出

$$\frac{p}{p^2+a^2} = \int_0^t J_0(a(t-\tau))J_0(a\tau)d\tau.$$

另一方面, 据 7), 有

$$\frac{p}{p^2+a^2} = \frac{\sin at}{a}.$$

这就得出 Bessel函数积分定理如下:

$$\int_0^t J_0(a(t-\tau))J_0(a\tau)d\tau = \frac{\sin at}{a}.$$

10) 最后, 考察 Abel 积分方程 (参考卷 I 第 3 章 3.10.9)

$$f(t) = \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau \quad (0<\alpha<1), \tag{37}$$

这也就是算子方程

$$pf = \Gamma(1-\alpha)p^\alpha\phi.$$

它的解是

$$\phi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}p^{1-\alpha}f$$

或

$$\phi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau. \tag{38}$$

于是, 因 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin\pi\alpha$, 就有

$$\phi(t) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau, \tag{39}$$

与卷 I 第 3 章 3.10.9 所得结果一致.

## 5″.3 瞬态问题的一般理论

上面 5″.2 中包含算子方法的一些应用而不是完全的理论根据. 值不值得研究出一些一般性定理, 由此依演绎方式来论证这些方法呢? 此问题还是存疑的. 算子方法的引入妙处在于它可以那么容易、那么自然地应用到很不相同的问题上. 要把这些长处都归集到一个包罗万象的定理中, 最后也得有颇为冗长不堪的论述. 这里并不打算完全实行这种尝试, 但是要继 5″.1.4 之后朝这个方向前进一步. 不仅要指明如何论证此方法合理, 还要陈述一个能统辖相当多复杂例子的定理. 讨论基于 Laplace 变换, 这是作同类讨论的常用工具, 特别是被 G. Doetsch 所常用①.

### 5″.3.1 Laplace 变换

如果在 Mellin 积分公式的两个定理中 (参考卷 I 第 2 章 2.10.8), 把变量 $x$ 换成 $\mathrm{e}^{-x}$, 把函数 $g(x)$ 换成 $g(\mathrm{e}^{-x}) = \phi(x)$, 很容易地得出 Laplace 变换. 但是要在稍宽泛些的假定下, 再一次独立地 (用 Fourier 积分定理) 证明 Laplace反演公式.

**定理:** 设复变量 $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$ 的函数 $\phi(s)$ 在复平面的带 $\alpha < \sigma < \beta$ 上是正则解析的. 设在一较窄的带 $\alpha+\delta \leqslant \sigma \leqslant \beta-\delta (\delta > 0$ 可任定) 上给定这样一个取正值的函数 $\varPhi(\rho)$, 使 $\int_0^\infty \varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$ 存在, 并使在该带上处处有

$$|\phi(s)| \leqslant \varPhi(|\tau|) \qquad (s = \sigma + \mathrm{i}\tau). \tag{1}$$

于是, 对于实的 $x$ 以及固定的 $\sigma$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \phi(s)\mathrm{e}^{xs}\mathrm{d}s \tag{2}$$

存在, 且在带 $\alpha < \sigma < \beta$ 上适合方程

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

① 参考 G. Doetsch[1] 及 [2].

**定理：** 若 $\psi(x)$ 对实的 $x$ 是分段光滑函数, 且若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha<\sigma<\beta$ 时绝对收敛, 则由(3)可得反演公式(2).

**推论：** 若 $\beta=\infty$, 从而 $\phi(s)$ 在整个半平面 $\sigma>\alpha$ 上是正则的, 且若 $\phi(s)$ 满足前述各附加条件[①], 则对 $x<0$ 有 $\psi(x)=0$. 因此在此情形下, 有互逆的两个公式

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\phi(s)\mathrm{e}^{xs}\mathrm{d}s,\\ \phi(s)&=\int_{0}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4}$$

先证定理 2. 令

$$\psi_T(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}T}^{\sigma+\mathrm{i}T}\phi(s)\mathrm{e}^{xs}\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{e}^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-T}^{T}\phi(\sigma+\mathrm{i}\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\tau}\mathrm{d}\tau.$$

以

$$\phi=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\xi(\sigma+\mathrm{i}\tau)}\mathrm{d}\xi$$

代 $\phi(\sigma+\mathrm{i}\tau)$, 得

$$\psi_T(x)=\frac{\mathrm{e}^{x_\sigma}}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\sigma\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-x)\tau}\mathrm{d}\xi.$$

因 $\psi(x)\mathrm{e}^{-x\sigma}$ 分段光滑且 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|\mathrm{e}^{-x\sigma}\mathrm{d}x$ 对区间 $\alpha<\sigma<\beta$ 内每一固定的 $\sigma$ 收敛, 故由 Fourier 积分定理 (参考卷 I 第 2 章 2.6.1) 可知积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\sigma\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-x)\tau}\mathrm{d}\xi$$

随 $T$ 的增大而趋于 $\psi(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}$, 故 $\psi_T(x)$ 趋于 $\psi(x)$, 符合所断言.

为证定理 1, 作积分

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{e}^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+\mathrm{i}\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x}\mathrm{d}\tau,$$

在所述假定下, 该积分在区间 $\alpha<\sigma<\beta$ 内绝对收敛.

---

① 特别要指出这样一个条件：对所有 $\sigma\geqslant\alpha+\delta$ 存在一个合适的 $\varPhi(\rho)$.

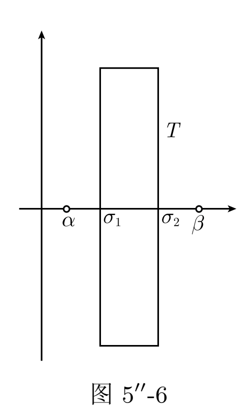


图 5″-6

现证这积分不依赖于 $\sigma$. 在一段平行于实轴的直线上 (这段线有定长 $\sigma_2-\sigma_1>0$ 且全部在带 $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$ 内), 考察积分

$$J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\phi(\sigma+\mathrm{i}T)\mathrm{e}^{x(\sigma+\mathrm{i}T)}\mathrm{d}\sigma.$$

用 Cauchy 积分定理可知, 若当 $T$ 通过一合适的无限增大序列 $|T_1|,|T_2|,\cdots$ 时 $J$ 趋于零 (见图 5″-6), 则 $\psi(x)$ 确定不依赖于 $\sigma$. 而由估算式

$$|J|\leqslant\mathrm{e}^{|x|\sigma_2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|(\sigma+\mathrm{i}T)|\mathrm{d}\sigma\leqslant\mathrm{e}^{|x|\sigma_2}\varPhi(|T|)(\sigma_2-\sigma_1),$$

积分 $J$ 确是趋于零的. 由于积分 $\displaystyle\int_0^\infty\varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$ 存在, 必有一系列数值 $T_1,T_2,\cdots$ 使 $\varPhi(|T|)$ 趋于零.

由方程

$$\psi(x)\mathrm{e}^{-x\sigma}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma-\mathrm{i}\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau x}\mathrm{d}\tau$$

知 $\psi(x)\mathrm{e}^{-x\sigma}$ 是函数 $\phi(\sigma-\mathrm{i}\tau)$(它对 $\tau$ 肯定是分段光滑的) 的 Fourier 变换式. 于是, 因 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\sigma-\mathrm{i}\tau)|\mathrm{d}\tau$ 收敛, 故由 Fourier 反演定理得

$$\phi(\sigma-\mathrm{i}\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-x(\sigma-\mathrm{i}\tau)}\mathrm{d}x,$$

$$\phi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x,$$

如定理 1 所述.

为证推论, 指出在其假设的条件之下, 估算式

$$|\psi(x)|<\mathrm{e}^{x\sigma}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho \tag{5}$$

对一切 $\sigma\geqslant\alpha+\delta$ 以及对一切 $x$ 成立. 若 $x$ 为负, 右边当 $\sigma$ 足够大时变为任意小, 故对 $x<0$ 有

$$\psi(x)\equiv 0,$$

这就是推论中所说结论.

### 5″.3.2　用 Laplace 变换解瞬态问题

现在可以比以前 (参考 5″.1.4) 更一般的形式下来解 5″.1 中的瞬态问题 I, 即使初始状态不是静止状态也行. 此解法依据这样一件事实：问题 I 可化为减少一个

自变量的不同的问题 II. 在 Laplace 变换及其反演的基础上, 这两个问题是等价的, 但在许多情形下第二个问题可以简单地用显式处理, 而第一个问题则不能. 如果使用变换的条件足够宽泛, 则更易包括重要的实际应用.

对问题 I 的解 $u(x,t)$ 加上以下条件：存在一实数 $\alpha_0$ 使函数

$$u(x,t)\mathrm{e}^{-\alpha_0 t}, \quad u_x(x,t)-\mathrm{e}^{\alpha_0 t}, \quad u_{xx}(x,t)\mathrm{e}^{-\alpha_0 t} \tag{6}$$

当 $t$ 无限增大时对 $x$ 一致有界. 在这些条件下, 有关的 Laplace 变换式写为

$$\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}=\frac{v}{\gamma}=\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t,$$

它对 $\mathrm{Re}\,\gamma=\alpha>\alpha_0$ 存在且是半平面 $\alpha>\alpha_0$ 上 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的一个正则解析函数. 根据这些假设, 得到该函数的导数

$$\frac{v_x}{\gamma}=\int_0^\infty u_x\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t,$$
$$\frac{v_{xx}}{\gamma}=\int_0^\infty u_{xx}\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t.$$

从这些条件可推出函数 $u_t, u_{tt}$ 的 Laplace 变换式也存在. 有

$$\int_0^T u_t(x,t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t=u(x,T)\mathrm{e}^{-\gamma T}-\phi(x)+\gamma\int_0^T u(x,t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t.$$

因右边在 $T\to\infty$ 及 $\mathrm{Re}\,\gamma>\alpha_0$ 时收敛, 故左边也收敛, 即有

$$\int_0^\infty u_t\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t=v(x,\gamma)-\phi(x).$$

在双曲型情形 $(a>0)$ 下又可推知

$$\int_0^\infty u_{tt}\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t$$

存在. 得到

$$\int_0^\infty u_{tt}\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t=(v-\phi)\gamma-\psi.$$

又若用 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 乘 5″.1 中微分方程 (10 ) 并对 $t$ 从 0 到 $\infty$ 积分, 则得 $v$ 的非齐次常微分方程

$$L[v]+(a\gamma^2+b\gamma)\phi+a\gamma\psi=(a\gamma^2+b\gamma)v$$

如果初始状态是静止的, 方程就变成齐次的. 相仿地, 得边界条件

$$v(0,\gamma)=\gamma\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t,$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)v + \lambda\gamma\phi(l), \qquad 当 x = l.$$

这就产生自变量 $x$ 及复参数 $\gamma$ 的函数 $v$ 的一个下列常微分方程边值问题.

问题 II：

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\phi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)v, \tag{7}$$

$$v(0,\gamma) = \gamma\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{d}t \tag{7a}$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)v + \lambda\gamma\phi(l), \qquad 当 x = l.$$

设 $f(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是分段光滑的, 积分 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ 对 $\alpha > \alpha_0$ 绝对收敛并设 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上连续.

很容易地得出：若对每一 $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (其中 $\alpha > \alpha_0$) 问题 II 有唯一确定的解, 则相应的问题 I 至多有一个满足条件 (6) 的解. 这结论之所以正确, 是因为在所设条件下 Laplace 变换有唯一反演, 故问题 I 若有两个不同的解则相应问题 II 将有两个不同的解.

但更重要的一件事实证明：可用 Laplace 反演公式从问题 II 的解得出问题 I 的解. 现证明以下定理：设 $v(x,\gamma)$ 是问题 II 的一个解, 它在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上连续且有对 $x$ 的迄二阶为止的连续导数. 对该区间里每一固定的 $x$, 设 $v(x,\gamma)$ 在复数 $\gamma$ 平面的半平面 $\mathrm{Re}\,\gamma \geqslant \alpha_0$ 上处处为正则. 又设在每个半平面 $\mathrm{Re}\,\gamma \geqslant \alpha_0 + \delta$ (若 $\alpha_0 < 0$, 则用一任意小的固定圆把原点除外) 以及每个固定的子区间 $\epsilon \leqslant x \leqslant l$ 上成立不等式

$$\left|\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \varPhi(|\beta|), \tag{8}$$

这里的 $\varPhi$ 应使 $\displaystyle\int_0^\infty \varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$ 存在. 今若由积分

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma \tag{9}$$

所定义的函数 $u$ 在区域 $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0, t^2 + x^2 \geqslant \epsilon > 0$($\epsilon$ 任意小) 上连续且在该区域上具有连续的一阶及二阶导数, 则 $u$ 是相应问题I的解. 这里, 积分路线 $L$ 是半平面 $\alpha > \alpha_0$ 内虚轴的任一平行线, 或 (当 $\alpha_0 < 0$ 时) 是一条有缺口的路线, 如图 5″-4(5″.2.5) 所示①.

先证 $u(x,t)$ 满足微分方程, 这与以后在验证边界条件和初始条件时一样, 在进行所需的求导运算时, 要采用 5″.1 中提过多次的一套办法. 先作辅助函数

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma^3}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma. \tag{10}$$

① 容易证明, 此结果与 5″.1.3 中用 Duhamel 积分表示解的结果相同.

因有假定 (8), 此函数对于 $\epsilon \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$ 可在积分号下对时间 $t$ 二次求导. 特别地, 有

$$\psi_{tt} = u(x,t).$$

另一方面, 由微分方程 (7), 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{L[v]}{\gamma^3}e^{\gamma t}d\gamma$$

在区域 $\epsilon \leqslant x \leqslant l, \epsilon \leqslant t \leqslant T$ 上一致收敛. 由此推出

$$L[w] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{L[v]}{\gamma^3}e^{\gamma t}d\gamma$$

成立[①]. 于是便推得

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2 + b\gamma)v - L[v]]d\gamma.$$

这样, 从微分方程 (7), 得

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[(a\gamma^2 + b\gamma)\phi + a\gamma\psi]d\gamma$$

或

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = a\phi + (b\phi + a\psi)t. \tag{11}$$

若对 $t$ 微分两次 (因已假定 $u(x,t)$ 两次连续可微), 则得 $u$ 的微分方程 $au_{tt} + bu_t = L[u]$, 它对 $0 < x \leqslant l, t > 0$ 上的一切 $x, t$ 成立.

至于 $u$ 在点 $x = 0$ 满足初始条件则可从反演定理以及对 $u(x,t)$ 所假定的在 $t > 0, 0 \leqslant x \leqslant l$ 上的连续性立即推出.

对于辅助函数 $w$, 可推出它在点 $x = l$ 处满足条件

$$\rho w_x + \lambda w_t - \sigma w = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3}[\rho v_x + (\lambda\gamma - \sigma)v]d\gamma$$

---

① 只要验证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{pv_{xx} + qv_x}{\gamma^3}e^{\gamma t}d\gamma = pw_{xx} + qw_x,$$

或由于 $p > 0$, 只要验证

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(Pv_x)x}{\gamma^3}e^{\gamma t}d\gamma = (pw_x)_x$$

成立就够了, 这里已令 $P(x) = \exp\left\{\int_0^x \frac{q}{p}dx'\right\}$. 把以上用积分定义的 $\Omega$ 加以积分, 则见

$$\int_\epsilon^x \frac{dx'}{P(x')}\int_\epsilon^{x'} \Omega dx'' = w(x,t) - w(\epsilon,t) - A(t)\int_\epsilon^x \frac{dx'}{P(x')},$$

这里 $A(t)$ 并不依赖于 $x$. 对最后这一方程求导, 便直接得出 $\Omega = (Pw_x)_x$.

$$= \frac{\lambda\phi(l)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{e}^{\gamma t}}{\gamma^2}\mathrm{d}\gamma = \lambda t\phi(l).$$

故对 $t$ 微分两次后, 得

$$\rho u_x + \lambda u_t - \sigma u = 0.$$

为验证初始条件, 先指出, 由于

$$w(x,0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{v}{\gamma^3}\mathrm{d}\gamma$$

及

$$w_t(x,0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{v}{\gamma^2}\mathrm{d}\gamma,$$

并由所假定的条件 (8), $w(x,0)$ 以及 $w_t(x,0)$ 在 $x>0$ 时都等于零. 事实上, 估算式

$$|w(x,0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^\infty \varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho,$$

$$|w_t(x,0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\infty \varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

成立, 而当 $\alpha\to\infty$ 便得欲证结论. 根据对 $u(x,t)$ 所作假定知 $w$ 及 $w_t$ 以及其迄二阶为止的导数在区域

$$0 < x \leqslant l, \quad t \geqslant 0$$

上连续, 因而当 $t\to 0$ 时 $L[w]$ 及 $L[w_t]$ 都等于零. 方程 (11) 变为

$$a[w_{tt}(x,0) - \phi(x)] = a[u(x,0) - \phi(x)] = 0. \tag{12}$$

微分 (11), 当 $t=0$ 时有

$$a(w_{ttt} - \psi) + b(w_{tt} - \phi) = 0$$

或

$$a[u_t(x,0) - \psi(x)] + b[u(x,0) - \phi(x)] = 0. \tag{13}$$

在 $a\neq 0$ 的情形下推出

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x).$$

而在 $a=0, b\neq 0$ 的情形下, 有

$$u(x,0) = \phi(x),$$

证明完毕.

最后指出, 由于 (8), 关于 $u$ 的估算式

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^{\infty}\varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

对任意的 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 成立. 当 $t<0$, 得

$$u(x,t)=0, \tag{14}$$

而当 $t>0$, 得

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\alpha_0 t}\int_0^{\infty}\varPhi(\rho)\mathrm{d}\rho. \tag{15}$$

这说明原来对函数 $u$ 所作的假定 (6) 确为以上构造的解所满足.

### 5″.3.3 举例. 波动方程与电报方程

用电报方程

$$u_{tt}=u_{xx}-r^2u \quad (r=\text{常数}) \tag{16}$$

为例来说明一种方法. 初始条件是

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0, \tag{16a}$$

边界条件是①

$$\begin{gathered} u(0,t)=\frac{t^3}{3!}, \\ \rho u_x+\lambda u_t=\sigma u, \quad \text{当}x=l. \end{gathered} \tag{16b}$$

有相应的问题 III:

$$v_{xx}=\kappa^2 v, \tag{17}$$

$$v(0,\gamma)=\frac{1}{\gamma^3},$$

$$\rho v_x=(\sigma-\lambda\gamma)v, \quad \text{当}x=l, \tag{17a}$$

这里需设

$$\kappa^2=\gamma^2+r^2.$$

---

① 不构造脉冲函数 $U(x,t)$ 而构造函数 $U_3(x,t)$(参考 5″.1.3) 以保证 (根据 5″.3.2 中的定理) 相应积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L [v(x,\gamma)/\gamma]\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma$$

表示所要求的解. 所说定理中的条件不被属于 $U(x,t)$ 的积分所满足. 但是以后可用算式 $U(x,t)=\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}U_3(x,t)$ 从 $U_3$ 得出 $U$.

解由下式给出：

$$
\begin{aligned}
v(x,\gamma) &= \frac{\rho\kappa\cosh\kappa(l-x)+(\lambda\gamma-\sigma)\sinh\kappa(l-x)}{\rho\kappa\cosh\kappa l+(\lambda\gamma-\sigma)\sinh\kappa l}\frac{1}{\gamma^3}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\kappa x}-\epsilon(\kappa)\mathrm{e}^{\kappa(x-2l)}}{1-\epsilon(\kappa)\mathrm{e}^{-2\kappa l}}\frac{1}{\gamma^3},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

这里的

$$
\epsilon(\kappa) = \frac{\lambda\sqrt{\kappa^2-r^2}-\rho\kappa-\sigma}{\lambda\sqrt{\kappa^2-r^2}+\rho\kappa-\sigma}. \tag{19}
$$

同前所述, 可知存在一 $\alpha_0>0$, 使 (18) 的分母在半平面 $\mathrm{Re}\gamma>\alpha_0$ 内没有零点, 于是 $v$ 在这半平面上处处是正则的. 在半平面 $\mathrm{Re}\,\gamma\geqslant\alpha_0+\delta$ 内虚轴的任一平行线 $L$ 上, 成立不等式

$$
\left|\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \frac{A}{(B+|\beta|)^4},
$$

这里 $A>0$ 与 $B>0$ 是不依赖于 $x$ 和 $\gamma$ 的常数. 由此, 并由对 $v_x/\gamma$ 与对 $v_{xx}/\gamma$ 的相应不等式, 显然可知

$$
U_3(x,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{d}\gamma \tag{20}
$$

表示一个在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 上连续且有连续一阶及二阶导数的函数. 所以此函数就是 (16) 的解.

仍来考察特殊情形①

$$
\begin{aligned}
&u_x(l,t)=0,\quad \epsilon(\kappa)=-1,\\
&u(l,t)=0,\quad \epsilon(\kappa)=1.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

同前所述, 把 $v$ 展成级数

$$
\gamma^3 v(x,\gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\epsilon^{\nu}\mathrm{e}^{-\kappa(x+2\nu l)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\epsilon^{\nu}\mathrm{e}^{\kappa(x-2\nu l)}, \tag{22}
$$

并把此级数代入 (20). 由于对 $t$ 积分显然是可以的, 故得下列形式的级数

$$
U_3(x,t) = S(x,t)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\epsilon^{\nu}[S(2\nu l+x,t)-S(2\nu l-x,t)], \tag{23}
$$

这里的 $S(x,t)$ 规定为下面的积分

$$
S(x,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \exp\left\{-x\sqrt{\gamma^2+r^2}+\gamma t\right\}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^4}, \tag{24}
$$

① 另一重要情形是所谓“匹配” $\epsilon=0$ 的情形, 但只当 $r=0,\sigma=0$ 及 $\lambda=\rho$ 时发生, 在此情形下不出现“反射”波.

当 $r=0$, 容易得出

$$S(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \mathrm{e}^{\gamma(t-x)}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^4}.$$

于是

$$S(x,t)=S(t-x)=\begin{cases}\dfrac{(t-x)^3}{3!}, & \text{当 } t>x,\\ 0, & \text{当 } t<x,\end{cases} \tag{25}$$

因而最后得

$$u_3(x,t)=S(t-x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\epsilon^{\nu}[S(t-x-2\nu l)-S(t+x-2\nu l)], \tag{26}$$

与 5″.1.1 中对特殊情形

$$f(t)=\frac{t^3}{3!}\qquad (t>0)$$

得出的结果相符. 级数 (26) 中只有有限项不恒等于零, 而这些项中的每一项都具有迄二阶为止的连续导数以及分段连续的三阶导数. 所以可用微分法得出函数 $U$(当 $r=0$), 即

$$U(x,t)=\eta(t-x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\epsilon^{\nu}[\eta(t-x-2\nu l)-\eta(t+x-2\nu l)],$$

这里

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

为计算 $r\neq 0$ 时的积分 (24), 用方程

$$\gamma=\mathrm{i}r\cos\phi$$

引入积分变量 $\phi=\sigma+\mathrm{i}\tau$ 代替 $\gamma$. 得

$$S(x,t)=-\frac{1}{2\pi r^3}\int_{L'}\exp\{\mathrm{i}r(\mathrm{i}x\sin\phi+t\cos\phi)\}\frac{\sin\phi}{\cos^4\phi}\mathrm{d}\phi. \tag{27}$$

这里 $L'$ 是直线 $L$ 在 $\phi$ 平面上的象, 即 $L'$ 是图 5″-7 所示的曲线

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}r\cos\phi)=\text{常数}>\alpha_0.$$

若 $t<x$, 则指数

$$\mathrm{i}r(\mathrm{i}x\sin\phi+t\cos\phi)$$

的实部, 即

$$r\sin\sigma(t\sinh\tau - x\cosh\tau) \tag{28}$$

在区域 $0<\sigma<\pi, \tau>0$ 上当 $\tau\to\infty$ 时变为负无穷大. 这样 $L'$ 可收缩为通过该区域的二重直线 (见图 5″-8), 从而

$$S(x,t)\equiv 0 \qquad (t<x). \tag{29}$$

若 $t>x$, 则当区域 $-\pi<\sigma<0, \tau>0$ 内的 $\tau\to\infty$ 时 (28) 变为负无穷大, 于是 $L$ 可拉开成为沿着整个带 $-\pi<\sigma<\pi$ 的曲线 $L''$(见图 5″-9). 由于 (27) 中的被积分式是周斯函数, 得

$$S(x,t)=\frac{1}{2\pi r^3}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{\mathrm{i}r(\mathrm{i}x\sin\phi+t\cos\phi)\}\frac{\sin\phi}{\cos^4\phi}\mathrm{d}\phi, \tag{30}$$

这里用两个朝下开口的半圆把点 $\phi=\pm\pi/2$ 除外.

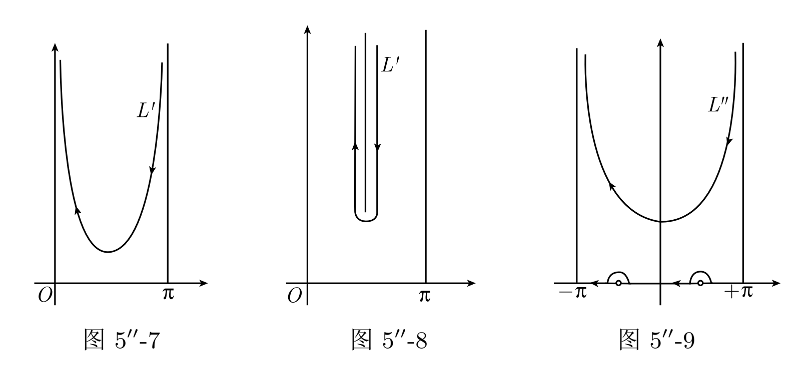



图 5″-7　　图 5″-8　　图 5″-9

现在只要计算函数 (以 $S=-f_x$)

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi r^4}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{\mathrm{i}r(\mathrm{i}x\sin\phi+t\cos\phi)\}\frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^4\phi}, \tag{31}$$

(31) 对 $t$ 的四阶导数可立即得出

$$\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial t^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{\mathrm{i}r(\mathrm{i}x\sin\phi+t\cos\phi)\}\mathrm{d}\phi=J_0(r\sqrt{t^2-x^2}).$$

当 $t=x, f(x,t)$ 及其对 $t$ 的迄三阶为止的导数等于零. 事实上, 若在 (31 ) 中设 $t=x$ 并引入 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 作为积分变量, 则得

$$f(x,x)=\frac{8}{\mathrm{i}\pi r^4}\oint\frac{z^3}{(1+z^2)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rxz}\mathrm{d}z,$$

这里取 $z$ 平面的单位圆为积分路线, 并使路线在 $z=\pm\mathrm{i}$ 处开缺口将这两点除去. 立即得到 $f(x,x)=0$, 同样可推出导数在 $t=x$ 时为零. 于是得

$$f(x,t)=\frac{1}{3!}\int_x^t (t-\tau)^3 J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\mathrm{d}\tau,$$

从而得出最后结果

$$S(x,t)=\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^t \frac{(t-\tau)^3}{3!}J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\mathrm{d}\tau, & \text{当 } t>x, \\ 0, & \text{当 } t<x. \end{cases} \tag{32}$$

在 $r=0$ 的特殊情形, 仍得以前结果

$$S(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(t-x)^3}{3!}, & \text{当 } t>x, \\ 0, & \text{当 } t<x. \end{cases}$$

在 $r\neq 0$ 的情形下, 由 (32) 级数 (33) 中只有有限项不恒等于零, 而每个这样的项具有迄二阶为止的连续导数以及分段连续的三阶导数. 于是, 用微分法得出脉冲函数 $U=\dfrac{\partial^3 U_3}{\partial t^3}$ 的式子

$$U(x,t)=S(x,t)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\epsilon^{\nu}[S(2\nu l+x,t)-S(2\nu l-x,t)], \tag{33}$$

其中设

$$S(x,t)=\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^t J_0(r\sqrt{\tau^2-x^2})\mathrm{d}t, & \text{当 } t>x, \\ 0, & \text{当 } t<x. \end{cases} \tag{34}$$

此函数是问题 (16) 在边界条件 $U(0,t)=1$ 下的解.

还有其他许许多多重要的例子, 请读者参阅文献.

# 第 6 章　多于两个自变量的双曲型微分方程

## 6.0　引　　言

数学物理学中多于两个自变量的双曲型微分方程的理论包罗之广, 即使主要限于讨论线性问题, 在这本书里也不可能作全面的阐述. 本章选取波的传播的观点来讨论这个论题. 在 Cauchy 初值问题与辐射问题的探讨中, 特征面和双特征线 (扰动沿着它们而传播) 起着重要的作用.

在多于两个自变量的情况下, 再用第 5 章中简单的迭代法去构造解是行不通的. 不过, 在适当的特殊情况下, 仍能阐明解的一般结构, 并且给出详尽的分析.

本章将主要处理单个的任意阶方程的 Cauchy 问题和关于几个未知函数的任意阶方程组的 Cauchy 问题. 在较浅近的前两节中, 对单个的二阶方程特别予以注意; 以后各节将着重于一阶对称双曲型方程组. 处理这些方程组比处理一般的高阶方程或方程组可能要简单一些. 重要的是, 数学物理学中几乎所有偏微分方程都以一阶对称双曲型方程组的形式出现 —— 有必要将第 3 章的某些材料以修改的形式重述一下.

本章第一部分专论解的唯一性、存在性、结构与几何问题, 第二部分主要叙述如何用数据表示解和有关的问题.

第一部分中的推导将突出一个基本事实 —— 存在着有限的依赖区域, 解取决于其上的 Cauchy 数据 (关于两个自变量的情况已经在第 5 章中有所论述). 反之, 在第二部分中获得了用“平面波”表达解的明显公式, 同时却冲淡了有限初始依赖区域这一特色.

应当时刻明确, 所有叙述和结论照例都只是针对“小范围”的情况而言的, 然而, 凡有可能时, 都把结论拓展到与所论问题相适应的更大的区域上去.

虽然将主要讨论线性问题, 但是也将充分详尽地指出对于拟线性方程组的推广.

最后回忆一下, 在线性双曲型的问题中, Duhamel 表示式 (参考 3.6.4, 6.10.1 和 6.12.5) 用齐次问题的解表示非齐次问题的解. 所以可以限于主要讨论齐次的初值问题.

将考虑 $n+1$ 个自变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 并以矢量 $x$ 记之. 不过, 常常将变量 $x_0$

别记为时刻 $t$, 并且将自变量记为 $t, x$. 当方便时, 也用诸如

$$a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

之类通常的缩写法.

## 第一部分 解的唯一性、构造、几何性质

# 6.1 二阶微分方程. 特征的几何性质

### 6.1.1 二阶拟线性微分方程

考虑一个二阶拟线性微分方程

$$L[u] + d = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} u_{ik} + d = 0. \tag{1}$$

这里采用了缩写 $u_i = \partial u/\partial x_i$ 和 $u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$. $d$ 和系数 $a_{ik} = a_{ki}$ 都是自变量 $x_0, x_1, \cdots, x_n$、函数 $u$ 和导数 $u_i$ 的已知函数[①]. 如无相反的特别声明, 永远假定所遇到的量在所论的区域上都是连续的.

与第 1 章和第 3 章中所述相同, 特征的概念起源于要把在曲面 $C: \phi(x_0, \cdots, x_n) = 0$ 而 $\text{grad}\ \phi \neq 0$ 上给定的初始数据拓展为 (1) 的一个解[②]. $C$ 上的初始数据包括 $u$ 的值 (它确定了 $u$ 的内导数) 和一个外导数的值, 如 $u_\phi = \sum_{i=0}^{n} u_i \phi_i$. 于是在 $C$ 上 $u$ 的所有一阶导数都被确定了[③].

Cauchy 初值问题的目的是在 $C$ 的某整个邻域内求 (1) 的一个解, 但是仅沿着 $C$ 考虑微分方程时提出的问题要简单得多, 即把初始数据扩充为一个积分带, 即求函数 $u, u_i, u_{ik}$, 使其在 $C$ 上满足 (1)(参考第 3 章 3.6.2). 正是这个简单问题直接导出特征的概念[④].

代替 $x_0, \cdots, x_n$, 引入新的自变量 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$, 其中 $\lambda_n = \phi$ 而 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ 是 $C$ 上的"内变量", 于是可将问题更确切地陈述如下：在 $C$ 上给定了量

$$u(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}), \quad u_\phi(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}), \tag{1a}$$

---

① 在本章中, 受微分算子作用的函数的右下角符号表示求偏导数, 例如, $u_i, \phi_i, \psi_i, \omega_i$, 而已知系数的右下角符号仅表示号码, 例如 $a_{ik}, b_i, C_i$.

② 在本章后边将修改记号但对特征面保留字母 $C$ 和 $\phi$.

③ 对于 $m$ 阶方程, 相应的 Cauchy 数据包括 $u$ 的值和 $u$ 的直到 $m-1$ 阶外导数的值.

④ 全都与第 3 章中的讨论作比较.

要构造一个函数 $u(x_0,\cdots,x_n)$, 使其与其对 $\phi$ 的导数在 $C$ 上与 $\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}$ 的已知函数 (1a) 相同, 并且 $u$ 在 $C$ 上满足 (1).

显然, 借助于量 (1a) 对内变量求导, 利用 $C$ 上的数据可以唯一地确定 $u$ 的除了 $u_{\phi\phi}$ 外的各个二阶导数. 现在来考察是否微分方程 (1) 和初始数据还能够确定量 $u_{\phi\phi}$ 沿 $C$ 的值. 用变量 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n=\phi$ 表达时, 方程 (1) 的形式是

$$u_{\phi\phi}Q(\phi_i)+\cdots=0, \tag{2}$$

其特征形为

$$Q(\phi_i)=Q(\phi_i,\phi_k)=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}\phi_i\phi_k. \tag{3}$$

(2) 中三点表示由初始数据已知其值的表达式, 其中仅包含 $u$ 的内导数和 $u$ 的一阶导数. 所以在 $C$ 的每一个使 (2) 中 $u_{\phi\phi}$ 的系数 —— 二次型 $Q(\phi_i)$ 不等于零的点 $P$ 上, 初始数据唯一地确定了二阶导数 $u_{\phi\phi}$. 于是对于 $C$ 上的每一个点 $P$ 得到了下述的两岐命题：或者微分方程和数据唯一地确定了所有的二阶导数, 包括二阶外导数 $u_{\phi\phi}$, 或者微分方程表示对于数据的附加限制.

以后假定, 对于 (1a) 中的数据来说, 两岐命题在整个曲面 $C$ 上处处都成立. 在第一种情况下, 称初始曲面是自由的(参考第 3 章 3.6.2), 在第二种情况下, 称初始曲面是特征的. 在第二种情况下, 将数据所给的 $u$ 值和 $u_i$ 值代入系数 $a_{ik}$ 之后, 特征条件

$$Q(\phi_i,\phi_k)=Q(\phi_i)=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}\phi_i\phi_k\equiv 0 \tag{4}$$

在 $C$ 上成立.

虽然特征条件 (4) 形式上是 $\phi$ 的一个一阶偏微分方程, 但是函数

$$\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

未必恒满足这个微分方程. 按照定义, 它仅在 $C$ 上一定满足 (4), 即当 $\phi=0$ 时 (4) 才一定成立. 不过, 如果 $C$ 由下列形式给出：

$$x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则 (4) 确表 $n$ 元函数 $\psi$ 的一个偏微分方程

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\psi_i\psi_k-2\sum_{i=1}^{n}a_{i_0}\psi_i+a_{00}=0, \tag{5}$$

其中应以 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的表达式代替系数中的 $x_0$ 和 $u$ 及 $u_i$.

特别地, 若 $a_{00}=-1,a_{i,0}=0(1\leqslant i\leqslant n)$, 且 $a_{ik}$ 与 $x_0=t$ 无关. 则 (1) 化为

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \cdots = 0, \tag{5a}$$

而关于 $\psi$ 的特征偏微分方程是

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \psi_i \psi_k = 1.$$

在物理学中经常遇到这种情况.

对于微分方程 (1) 的一个已知解 $u = u(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, 量 $u$ 和导数 $u_i$ 都是 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数. 用这些函数代替 $a_{ij}$ 中的一切 $u$ 和 $u_i$, 则特征条件 (4) 确定了对于已知解 $u$ 的特征曲面. 如果 (4) 不仅在 $\phi = 0$ 时成立而且是 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的恒等式, 那么 $\phi = c =$ 常数就构成一个依赖于 $c$ 的单参数特征曲面族. 反之, 如果 $\phi = c$ 是上述的一族特征曲面, 则 $\phi$ 必满足作为一阶偏微分方程看待的特征条件 (4).

还有, 方程 (2) 表明, 对于一个特征曲面 $C$: $Q(\phi_i, \phi_k) = 0$ 而言, 二阶微分算子 $L[u]$ 在下述意义上是一个内微分算子：若沿 $C$ 给定函数 $u$ 和导数 $u_i$ 的值, 则知 $L[u]$ 的值. 事实上, $u_i$ 和 $u_\phi$ 的一切内导数值都可以由所给数据推知. 由于二阶外导数 $u_{\phi\phi}$ 在 $u_{\phi\phi}Q$ 的形式中出现而 $Q = 0$, 因而 $L[u]$ 中不含 $u_{\phi\phi}$. 所以在 $C$ 上可将 $L[u] = 0$ 看做关于一阶外导数 $u_\phi$ 的一阶偏微分方程.

如同第 3 章中已经指出过的, 仅当有实函数 $\phi$ 满足条件 (4) 时, 特征曲面才存在; 而这时二次型 $Q(\phi_i)$ 必为不定的. 在本章中将不考虑这样的方程 (如抛物型方程), 即可以用线性变换把它的 $n+1$ 元二次型化为变元较少的类似的形式.

现在假定二次型 $Q$ 不仅是不定的, 并且更进一步假定它的惯性指数是1, 即在每一个考虑的点 $P$ 上, 可以用自变量 $x_i$ 的适当的局部线性变换把 $Q$ 化为如下形式：

$$Q = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \cdots + \Phi_n^2 - \Phi_0^2.$$

在这种情况下称微分方程 (1) 为双曲型的. 它的主要部分在点 $P$ 处用新的自变量表示时具有和波动方程的主要部分相同的简单形式：

$$u_{11} + u_{22} + \cdots + u_{nn} - u_{00}.$$

$n$ 维面元 $\Phi_0 = 0$ 称为类空间的, $\Phi_0$ 轴的方向可以认为是点 $P$ 处的时间轴. 在 6.3 中, 将给出双曲性概念的一个更一般的分析 (参考第 3 章 3.6.2), 它不以 $Q$ 的二次特性为基础.

最简单的例子是上面所给的波动方程

$$u_{11} + u_{22} + \cdots + u_{nn} - u_{00} = 0,$$

其特征条件为

$$\phi_1^2+\phi_2^2+\cdots+\phi_n^2-\phi_0^2=0.$$

当然, 二次型 $Q$ 的惯性指数还可以取别的值. 将在本章 6.16 中再重新讨论这种"超双曲型"的情况. 典型的例子是微分方程

$$u_{11}+u_{22}-u_{33}-u_{44}=0,$$

其特征条件是

$$\phi_1^2+\phi_2^2-\phi_3^2-\phi_4^2=0.$$

### 6.1.2 线性微分方程

对于线性微分方程

$$L[u]+d=0, \tag{6}$$

其中

$$L[u]=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=0}^{n}a_iu_i+au, \tag{7}$$

系数 $a_{ik},a_i,a$ 仅为 $n+1$ 个自变量 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的已知函数, 6.1.1 简述的一般情况化简了. 特征条件 (4)(或 (5)) 此时仅依赖于曲面 $C$ 而不依赖于数据, 因而与所考虑的特解无关. 如果仅只是方程中主要部分的系数 $a_{ik}$ 与 $u$ 及其一阶导数无关 —— 此种方程称为半线性的, 此时上述结论同样成立. $x$ 空间里满足条件 (4)——$Q(\phi_i)=0$—— 的曲面 $\phi=0$ 称为线性微分方程 (6) 的特征曲面. 显然, 在这种情况下双曲性是微分方程自身的一种性质而不依赖于所给的 Cauchy 数据.

特征条件 (4) 与偏微分方程 (5)

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\psi_i\psi_k-2\sum_{i=1}^{n}a_{i_0}\psi_i+a_{00}=0$$

的关系可以说明如下：假定 $\phi=\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 是偏微分方程 (4) 的一个解. 若将方程 $\phi=c=$常数对于 $x_0$ 解出：

$$x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c),$$

则得到方程 (5) 的一个单参数解族 $x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c)$. 反之, 若

$$x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c)$$

是偏微分方程 (5) 的一个单参数解族, 把它对 $c$ 解出：

$$c=\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n),$$

则 $\phi$ 是偏微分方程 (4) 的一个解.

现在假定 $\phi=0$ 是当 $\phi=0$ 时满足方程 (4) 的任一特征曲面, 则相应的函数

$$x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是偏微分方程 (5) 的一个解. 这样的一阶偏微分方程的每一个充分光滑的解都可以嵌入一个单参数解族 $x_0=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c)$ 里①. 解出 $c$ 就得到偏微分方程 (4) 的相应的一个解. 所以每一个特征曲面 $\phi=0$ 都可以嵌入一个单参数特征曲面族 $\phi=c$ 里. 所以可以假定这样嵌入而无损于一般性, 以后如无相反的声明总可以这样假定. 于是, 把 (4)作为偏微分方程看, $\phi$ 是它的一个解.

作为此种嵌入的一个例子, 考虑 $n=2$ 时的微分方程 $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=0$ 和特征锥 $\chi\equiv t^2-x^2-y^2=0$. 此函数 $\chi$ 满足微分方程

$$\chi_t^2-\chi_x^2-\chi_y^2=4\chi.$$

所以 $\chi=0$ 是特征锥, 但是当 $c\neq 0$ 时曲面 $\chi=c$ 不是特征面. 另一方面, 如果把原来的特征锥嵌入锥族

$$\phi=t-\sqrt{x^2+y^2}=c$$

中去, 则

$$\phi_t^2-\phi_x^2-\phi_y^2=0,$$

于是曲面族 $\phi=c$ 当 $c$ 取任一常数值时都是特征曲面. 对于任意维数的波动方程, 相应的论述也成立.

### 6.1.3 射线或双特征

根据第 2 章中一阶方程的理论, 每一个特征曲面 $\phi=0$ 或 $\phi$=常数都是由一族双特征线或射线生成的, 后者与二阶方程 (1) 紧密地相联系着. 如果 (1) 中的系数 $a_{ik}$ 不依赖于 $u$ 和 $u_1,\cdots,u_n$, 即若方程 (1) 为线性的或“半线性的”②, 则这些射线借适当的曲线参数 $s$ 由一组 $n+1$ 个常微分方程

$$\dot{x}_i=\frac{1}{2}Q_{\phi i}=\sum_{k=0}^{n}a_{ik}\phi_k\quad(i=0,1,\cdots,n)\tag{8}$$

而确定. 对于一个拟线性方程 (1), 考虑一个固定的解 $u$ 并将相应的 $u(x)$ 的值和 $u_i(x)$ 的值代入系数 $a_{ik}$, 于是射线由 $\dot{x}_i=\frac{1}{2}Q_{\phi i}$ 确定. 在任何情况下, 可以引入“双特征带” $x_i(s),p_i(s)$ (其中 $p_i=\phi_i$) 而增补双特征线, 并以典范方程组 (参考第 2 章, 2.6.8)

① 例如, 根据第 2 章可以指定依赖于一个参数 $c$ 的初始数据而确定偏微分方程 (5) 的解.

② 在这种情况下仅要求二阶项是线性的.

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{8a}$$

定义带量. 于是方程组 (8a) 给出解 $u$ 的一切可能的特征带.

应当明确, 沿着这些常微分方程 (8a) 所产生的每一个解皆有 $Q =$常数$= c$. 为了得到真正属于 (1) 的解, 必须在每一条射线的一个点上附加条件 $Q = 0$, 由此可推出沿着整条射线有 $Q = 0$①.

在条件 $Q = 0$ 之下, 方程组 (8) 的积分曲线是所给的二阶微分方程 (1) 的特征射线或双特征线, 它们形成特征曲面族 $\phi =$常数的全体.

由第 2 章, 可以回想到如果两个不同的特征曲面 $\psi = t$ 和 $\chi = t$ 在时刻 $t = 0$ 是相切的, 那么在后来的每一时刻它们必有一个共同点, 此点沿着两个波前的公共射线而移动. 这个命题是和下列定理等价的：一个一阶偏微分方程 (在这里是特征方程) 的两个积分曲面如果有一个公共的面元则必有整个一条公共的特征带.

如果偏微分方程 (1) 的系数 $a_{ik}$ 都是常数, 则其所有的特征射线都是直线, 由 (8a) 很显然得到这一点. 它也可以由如下理由推出：因为 (4) 的完全积分 $\phi$ 是线性函数族, 构成单参数子族的包络时, 自然得到直的接触线.

最简单的例子仍是波动方程

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \cdots - u_{x_nx_n} = 0,$$

其中把 $x_0$ 写成了 $t$. 特征关系是

$$\phi_t^2 - \phi_{x_1}^2 - \phi_{x_2}^2 - \cdots - \phi_{x_n}^2 = 0,$$

射线是 $x, t$ 空间里的形式为 $x_i = a_i + \alpha_i t$ 的一切直线, 其中 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$.

如果不在一个 $n+1$ 维的 $x, t$ 空间里而在一个依赖于时间参数 $t$ 的 $n$ 维 $x$ 空间里去解释双特征时, 它们是任意的直线, 点 $x$ 以单位速率沿其运动, 特征曲面的方程是 $t = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它满足偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2 = 1.$$

于是波动方程的特征是一族平行曲面 $\psi = t$(参考第 2 章 2.6.6), 其由一个初始曲面以单位速度沿着法线做平行运动而产生的. 射线就是它们的正交轨线族.

① 在稍加一般的方式下, 可以给任一曲面族 (不一定是特征面) $\phi =$常数配合一族由 (8) 确定的“横截”曲线, 使这些曲面的切平面和相应的横截方向是关于二次曲面 $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$ 成共轭的.

当且仅当在每一点处横截方向切于曲面 $\phi =$常数时此曲面才是特征面. 因此横截导数是内导数. 事实上, 可以把特征条件直接写成 $\sum_{i=0}^{n} \dot{x}_i\phi_i = 0$ 的形式.

### 6.1.4 特征曲面作为波前

特征曲面起着“波前”的作用, 即它们是这样的曲面：在跨过它们时, (1) 的解可以有间断性, 如二阶导数的间断性. 这种间断性指的就是二阶导数在曲面的两侧取不同的值. 由于在自由曲面上的二阶导数是被 Cauchy 条件唯一地确定了的, 所以此种双值性仅仅可能发生在特征上.

例如, 在某一前缘之外在时刻 $t$ 不存在激发时就呈现此种“波前”. 表达扰动的解在这个前缘的一侧恒等于零而在其另一侧不恒等于零.

以后将在许多场合中回到波前这个重要的概念上来 (特别是在 6.2 中). 在这里只需提到下面的注记：

现在特别假定 (1) 是线性的, 并且仍令 $x_0=t$ 和 $\phi=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-t$. 把 $t$ 解释为时间并且把 $u$ 看成 $n$ 维的 $x$ 空间 $R_n$ 中以时间为参数的函数. 于是处理的是 (1) 的一个解 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$, 它带有一个间断面

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=t,$$

这个间断面依赖于时间 $t$ 并在 $x$ 空间里运动.

为方便计, 假定微分方程的形式是 (5a). 沿着射线, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s=1$. 于是, 上述引入的曲线参数等同于时间 $t$, 射线的方程是

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\psi_k \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

在 $n$ 维的 $x$ 空间 $R_n$ 中, 这些射线穿过波前 $\psi=t$ 并且

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i\dot{x}_i=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\psi_i\psi_k=1.$$

在 $R_n$ 中以 $\dot{x}_i$ 为支量的矢量称为穿过波前$\psi=t$的射线.

如果约定 $n$ 行矩阵 $(a_{ik})$ 是正定的, 那么就保证了方程 (5a) 的双曲性. 在这种情况下, 射线的方向和波前的切平面是关于椭球

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k=1$$

成共轭的.

除了以 $\dot{x}_i=v_i$ 为支量的射线速度矢量外, 还可以考虑法线速度矢量, 即进行波前的波速矢量; 这个速度的大小就是 $\psi=t$ 上的一个点沿着曲面族 $\psi=t=$常数的正交轨线运动时单位时间内走过的行程. 它的支量 $\eta_i$ 与导数 $\psi_i$ 成比例. 而由式

$$\eta_i=\frac{\psi_i}{(\mathrm{grad}\ \psi)^2} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

给出. 法线速度和射线速度由等式

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\eta_k(\text{grad }\psi)^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

联系着, 详细的讨论见 6.3.

### 6.1.5 特征的不变性

一些简单的不变性质是重要的.

在变换

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x_0, x_1, \cdots, x_n) \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n)$$

之下, $u(x)$ 化为 $\omega(\xi)$, 则有 (参考方程 (7))

$$\begin{aligned} L[u] &\equiv L'[u] + cu \\ &= \sum_{u,\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \omega_\mu + c\omega \\ &\equiv \Lambda[\omega] \equiv \Lambda'[\omega] + c\omega. \end{aligned}$$

于是, 不仅 $L[u] = \Lambda[\omega]$, 而且 $L'[u] = \Lambda'[\omega]$.

我们断言: 在自变量的任意变换之下, 特征是不变的.

由特征条件的含意来看, 这是明显的. 为了用形式的计算去证明它, 令 $\tau_{ji} = \partial\xi_j/\partial x_i$, 则立即可证 $\alpha_{ik} = \sum_{j,l=0}^{n} a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}$. 现在假定

$$\phi(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \psi(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n),$$

那么由 $\phi_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} \psi_\mu \tau_{\mu\nu}$ 得到恒等式

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\phi_i\phi_k = \sum_{i,k=0}^{n} \alpha_{ik}\psi_i\psi_k,$$

它表明了特征形式是不变的.

有时候可以利用这个不变性把一个特征曲面变成坐标平面 $x_n = 0$. 应当注意, 当且仅当

$$a_{nn}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0 \tag{11}$$

时平面 $x_n = 0$ 才是一个特征曲面. 使 $x_n =$ 常数表示一个特征曲面族的充要条件是系数

$$a_{nn}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

恒等于零.

同样, 双特征线也是不变的; 其意义为双特征方向系数 $\dot{\xi}_i = \frac{1}{2}Q_{\psi_i}$ 和 $\dot{x}_\nu = \frac{1}{2}Q_{\phi_i}$, 表示相同的矢量, 二者的关系是

$$\dot{\xi}_i = \sum_{\nu=0}^{n} \dot{x}_\nu \tau_{i\nu}.$$

事实上, 由前面的公式立即得出这个等式[①].

### 6.1.6 射线锥面. 法锥面. 射线劈锥面

经过一点 $P$ 的射线方向构成特征微分方程 (4) 的二次“局部射线锥面”(第 2 章 2.6.3 中所说的 Monge 锥面). 微分方程 (4) 本身不是射线的而是特征面元的法线的方向数 $\xi_i = \phi_i$ 的约束条件. 把这些法线都看成由直角坐标 $\xi_0, \cdots, \xi_n$(可以把它们和 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 画在同一个坐标系里) 空间的原点发出的一些矢量. 如此, 则其终点落在二次“法锥面”或“对偶锥面” $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0$ 上.

射线方向是由方程

$$\dot{x}_i = a_{ik}\xi_k \tag{12}$$

给定的, 其中 $\xi_k$ 满足方程

$$Q(\xi, \xi) = 0. \tag{13}$$

若 $(A_{ik})$ 是矩阵 $(a_{ik})$ 的逆矩阵, 则由 (12) 得

$$\xi_k = A_{ki}\dot{x}_i.$$

代入 (13), 很容易地得到射线方向的方程

$$A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = 0. \tag{14}$$

反之, 若 $\dot{x}_i$ 满足 (14), 则矢量 $\dot{x}_i$ 指向一个双特征方向.

按定义, 射线锥面是过 $P$ 的一切特征面元的包络. 与此相对, 法锥面是过 $P$ 的一切双特征母线的法平面的包络.

这两个二次锥面的对偶性质可以说明如下: 定义一个直射变换或对偶变换, 它

---

① 同样, 横截导数对自变量的任意变换也是不变的 (参考 6.1.4), 因为对于任意的函数 $\chi$ 来说, 与二次型 $Q$ 相伴的双一次型 $\dot{x} = \partial\chi/\partial s = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\phi_k\chi_i$ 是不变的.

把过 $P$ 的每一条射线变换 (对射变换) 成关于虚锥面 $\sum_{i=0}^{n} y_i^2 = 0$ 的极平面 (即垂直的平面). 于是这两个锥面之中的每一个都是另一个的母线的极平面的包络.

例如, 对于微分方程

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \cdots - u_{x_nx_n} = 0$$

而言, 如果把 $y$ 空间和 $x$ 空间等同起来, 则两个锥面相互重合.

另一方面, 对于方程

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - 2u_{x_2x_2} = 0$$

来说, 法锥面的方程是

$$\xi_1^2 + 2\xi_2^2 = \xi_0^2$$

而射线锥面的方程是

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = t^2.$$

如果微分方程的系数 $a_{ik}$ 不是常数, 则情况基本上不变. 只需要在每一点处分别考虑特征方向的法锥面和局部射线锥面.

不论对常系数或非常系数的情况, 射线劈锥面都定义为由过点 $P$ 并在点 $P$ 切于局部射线锥面的射线所构成的曲面 (参考第 2 章). 这个劈锥面是一个特征曲面或以 $P$ 为“扰动中心”的波前, 又称之为点 $P$ 的一个球面波前[①].

在 6.3 中将非常一般化地考虑这些锥面的关系. 于此仅指出由点 $P$ 在时刻 $t$ 发出的射线锥面的两个部分常常被区别为向前的射线锥面 (指向时间增加的方向, 即“指向未来”) 和向后的射线锥面 (“指向过去”).

### 6.1.7 与 Riemann 尺度的联系

可以插入下面的注记, 虽然并不马上用：以 $n+1$ 维空间 $R_{n+1}$ 里的线素

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \sum_{i,k=0}^{n} A_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k \tag{15}$$

引入一个尺度. 于是, 由特征关系, 劈锥面的母射线化为“零射线”, 即沿着它 $\mathrm{d}\sigma = 0$ 或者说任意两点之间的距离等于零的曲线. 反之, 一切用这个尺度衡量时的零曲线都是微分方程 $L[u] = 0$ 的特征射线.

如果仍然把 $t = x_0$ 识别为时间坐标并考虑特殊形式的微分方程

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik} = 0, \tag{16}$$

假定矩阵 $(a_{ik})$ 是正定的而且系数 $a_{ik}$ 不依赖于时间 $t$, 那么上述关系是不难想像

① 参考 6.1.7.

的. 此时特征 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)-t=0$ 满足偏微分方程 $\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ik}\psi_i\psi_k=1$.

通过 $x$ 空间一个定点的所有射线构成该点处的射线劈锥面. 把它表示为

$$\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n;x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\equiv\omega(x;x^0)=t,$$

其中 $x^0$ 是射线劈锥面的顶点, 其坐标为 $x_i^0$.

$\omega=t$ 给出了由劈锥面表示的球面波前. 若仍用 $(A_{ik})$ 表示 $(a_{ik})$ 的逆矩阵, 则沿任一射线皆有

$$\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\omega_{\mathrm{i}}\omega_k=1. \tag{17}$$

假如在 $n$ 维的 $x$ 空间里引入以

$$\mathrm{d}\rho^2=\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k \tag{18}$$

为线素的尺度, 则 $t$ 表示沿着这些射线的长度. 用这种尺度去计量时, 如果沿着射线而量测距离, 那么曲面 $\omega=t$ 确实是以 $x^0$ 为中心而半径为 $t$ 的一个球面 (与第 2 章 2.6.9 比较, 可知这些射线不是别的而正是

$$\int\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\mathrm{d}t$$

中的被积函数的测地线).

正像在前面对波动方程的情况所指出的那样, 由点 $x,t$ 至参变点 $\xi,\tau$ 的测地距离的平方 $\varGamma$ 满足偏微分方程

$$\sum A_{ik}\varGamma_i\varGamma_k=4\varGamma.$$

如果

$$\mathrm{d}\sigma^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\rho^2=\mathrm{d}t^2-\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k>0$$

成立, 则称方向 $\mathrm{d}x_i$ 为类时间的. 如果

$$\phi_t^2-\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\phi_i\phi_k>0$$

成立, 按照 6.1.1 中的定义, 则称曲面 $\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0$ 的元素为类空间的(与 6.1.2 末尾比较). 所以, 作为特例, 时间轴 $\mathrm{d}x_i=0$ 确实是类时间的而曲面 $\phi\equiv t=0$ 确实是类空间的. 在 6.3 中将对“类时间”和“类空间”这两个概念作一般的讨论.

波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

直接说明了一般概念. 相应的线索是 $\mathrm{d}\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2$ 和 $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}t^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2$.

### 6.1.8　对射变换

为了 6.3, 再增加一个关于对射变换的注记, 它与二阶微分方程的应用无关.

在 6.1.6 中已经定义过, 关于过一定点的线束的对射变换是把每一个由矢量 $\xi$ 表示的射线变为以 $x$ 为流动坐标的平面

$$\xi x = 0 \tag{19}$$

亦即与射线 $\xi$ 垂直的平面的线性变换. 反之, 对称关系 (19) 把第一个过 $P$ 的平面和它的法线方向对应起来.

这个由射线到平面的线性变换被推广为由射线束 $\xi$ 产生的锥面 $N$ 变到平面束 (19) 所产生的锥面 $S$ 的变换, 即假定射线 $\xi$ 描绘一个锥面

$$N(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) = N(\xi) = 0, \tag{20}$$

$N$ 表示一个 $K$ 次的齐次函数, 那么用 (19) 配给 $N$ 一个锥面 $S$, 它是由与 $N$ 的射线成对射的平面生成的. 确切地说, 可以把 $S$ 看成这些平面的包络锥面或者由这些平面支持着的锥面.

一个二次锥面的对射变换的结果仍是一个二次锥面, 但是在对射变换下一个高次的 $k$ 次锥面 $N$ 将产生一个次数不同于 $k$ 的曲面.

由于关系式 (20) 是对称的, 可以说支撑一个锥面的诸平面是其对射锥面的母线的极平面 —— 关于虚锥面 $\sum_{j=0}^{n} \xi_j^2 = 0$ 的极平面, 原点 $P$ 是顶点. 还可以选定坐标 $x_0$ 并在 $n$ 维的 $\xi$ 空间里考虑 $N$ 和 “平面” $\xi_0 = -1$ 相交成的曲面 $N^*$ 来说明这种情况. 同样还可以考虑 $S$ 与平面 $x_0 = 1$ 相交所成的在 $n$ 维的 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空间里的曲面 $S^*$. 这时 $N$ 和 $S$ 之间或者 $N^*$ 和 $S^*$ 之间的对射关系是

$$x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = 1, \tag{20a}$$

(20a) 表明对于一定的 $x$, 动点 $\xi$ 跑过 $x$ 关于单位球面的整个极平面[①], 反之亦真.

为了解析地作出由一个给定的曲面 $N^*(\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0$ 到 $S^*$ 的变换, 必须构成平面族 (20a) 的包络, 这些平面的法线 $\xi$ 受着 $N^*(\xi) = 0$ 的限制. 这个步骤通常

① 用 $N$ 和 $\xi_0 = 1$ 的截口定义了 $N^*$ 之后, 极点和极面就成为对以虚数 i 为半径的球面言的了, 实质上这并无重大差别.

不但要导出 $S^*$ 的一个代数表达式, 其次数高于 $N$ 的次数 $k$[①], 而且包络的形成还可能导致诸如孤立点或者脊线之类的奇异性, 在 6.3 和 6.3′ 中将由重要的例子证实这种情况. 然而, 变换的几何定义冲淡了这个复杂性：不只考虑一个曲面的切平面, 并且还要更一般地考虑在一个点处的支持平面, 即通过所论曲面上的一个点 $P$ 而落在该曲面的一侧 (至少在点 $P$ 的某个邻域内如此) 的平面. 于是, 对射变换把曲面 $N^*$ 的诸点变为 $N^*$ 的诸支持平面的极点的轨迹 $S^*$, 反之, 它把 $S^*$ 的诸点变为 $S^*$ 的诸支持平面的极点的轨迹 $N^*$.

当然, $N^*$ 的光滑部分映射为这些点的极平面的正则包络上的点. 包络上的像尖点之类的奇异性只能发生在与 $N^*$ 上曲率为零的点相应的点上 [②]. 如果曲面 $N^*$ 的某一部分有一个奇异点, 它肩负着一束支持平面, 那么对应的极点构成一个线性的 $x$ 流形的一部分, 其在边界上与这个包络相切.

奇异性出现时所带来的复杂性似乎不能予以简单的几何解释. 这是和对于实空间中的代数曲面的知识不足的情况相符合的.

不过, 对于一个凸的闭曲面 $N'$($N'$ 可以是 $N^*$ 的一部分) 的变换来说, 情况是明显的而不被复杂的奇异性所蒙蔽. 这时不难证明：和一个凸曲面 $N'$ 成对射的曲面 $S'$ 仍是一个凸曲面, 它是形成 $N'$ 的极平面的普通包络时所得到的点集的凸壳.

诚然, 用 $\sum x_i\xi_i - 1 \leqslant 0$ 来定义点 $\xi$ 的极平面 $(x\xi) - 1 = 0$ 的“正”侧. 假定点 $\xi = 0$ 是在 $N'$ 之内, 把 $N'$ 的内闭集 $\overline{N}'$ 的对射变换定义为与 $\overline{N}'$ 的每一个点 $\xi$ 相应的半空间 $(x\xi) - 1 \leqslant 0$ 的交集. 这个点集 $\overline{S}'$—— 类半空间的公共区域是凸的, 因而它的边界 $S'$ 也是凸的, $S'$ 显然就是 $N'$ 的映象. 也可以把凸区域 $\overline{N}'$ 的对射映象定义为 $\xi$ 空间中一切不与 $\overline{N}'$ 相交的平面的极点所成的集合. 读者不难认识到这各种定义的等价性.

无论如何, 作为 $N'$ 的光滑部分的点的极平面的包络的凸壳, $S'$ 的性质现在是明显的了.

在 6.3 中将进一步阐明对射曲面在高阶微分方程中的作用.

### 6.1.9 Huygens 的波前构图法

完全积分的理论和相应的构造一阶微分方程初值问题解的包络的方法直接导致下述重要的波前构图法 (比较第 2 章 2.6.4 和 2.6.8 以及本章 6.3).

考虑适合方程 $a_{ik}\psi_i\psi_k = 1$ 的一个可能的波前 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$. 以 $P_0$ 为中心的球面波可记为 $\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n, P_0) = t$. 如果在 $t = 0$ 时波前和一个给定的曲面 $W_0$ 重合, 则 Huygens 构图法给出在时刻 $t$ 的波前如下：围绕 $W_0$ 的每

① 但是也有在数学物理中重要的情况, 其中两种曲面的次数是相同的, 参考在 6.3′ 中讨论的晶体光学的例子.

② 例子将在 6.3 和 6.3′ 中讨论.

一个点 $P_0$, 作一球面波前 $t=\omega(x,P_0)$, 对于一个固定的正数 $t$, 令 $P_0$ 跑遍曲面 $W_0$, 作出所有这些在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间里的球面的包络. 这样就得到一个曲面 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=t$, 它就是所求的波前. 换句话说：在时刻 $t$ 的波前是以 $t=0$ 时的波前上的点为中心而在上述尺度下以 $t$ 为半径的所有球面的包络[①].

### 6.1.10　类空间曲面. 类时间方向

本节将对二阶双曲型方程进一步阐明“类空间”曲面的概念. 它的重要性 (参考 6.8, 6.9) 在于如果初始曲面是类空间的, 那么初值问题就是可解的.

假定二阶算子 $L[u]$ 是双曲型的, 即矩阵 $a_{ik}$ 有一个正本征值和 $n$ 个负本征值, 那么所有适合 $Q=0$ 的方向构成 $\xi$ 空间里的法锥面. 若过点 $P$ 的一个面元的法线 $\xi$ 指向锥的内部, 例如, 如果 $Q(\xi)>0$, 则称此面元为类空间的; 若 $Q(\xi)=0$, 则称之为特征的; 若 $Q(\xi)<0$, 则称之为非类空间的. 在每一点处皆为类空间的曲面称为类空间曲面.

如果过点 $P$ 的一个面元和以 $P$ 为顶点的局部射线锥面仅在点 $P$ 相交, 即它把这个锥面的两叶间隔开来, 则称之为类空间的. 不难看出, 此定义与前述定义是等价的.

如果一个方向指向局部射线锥面的内部, 则称之为类时间的.

如果把沿着一个类时间方向的距离和时间 $t$ 等同起来, 则称点 $P$ 把“前向”(或未来的) 射线锥面和“后向”(或过去的) 射线锥面分开.

在 6.3 中将看到对于高阶方程怎样把这些概念推广、澄清并且精确化.

## 6.2　二阶方程. 特征的作用

在 6.1 中把特征定义为那样的曲面, 其中 Cauchy 数据是不能任意给定的. 这个定义可以代之以下面的等价的性质, 后者强调的是这个概念的稍微不同的另一方面：在特征面 $C$ 上, 微分算子是一个内算子, 其意义即将确切说明. 在第 5 章中曾经看到这个性质对于构造两个自变量的 Cauchy 问题的解有决定性的意义. 对多于两个自变量的情况, 除了特殊的微分方程外 (参考 6.1.4), 通常它将不能导致一种类似的直接造解法. 然而, 一般地仍可利用微分算子沿特征的内向性质去分析解的主

① 提醒注意一个乍看是奇论的事实：假定 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 是微分方程 $L[u]=0$ 以 $\psi=t$ 为波前的一个解. 假定这个波前是由在 $R_n$ 空间里随时间前进的一个单独的曲面构成的. 如果由 $t=0$ 时的波前 $W_0$ 出发, 像在波动方程的例子中那样, Huygens 波前构图法将给出两个不同的“平行曲面”$W_t$ 和 $W_t'$, 二者均适合特征微分方程. 但是按假设, 二者之中只有一个是 $u$ 在时刻 $t$ 的间断性曲面, 即确实对应于时刻 $t$ 的那个曲面, 而另一个曲面则是对应于时刻 $-t$ 的.

一个特征曲面可以是但未必一定是解 $u$ 的间断性曲面, 包络的制作也可能给出那样的曲面, 在时刻 $t$, 波在它上边并不是间断的, 这与本文理论并不矛盾.

要特点以便研究解的间断性. 因此, 只需解某些常微分方程就能至少描绘出解的一个轮廓. 在适当的假定下, 甚至还能够进一步构造 Cauchy 问题的完全解. 对于波的传播十分重要的有关的事实是解的有物理意义的间断性仅能跨过特征面时发生 (因此在行文中把这种间断性叫做波前) 并且在这些特征里沿着双特征线而传播. 这种传播受一个简单的常微分方程的控制.

在本节中将对二阶线性和拟线性方程扼要地指出这种情况, 以便在 6.4 和 6.5 中对这个论题进行更详尽而一般的讨论.

### 6.2.1　二阶间断性

考虑一个曲面 $C:\phi(x_0,\cdots,x_n)=0$,6.1 中方程 (1) 的解 $u$ 的一阶导数沿着它是连续的[①], 因而这些一阶导数的各种切向导数 (内导数) 也是连续的. 跨过 $C$ 时, 二阶导数 $u_{jk}$(如果不是内导数) 可能发生跳跃.

与在第 5 章 5.1.3 中一样, 对于跨过曲面 $C:\phi=0$ 时有跳跃间断的任何函数 $f$, 用 $(f)$ 记它的跳跃量. 表达式 $u_{ik}\phi_j-u_{ij}\phi_k$ 是 $u_i$ 在 $C$ 上的一个内导数 (比较第 2 章附录 $2''$.1.1), 所以在跨过 $C$ 时它是连续的. $u_{ij}\phi_l-u_{jl}\phi_i$ 也是这样. 这两个连续函数的线性组合 $u_{ik}\phi_j\phi_l-\mu_{jl}\phi_i\phi_k$ 在跨过 $C$ 时当然也是连续的. 所以得到关于跳跃量的关系

$$(u_{ik})\phi_j\phi_l=(u_{jl})\phi_i\phi_k,$$

因而[②]

$$(u_{ik})=\lambda\phi_i\phi_k,$$

其中比例因子 $\lambda$ 是定义在 $C$ 上的一个函数, 它在使 $u$ 的二阶导数中有任何一个发生间断的点上不能等于零. 容易看出

$$\lambda=(u_{\phi\phi}).$$

显然, $C$ 必须是特征, 如若不然则 $u$ 的二阶导数沿 $C$ 的值将被 $u$ 和 $u_i$ 沿 $C$ 的值唯一地确定而不可能发生跳跃. 这个结论也可以由考察沿着 $C$ 的跳跃关系 $(L[u])=0$ 并利用上述的公式而直接看出, 得到

$$0=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}(u_{ik})=\lambda\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}\phi_i\phi_k\text{[③]}.$$

---

① 此处可假定方程是线性的或者拟线性的.

② 假定在 $\phi=0$ 的同一个点上 $\phi$ 的所有二阶导数不能同时等于零.

③ 可以对于仅发生在 $2+r$ 阶导数中的沿着 $C$ 的间断性作一相仿的分析; 只需把微分方程求导 $r$ 次并对所得的方程作同样的论证. 结论仍是 $C$ 是特征, 并且如果第 $r+2$ 阶外导数的跳跃量是 $\lambda=(u\phi^{r+2})$, 那么导数 $D_0^{\alpha_0}\cdots D_n^{\alpha_n}u$ 的跳跃量就是

$$\lambda\phi_0^{\alpha_0}\cdots\phi_n^{\alpha_n}\quad(\alpha_0+\cdots+\alpha_n=r+2),$$

其中 $D_i$ 表示 $\partial/\partial x_i$.

有人为的“广义解”$u$ 的一阶导数的间断性可以和微分方程沿着非特征曲面相容 (比较第 5 章 5.1 和 6.3). 不过, 在与物理有关的广义解[①]中这种跳跃事实上都是局限在特征面上的, 将在 6.3 中说明这一点. 同样函数 $u$ 的跳跃和其他类型的间断性也是如此.

在 6.4 和 6.10 中将给出本小节中所分析的解的存在性的证明.

### 6.2.2 沿特征曲面的微分方程

为简明计, 将限于讨论线性微分方程. 分析由方程

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n} a_i u_i + au = 0 \tag{1}$$

所表达的沿着特征曲面 $\phi = 0$ 的知识. 不失一般性, 可以假定已经把曲面族 $\phi = c =$常数变换为坐标平面族 $x_n = c =$常数. 根据 6.1.5 中证明过的不变性, 可以把结论针对任意的曲面族 $\phi = c$ 进行陈述.

把 (1) 写成如下形式：

$$L[u] \equiv \sum_{i,k=0}^{n-1} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u_i + au + a_{nn}u_{nn} + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_{in}u_{in} + a_n u_n = 0. \tag{2}$$

现在把仅含曲面 $C: x_n = 0$ 上的内导数 (对 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 求导) 的各项都合起来, 将其和记为 $J$. 得到

$$L[u] \equiv J + a_{nn}u_{nn} + a_n u_n + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_{in}u_{in} = 0. \tag{3}$$

由曲面族 $\phi = x_n =$常数是特征曲面的假定, 直接推出 $a_{nn} = 0$, 反之亦真. 因此, 在这些特征曲面上有

$$L[u] = J + a_n u_n + 2\sum_{i<n} a_{in}u_{in} = 0. \tag{4}$$

然而, 当 $\phi = x_n$ 时, 特征形 $Q(\phi_i, \phi_k)$ 的偏导数是

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi_i} = 2a_{in}, \quad i < n, \quad \frac{\partial Q}{\partial \phi_n} = 0.$$

根据 6.1, 矢量 $Q_{\phi_i}$ 是曲面 $\phi =$常数的切向矢量并且指向双特征线的方向. 引入外导数 $u_\phi = v$ 和沿 $\phi =$常数上的双特征线的一个适当的参数 $s$, 可把 (4) 写成下面的形式

$$J + \frac{\partial v}{\partial s} + a_n v = 0, \tag{5}$$

① 在 6.4 中将明确“容许”解.

其中 $\dfrac{\partial}{\partial s}=2\sum\limits_{i<n}a_{in}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

根据 6.1, 在将平面族 $x_n=c$ 变为别的特征曲面族 $\phi=c=$常数的坐标变换下, 特征导数是不变的[①]. 此外, 按定义, 在 $\phi=c$ 上 $L[\phi-c]$ 在坐标变换下是不变的 (这种不变性规定了 $L$ 的系数的变换). 因为对 $\phi=x_n=0$ 有 $L[\phi]=a_n$, 并且更一般地说, 对 $\phi=x_n=c$ 有 $L[\phi-c]=a_n$, 现在沿着特征曲面 $C_c:\phi=c$ 可以把 (5) 写成

$$J+\frac{\partial v}{\partial s}+L[\phi-c]v=0, \tag{6}$$

其中 $L[\phi-c]$ 是沿 $C_c$ 的一个已知函数, 并且只要知道了 $u$ 在 $C_c$ 上的值则 $J$ 也是已知的. 原来的微分方程的这个值得注意的形式今后将再出现于更一般的行文中. 它表明了确实不能在 $C$ 上任意选取 Cauchy 数据. 下面将利用它来研究间断性的传播.

### 6.2.3　间断性沿射线的传播

方程 (6) 是关于外导数 $v=u_\phi$ 的一个一阶线性常微分方程. 这样的一个常微分方程沿着产生特征曲面 $\phi=c$ 的每一条射线皆成立.

现在暂且回来假定整个特征曲面族是由平面族 $\phi=x_n=c$ 构成的. 于是恒有 $a_{nn}=0$.

利用 (6) 和在 $a_{nn}=0$ 的假定下对 $x_n=\phi$ 微分由 (1) 所得到的方程, 于是得

$$\begin{aligned}&\sum_{i,k<n}a_{ik}u_{ikn}+2\sum_{i<n}a_{in}u_{nni}+\sum_{i<n}a_iu_{ni}+au_n+(a)_nu\\&\quad+a_nu_{nn}+\sum_{i,k<n}(a_{ik})_nu_{ik}+2\sum_{i<n}(a_{in})_nu_{ni}+\sum_{i<n}(a_i)_nu_i=0.\end{aligned}$$

在 $\phi=0$ 上, 函数 $u$ 和 $u$ 的一阶导数都假定是已知的, 因而它们的内导数也是已知的, 把它们都归到一起作为一个内算式 $J^*$, 得到

$$J^*+2\sum_{i<n}a_{in}\omega_i+a_n\omega=0\quad(\omega=u_{\phi\phi}).$$

如果像在 (6) 中那样用 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 记沿 $C$ 的一条射线求偏导数运算, 则可将上列等式写成

$$J^*+\frac{\partial\omega}{\partial s}+a_n\omega=0. \tag{5a}$$

同 6.1.1 中所述, 现在假定在跨过 $C$ 时 $u_{\phi\phi}$ 具有间断性

$$(u_{\phi\phi})=(\omega)=\lambda,$$

① 除了一个沿双特征线的任意内参数之外.

而 $u$ 和 $u$ 的一阶导数以及它们的内导数在 $C$ 上都是连续的. 那么, 由于 $J^*$ 的连续性, (5a) 立即导出[①]在 $C: x_n = 0$ 上的跳跃关系

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} + P\lambda = 0, \tag{7}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 表示沿 $C$ 上的双特征线求偏导数而 $P = L[\phi] = L[x_n]$ 在 $C$ 上是已知的.

方程 (7) 是在特征间断面上沿着射线控制间断性的传送的规律, 它的形式是一个常微分方程, 并且表明了如果在一条射线的某一点处这个间断量不等于零, 那么它在这条射线上的任一点处都不会消失.

由于特征面和特征微分的不变性 (6.1.5), 等式 (7)(其中 $P = L[\phi]$) 不仅对特征平面成立并且对任意的特征曲面 $\phi = 0$ 也成立. 为了证实此结论, 注意到, 当把 $x_n$ 变为 $\phi$ 时, 外导数 $u_{nn}$ 变为 $u_{\phi\phi}\phi_{x_n}^2 + \cdots$. 这里的三个点表示在跨过 $C$ 时是连续的项, 因而当取 $L[u]$ 在 $C$ 的两侧的差时这些项便消失了. 因子 $\phi_{x_n}^2$ 仅仅修改了射线上的参数.

如果间断性发生在跨过特征曲面 $\phi = c$ 时, 那么方程 (7) 被修改为

$$\lambda_s + L[\phi - c]\lambda = 0.$$

将找到一个相仿的规律, 它对于线性微分方程解的一切类型的奇异性都成立. 例如一阶导数的间断性, 甚至函数 $u$ 本身的间断性，后两者是在 6.4.3 中将要证明的一种意义上的间断性.

最后, 注意一种特殊的特征曲面 ——6.1 中所引入的“射线劈锥面”. 它的射线把局部的间断性由顶点传带到 $x$ 空间里.

### 6.2.4 例证. 三维空间里波动方程 Cauchy 问题的解

引言中指出过, 在有些情况下, 利用沿着射线的积分确实可以直接作出解.

重要的例子是方程

$$L[u] \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{8}$$

将利用上述发展的概念来解决这个方程的初值问题, 在第 3 章 3.6.5 中已经处理过它, 并且还要在 6.12 中更详细地讨论它. 给定当 $t = 0$ 时的初始值.

$$u(x, y, z, 0) = \phi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z).$$

引入下列求导符号 (和 6.2.3 中的记号略有不同)

$$A_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad A_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad A_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},$$

① 在 $C$ 的两侧靠近 $C$ 上某点的两个点处考虑 (5a) 的差并取这两个点趋于 $C$ 上的点时的极限即得.

以及

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu}=\frac{1}{t-\tau}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}-(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

于是在过点 $(0, 0, 0, \tau)$ 的特征锥

$$K:(t-\tau)^2-x^2-y^2-z^2=0$$

上, 求导符号 $A_1, A_2, A_3$ 与特征偏导符号 $\dfrac{\partial}{\partial s}$ 都是内导数符号, 而 $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ 表示求法向偏导数. 在 $(t-\tau)^2=x^2+y^2+z^2$ 上成立的恒等式

$$\begin{aligned}\Psi[u]&=-(t-\tau)^2L[u]-(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial s}-(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\\&=(A_1^2+A_2^2+A_3^2)u\end{aligned}\tag{9}$$

表明了所论的是 $K$ 上的内导数. 注意在三维空间的球面 $x^2+y^2+z^2=$常数上, 对于任意的函数 $v$ 来说, 因为沿着由 $x=$常数截出的圆上 $A_1[v]$ 的积分为零, 所以它在整个球面上的积分为零. 当然, 这个论断对 $A_2[v]$ 和 $A_3[v]$ 并因对 $(A_1^2+A_2^2+A_3^2)v=\Psi[u]$ 的相应的曲面积分也成立. 将表达式 $\Psi[u]/(t-\tau)$ 在特征半锥面 $K(t>\tau)$ 上作积分

$$\iiint\limits_K \frac{\Psi[u]}{t-\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega.$$

由 $L[u]=0$, 得出

$$\iiint\limits_K\left\{\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\left[(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}\omega=0.$$

然后对 $s$ 积分即得

$$4\pi\tau^2u(P)-\iint u\mathrm{d}\omega-\tau\iint\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}\omega=0,\tag{10}$$

其中积分是在球面 $x^2+y^2+z^2=\tau^2$ 上进行的. 这正是在第 3 章 3.5 中已经找到过的解.

同样, 可以得到在第 3 章 3.5 中给出的非齐次波动方程的解.

这个方法主要是 Beltrami 给出的, 它的关键在于能借助内微分运算把微分方程所提供的沿着特征锥的关系写成极简单的形式①. 仅仅在锥的表面上进行积分就

① 这个方法已被 M. Riesz[2] 推广到 $n$ 为一切奇数的情况.

能够找出明显公式, 它利用沿着基线的初始值表达出顶点处的 $u$ 值. 这个方法体现了波动方程的"Huygens"特性.

不能对任意的二阶线性方程发展一种与此完全相仿的理论 —— 利用在特征劈锥内沿射线的积分步骤给出解. 这样的理论将意味着 Huygens 原理普遍成立, 而这肯定是得不到的. 剩下的一个有趣的问题是按照与本节相仿的想法去寻求 Huygens 原理成立的充分条件①.

## 6.3 高阶算子的特征流形的几何性质

对于高阶方程和方程组, 需要 6.1 与 6.2 中的理论的一种重要推广 (参考第 3 章和第 5 章), 在本节中将给出这些推广.

### 6.3.1 记号

将采用下面的记号②.

仍旧用 $D_\kappa$ 或 $D^\kappa$ 记对 $x_\kappa$ 的导数:

$$D^\kappa = D_\kappa = \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \quad (\kappa = 0, \cdots, n).$$

有时把 $x_0, \cdots, x_n$ 写成 $x$, 但是当把 $x_0 = t$ 作为时间变量时, 将用 $x$ 表示 $n$ 维空间的矢量 $x_1, \cdots, x_n$. 梯度算子记为

$$D = (D_0, \cdots, D_n).$$

令 $p = (p_0, \cdots, p_n)$ 为具有 $n+1$ 个非负的整数支量的任一矢量, $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ 为任一具有 $n+1$ 个支量的矢量. 然后定义

$$\xi^p = \xi_0^{p_0} \cdots \xi_n^{p_n}.$$

$\xi$ 的支量可以是数或者算子, 特别是当 $\xi = D$ 时, 记号 $D^p$ 表示微分算子

$$D^p = D_0^{p_0} \cdots D_n^{p_n}.$$

---

① 参考 L. Asgeirsson[1], K. L. Stellmacher[1] 和 A. Douglis[2]. 又见 6.18 等处.

② 有时这种记号 (由 Laurent Schwartz 提出的) 的优点之一是它能简化 Leibnitz 规则和 Taylor 定理的表达式. 若定义

$$p! = p_1!, p_2!, \cdots p_n!,$$

则有

$$D^p(uv) = \sum_{q+r=p} \frac{p!}{q!r!} D^q u D^r v$$

和

$$f(x+\xi) = \sum_p \frac{1}{p!} \xi^p D^p f(x).$$

微分算子 $D^p$ 的阶记为 $|p|$：

$$|p| = p_0 + \cdots + p_n.$$

利用这种记号可以把一个 $m$ 阶微分方程写成

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f.$$

系数 $a^p$ 和右边的 $f$ 都可以是常数, 也可以是自变量 $x$ 的函数, 或者依赖于 $x$ 和 $u$ 的直到 $m-1$ 阶的偏导数.

大多数数学物理方程呈现为一组包含 $k$ 个未知函数 $u^1, \cdots, u^k$ 的 $k$ 个方程, 把这些未知函数看成一个列矢量 $u$ 的支量. 于是可将这些方程写成矩阵的形式

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} A^p D^p u = f. \tag{1}$$

这里微分算子 $D^p$ 作用在矢值函数 $u$ 的每一个支量上, 系数 $A^p$ 是 $k \times k$ 的方阵, $f$ 是一个具有 $k$ 个支量的列矢量.

和上述完全一样, 系数 $A^p$ 可以是常数, 也可以依赖于 $x$. 对于拟线性方程, 它们依赖于 $u$ 和 $u$ 的直到 $m-1$ 阶的偏导数.

最高阶项构成算子的主要部分：

$$\sum_{|p|=m} A^p D^p.$$

着眼于具体的情形, 特别注意如下三类情况.

情况 1 一阶方程组

$$L[u] = \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f. \tag{1a}$$

情况 2 单个的 $m$ 阶方程

$$L[u] = \sum_{|p| \leqslant m} a^p D^p u = f. \tag{1b}$$

一般的 $m$ 阶方程组 (1) 作为情况 3).

应用中特别重要的是二阶方程组, 可以将它写成更明显的形式

$$L[u] = \sum_{i.j=0}^{n} A^{ij} D_i D_j u + \sum_{i=0}^{n} A^i D_i u + Bu = f,$$

其中 $B, A^i, A^{ij}$ 都是 $k \times k$ 的矩阵, 并且 $A^{ij} = A^{ji}$.

### 6.3.2 特征曲面. 特征形. 特征矩阵

Cauchy 的初值问题是假定在一个已知的曲面[①] $C$ 上给定了"Cauchy"数据而求 $L[u]=f$ 的解. 对于单个的或一组 $m$ 阶方程来说, 这些数据是 $u$ 的值和它的直到 $m-1$ 阶的某种外导数 (假定方程组中每一个方程都是 $m$ 阶的). 特别地, 对于一阶方程组 (情况 1)), $u$ 值本身就构成 Cauchy 数据.

由 Cauchy 数据, 可以通过在 $C$ 上求内导数 (切向导数) 而确定 $u$ 的直到 $m-1$ 阶的一切偏导数以及那些用进一步求内导数的办法可以求得的 $m$ 阶或更高阶的偏导数. 一个微分算子如果它在 $C$ 上的值可以这样由 $C$ 上的 Cauchy 数据确定, 那么便称它是一个 $m$ 阶的内微分算子(见第 3 章 3.2).

在本小节中不拟构造微分方程组 (1) 的解, 但是将考虑下边的仅涉及初始曲面 $C$ 的预备问题:

对于什么样的曲面 $C$ 存在着函数 $u$, 该函数适合任意给定的 Cauchy 数据并且在 $C$ 上满足方程 $L[u]=f$.

如果这样的一个函数 $u$ 存在, 那么便称此曲面对于算子 $L$ 是自由的. 如果它处处都不是自由的, 则称之为 $L$ 的一个特征曲面.

下面由 $L$ 的系数和曲面 $C$: $\phi(x)=0$ 的法线 $\xi$ 构成的代数判断依据断定曲面 $C$ 是否是特征的[②]: $C$ 的法矢量 $\xi=D\phi$ 的支量的一个 $mk$ 次的齐次"特征形" $Q(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 适合

$$Q(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)=Q(\xi)=0 \tag{2}$$

是 $C$ 为特征曲面的充要条件[③]. 对于单个的 $m$ 阶方程 (1b) 特征形 $Q$ 的定义是

$$Q(\xi)=\sum_{|p|=m} a^p\xi^p. \tag{3}$$

对于 (3) 中 $Q$ 的定义是一个行列式

$$Q(\xi)=\left\|\sum_{|p|=m} A^p\xi^p\right\|. \tag{4}$$

对于特别重要的情况 —— 一阶方程组 (1a), 特征形是

$$Q(\xi_0,\cdots,\xi_n)=\left\|\sum A^i\xi_i\right\|. \tag{5}$$

对于二阶方程组来说,

$$Q=\|\sum A^{ij}\xi_i\xi_j\|.$$

---

① 和从前一样, 把曲面理解为一个光滑的 $n$ 维超曲面 $\phi(x)=0$ 而且 $|D\phi|\neq 0$.

② 参考第 5 章和第 3 章 3.2. 现在的讨论部分地重复了前面的内容.

③ 当然, 如果需要强调条件的局部性, 可以把它仅应用于 $C$ 的一个面元.

对于任意 $m$ 阶的方程组来说, 特征形是特征矩阵

$$A = \sum_{|p|=m} A^p \xi^p \tag{6}$$

的行列式. 在 $m = 1$ 的情况, 特征矩阵是

$$A = \sum_{i=0}^{m} A^i \xi_i. \tag{7}$$

在 $m = 2$ 的情况,

$$A = \sum_{i,j=0}^{n} A^{ij} \xi_i \xi_j. \tag{8}$$

论断 ——$Q = 0$ 是特征条件, 这是由前面的理由推出的. 引入 $C$ 上的内变量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 和外变量 $\phi = \lambda_0$, 仅表示出方程 $L[u] = 0$ 不能由对于 $u$ 的任意 Cauchy 数据确定所有量 $(\partial/\partial\phi)^m u$ 在 $C$ 上的值. 关于这 $k$ 个量的线性代数方程组的矩阵是 $A$ 而行列式是 $Q$. 自然, 除非 $L$ 的主要部分是常系数的, 特征形 $Q$ 和矩阵 $A$ 都依赖于点 $x$.

在情况 (1a) 和 (3) 的矩阵中, 条件 $Q = 0$ 说明特征矩阵 $A$ 是奇异的; 因此它有 $k$ 维的左零化矢量 $l$ 和右零化矢量 $r$ 使

$$lA = Ar = 0.$$

若 $A$ 的秩是 $k-1$, 则对于一个给定的特征曲面 $C$ 来说, 这些零矢在每一点上除了一个任意常数因子之外都是唯一确定的.

单个算子 $L$ 在每一个特征曲面 $C$ 上都是内算子.

若 $L[u]$ 是矢量 $u$ 上的一个矩阵算子, 则特征矩阵条件 $Q = 0$ 说明作用在矢量 $u$ 上的单个算子

$$lL[u]$$

是沿特征曲面 $C$ 的一个内算子.

### 6.3.3 特征条件在时空中的解释. 法锥面与法曲面. 特征零化矢量与本征值

与在 6.1 中一样, 选定 $x_0 = t$ 作为时间变量, 就可以把特征曲面表示成

$$\phi(t, x) = \psi(x) - t = 0,$$

即视为在 $n$ 维 $x$ 空间中运动着的曲面

$$C : \psi(x) = 常数 = t.$$

于是 $\phi_t = -1, \phi_{x_i} = \psi_{x_i} = \xi_i$. 来考察 $n$ 维空间中的矢量 $\xi$. 运动着的曲面 $\psi = t$ 的法向速率是一个垂直于此曲面的矢量 $v$, 它的模 $|v|$ 等于 $\psi$ 沿着这个法线的变化率. 因此, 有 $n$ 维空间的法矢量 $\xi = D\psi$ 和一个数 $\lambda$ 之间的关系：

$$v = \lambda\xi, \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i = \xi_v, \quad \lambda\xi^2 = 1.$$

于是

$$\xi = \frac{v}{v^2}, \quad v = \frac{\xi}{\xi^2}.$$

矢量 $\xi$ 与 $v$ 是关于单位球成互逆或"对偶"的, 而特征条件 (2) 可以写成

$$Q(-1, \xi_1, \cdots, \xi_n) = 0 \quad (\xi = D\psi). \tag{9}$$

在 $n$ 维 $x$ 空间中引入垂直于 $C$ 的单位矢量

$$\alpha = \frac{\xi}{|\xi|},$$

根据 $Q(\xi_0, \xi_1 \cdots, \xi_n)$ 的齐次性质, 由 (9) 得到等价的方程

$$Q(-|v|, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0. \tag{9a}$$

这是关于特征曲面的法速率 $|v|$ 的一个 $mk$ 次的代数方程, 其中 $\alpha$ 指向特征曲面的法线方向. 当然, 对于变系数的微分算子而言, 这些关系只能是针对 $x$ 空间的定点和特定的时刻 $t$ 而言的.

还可以把 (9a) 写成

$$Q\left(-1, \frac{v_i}{|v|^2}\right) = 0. \tag{9b}$$

要注意对于一阶方程组

$$L[u] = u_t + \sum_{v=1}^{n} A^v u_\nu + \cdots = 0 \tag{9c}$$

而言 (其中 $A^0 = I$ 为单位矩阵), 特征曲面

$$\phi = \psi(x) - t = 0$$

的零化矢量 $l$ 或 $r$ 显然就是矩阵 $\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu A^\nu$(其中 $\psi_{x_\nu} = \xi_\nu$) 的左或右本征矢量. 法速率$|v|$ 就是矩阵

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^i$$

的本征值. 这是由于 $Q = \|A\| = 0$ 的意义即

$$\| - |v|I + \hat{A}\| = 0$$

而得知的.

无需强调时间变量 $t$, 现在可以把 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 空间中一点 $O$ 处的特征法锥面定义为过点 $O$ 的一切特征面元的法线构成的锥面. 如果用 $\xi_0, \cdots, \xi_n$ 表示以顶点 $O$ 为原点时锥面上点的流动坐标, 则 $mk$ 次的齐次代数方程

$$Q(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n) = 0 \tag{10}$$

表示以点 $O$ 为顶点的法锥面.

微分算子 $L$ 直接确定了法锥面.

如果仍旧选定 $x_0 = t$, 则特征条件 (9) 在 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 空间里的几何图像是一个曲面, 称之为法曲面, 它是法锥面与平面 $\xi_0 = -1$ 的截口, 即 $Q(-1, \xi_1, \cdots, \xi_n) = 0$.

同样, 可以把特征条件在以 $v_1, \cdots, v_n$ 为支量的 $n$ 维速度空间里的形式 (9b) 解释为一个曲面, 称它为法速曲面或逆法曲面①. 根据 (9a), 这个曲面是点 $P$ 的轨迹, $OP$ 的方向就是 $\alpha$ 的方向, 距离等于速率 $|v|$. 这两个法曲面关于 $\xi$ 空间里的单位球 $|\xi|^2 = 1$ 互成反演②.

### 6.3.4 特征曲面 —— 波前的构造. 射线、射线锥面、射线劈锥面

在物理的 $x$ 空间里, 关于法矢量 $\xi = \mathrm{grad}\phi = D\phi$ 的特征条件 $Q(\xi) = 0$ 必须用特征曲面

$$\phi(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 常数$$

来解释. 与 6.1 中一样, 视 $Q = 0$ 为 $\phi(x_0, \cdots, x_n)$ 的一阶偏微分方程, 则族 $\phi =$常数$= c$ 中所有的曲面都是特征曲面 $C_c$③. 可以按照第 2 章所述的一阶偏微分方程的理论去构造这些曲面.

特征偏微分方程 $Q(D\phi) = 0$ 的每一个解都是由属于一阶方程 $Q = 0$ 的一个 $n$ 参数特征曲线族构成的. 这些属于算子 $L$ 的"双特征"或射线在附以

$$\xi_i = D_i\phi$$

的值之后被补充成双特征带(把 $\xi_i$ 沿着这些曲线的值看成一个曲线参数 $\lambda$ 的函数, 并用一个点表示对 $\lambda$ 的求导). 于是, 与 6.1 中一样, 双特征带适合 $2n+2$ 个典范常

① 这两个密切相关的法曲面对于摹拟传播现象是有用的工具. 在个别文献中, 这两个名词的用法和这里是相反的.

② 不论是否选定 $t$, 都可以在 $n$ 维射影空间里解释这个几何关系.

③ 如果考虑的不是曲面族, 而是单个的曲面 $\phi = 0$, 并且把这曲面表示成 $\phi = t - \psi(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 的形式, 那么, $n$ 个变量 $x$ 的函数 $\psi$ 就满足微分方程 $Q(-1, \psi_{x1}, \cdots, \psi_{xn}) = 0$, 其中系数里的 $t$ 必须用 $\psi$ 代替.

微分方程的方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_i = Q_{\xi_i}, & (11) \\ \dot{\xi}_i = -Q_{x_i}, & (11a) \end{cases}$$

而 $Q(x,\xi)$ 是它的一个积分. 在每条射线的一个点上附加条件 $Q=0$, 于是 (11) 与 (11a) 连同 $Q=0$ 一起确定一个 $2n$ 参数的特征带族. 这个族的确定与那些特定的特征曲面 $\phi=$常数无关.

如果选定 $x_0=t$ 并将 $Q(\xi)=0$ 解成

$$\xi_{-}\chi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$$

的形式, 那么又得到 $\dot{x}_0=1$, 即 $\lambda$ 可以和时间 $t$ 等同起来：$\lambda=t=x_0$.

假定已经知道了 $\phi(x)$, 那么, 在 $Q$ 里用仅依从于 $x_0,\cdots,x_n$ 的 $\phi_{x_i}$ 值代替 $\xi_i$ 之后, 方程组 (11) 当然就确定了特征曲面 $C_c$：$\phi=$常数$=c$ 上的双特征.

为了构造经过 $n$ 维初始曲面 $\mathscr{F}$ 上的一个指定的 $n-1$ 维流形 $\mathscr{F}'$ 的特征曲面 $\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0$, 可以假定 $\mathscr{F}$ 的形式是 $x_0=0$, 因为任何 $n$ 维初始曲面 $\mathscr{F}$ 皆可变换为 $x_0=0$ 而同时保持特征元素不变. 在 $\mathscr{F}$ 上给定初始值

$$\phi(0,x_1,\cdots,x_n)=\omega(x_1,\cdots,x_n),$$

使 $\mathscr{F}'$ 由 $\omega=0$ 确定. 于是由计算 $\phi_i$ 在 $\mathscr{F}$ 上的初始值而定出经过 $\mathscr{F}$ 的双特征线及带. 因为当 $t=x_0=0$ 时有等式 $\phi(0,x_1,\cdots,x_n)=\omega(x_1,\cdots,x_n)$, 所以 $\phi_i=\omega_{xi}, i=1,\cdots,n$. 因此在 $t=0$ 时 $Q(\phi_0,\omega_{x_1},\cdots,\omega_{x_n})=0$ 是 $\phi_0$ 的初始值的一个 $mk$ 次的代数方程, 它确定了 $\phi_0$ 的 $mk$ 个 (或少于 $mk$ 个) 实的初始值. 于是 (11), (11a) 给出同样数目的双特征带, 这些特征带产生同样数目的特征流形族 $\phi=0$, 它们都是由初始流形 $\mathscr{F}'$ 伸张出来的.

特别重要的是当初始流形 $\mathscr{F}'$ 缩为一个点的情况. 定义：

由过一定点 $O$ 的双特征线所构成的曲面为过点 $O$ 的射线劈锥面, 由过 $O$ 的所有双特征方向所构成的锥面为过 $O$ 的局部射线锥面或 Monge 锥面. 如果 $L$ 的主要部分的系数都是常数, 因而形式 $Q$ 是常系数的, 那么这些射线都是直线而局部射线锥面与射线劈锥面重合.

在 6.1.8 中曾指出, 局部射线锥面与法锥面是对偶的. 即使法锥面是较简单的 $mk$ 次代数锥面, 射线锥面也可能具有奇异性或有孤立的射线而未必构成几部分光滑的锥壳[①] (见 6.3.5 及 6.3′ 中的例子). 例如, 三维空间里的一个三阶微分算子 $L=D_0D_1D_2$ 导致

$$Q(\xi)=\xi_0\xi_1\xi_2.$$

① 有时不把局部射线锥面看成是由它的射线 (母线) 生成的而把其看成是由它的支撑平面 (切平面) 生成的更适当些.

过 $\xi$ 空间里的一个点 $O$ 的法锥面是由分别平行于坐标面的三个平面组成的, 而射线显然就是 $x$ 空间里平行于坐标轴的直线. 所以射线锥面退化为三条直线, 并且, 经过 $\mathscr{F}$ 上的非退化的初始流形 $\mathscr{F}'$ 而平行于坐标轴的三个正柱面构成特征面.

最后借助于第 2 章中的完全积分的理论, 可以把一阶偏微分方程 $Q=0$ 的一些解作为另一些解族的包络面而造出来. 下边就来解释这个理论正是 Huygens 的波前作图法.

### 6.3.5 波前与 Huygens 的构图法. 射线曲面与法曲面

如同 6.2.1 中所述, 特征曲面由于它是 $L[u]=0$ 的解 $u$ 的间断性的可能载荷者而具有重要的意义. 同前所述, 易知仅发生于 $m$ 阶导数中的跳跃性间断在跨过一个 "自由" 曲面 $C$ 时不能出现, 在其上 $Q\neq 0$. 在这样的一个曲面上, 任意的 Cauchy 数据唯一地确定了第 $m$ 阶导数, 所以在跨过 $C$ 时它们不可能是间断的. 换句话说, 仅仅在特征曲面上才可能有这种间断性. 对于其他类型的间断性, 特征曲面是容许出现间断性的唯一场所, 其作用将在 6.4 中予以分析①.

特征劈锥面之所以重要是因为其代表着集中在一点 $O$ 处的初始扰动的传播. 这样的扰动称为以 $O$ 为中心的 "球面" 波前 (见第 2 章 2.9 和第 6 章 6.18).

在常系数的情况, 所有的射线都是直线, 法锥面和射线锥面都和顶点 $O$ 无关. 以 $O$ 为顶点的射线锥面是由直线构成的, 它是过点 $O$ 而垂直于法锥面 $Q(\tau,\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$ (其中 $\tau=\xi_0$) 的平面的包络, 或者说这些平面支持着这个射线锥面②. 这里选定 $t=x_0$ 作为时间而用 $\xi,\tau$ 表示 $x-t$ 空间里的坐标.

前射线锥面与平面 $t=1$ 的截口称为射线曲面. 它是 $n$ 维 $x$ 空间里的一个 $n-1$ 维的曲面. 射线曲面是 $t=0$ 时在原点 $O$ 发生的扰动 $u$ 当 $t=1$ 时所达到的点的轨迹. 在这种意义上可以把它称为一个 "球面波前", 不过它也可能是由相互分离的几个部分组成的.

为了说明这种情况, 假定对于任意的 $n$ 维单位矢量 $\alpha$, 特征方程

$$Q(-v,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0$$

给出 $k$ 个实根 $v=v^k$, 于是函数

$$\phi(t,x)=vt-\alpha_1x_1-\cdots-\alpha_nx_n=vt-(\alpha x)=0 \tag{12}$$

表示在 $x$ 空间中沿 $\alpha$ 方向以法速率 $v$ 运动着的 "平面波前"③ (见第 3 章 3.3).

平面波前 (12) 在 $t=0$ 时通过原点, 该波前并不一定支托整个光滑的射线锥面, 但是可能支持着它的壳罩. 壳罩是由射线锥面的不同部分构成的, 平面 (12) 的

① 6.4, 6.9, 6.10 的作图法实际表明对任何特征曲面都存在着间断解 $u$.

② 同前所述, 不一定所有的支撑平面都是 (局部) 射线锥面的切平面, 因为射线锥面可能有凹的部分和孤立的射线.

③ 本质上这就是双曲性的假定 (见第 3 章 3.2 与 6.3.7).

一些块块把它们连在一起, 这些块块沿着两条双特征线和射线锥面相切而将射线锥面的不同部分在这些双特征线之间架接起来 (参考 6.1.8). 除了壳罩之外, 在有些情况下可能发生复杂的几何形状. 要给出一个直观而具有一般性的描写似乎还是一个幻想.

这使得在 6.1.8 中所包含的下述事实更加重要了：对于一个给定的方向 $\alpha$, 考虑由 (12) 给出的平面波, 它的最大速率是 $v(\alpha)$. 现在改变 $\alpha$, 在时刻 $t$ 这些波前支持着法锥面的凸壳 $\varGamma$. 所以壳 $\varGamma$ 是点 $O$ 处的初始扰动的外 “球面波前”. 可以说射线锥面的不在 $\varGamma$ 上的 “靠内” 部分表示较缓慢的 “传播状况”. 在 6.3.7 中将还要继续讨论这个问题. 6.3′ 中的例子将说明可能发生的几何多样性.

在非常系数的情况, 相应的球面波不再是平面波前的包络了. 这时考虑更一般的类平面波前, 即特征偏微分方程 $Q(\phi_{x_0}, \phi_{x_1}, \cdots, \phi_{x_n}) = 0$ 的解 $\phi(t, x)$ 之中当 $t = 0$ 时的初始值为 $(\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ 时, 其中 $\alpha$ 为任意单位矢量. 在 $x$ 空间中进行着的类平面波前 $\phi = 0$ 可能丧失其初始的平面形状, 但是它们仍旧和常系数情况中的平面波前一样造成射线劈锥面和壳罩 $\varGamma$.

下面的 Huygens 构图法是这种步骤的一种有用的变更, 它不是给出射线锥面而是给出射线曲面：为简明计, 仍假定系数是常数并考察在 $t = 1$ 时的平面波前 $v - (\alpha x) = 0$, 其中

$$Q(-v, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0,$$

而 $\alpha$ 是一个单位矢量. 当 $\alpha$ 沿单位球面变动时, 矢量 $(v\alpha_1, \cdots, v\alpha_n)$ 描遍法速曲面 (9b) 而平面族 $v - (\alpha x) = 0$ 以射线曲面为包络.

因为逆法面本身没有物理意义并且一般地说是次数较法曲面高的高次代数曲面, 所以还是按下述方式表明这两个曲面之间的联系为好. 射线曲面是法曲面 (9) 的切平面 (或支持平面) 关于单位球面的极点的轨迹. 这是显然的, 因为平面 (12) 是法曲面上的点的极平面 (参考 6.1.8).

在 6.3′ 的例子中, 将看到对于高阶方程来说射线曲面的这个作图法不仅显示了射线曲面的退化的可能性 (退化为孤立的点) 并且也显示出同峻峭脊线之类的奇异性质. 与 6.1.8 中的注记相呼应, 应当指出, 考虑支持平面较之仅考虑切平面要好些, 并且按支持平面去考虑包络的概念也要好些. 任一射线曲面与法曲面之间的关系是对称的, 彼此互为对方的支持平面的极点的轨迹. 这样的一个几何定义可以分别适用于这些曲面的各叶.

有时, 射线曲面的一条孤立的射线对应着法曲面的一叶平面 (对于逆法面或法速曲面来说相应的叶是球面).

最后指出, 在非常系数的情况下, 法速曲面和射线曲面概念的含意不变, 它们都是一点处局部性质的刻画, 二者之间的关系也和上面所说的完全一样.

**例 6.3.1** 下面的三阶方程是一个例子：

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]u=0.$$

它的特征方程是

$$(\phi_t-\phi_y)(\phi_t+\phi_y)^2=\phi_x^2(2\phi_t+\phi_y).$$

法锥面在 $\tau,\xi,\eta$ 空间里的方程是

$$(\tau-\eta)(\tau+\eta)^2=\xi^2(2\tau+\eta).$$

所以法曲面是 $\xi,\eta$ 平面上的三次曲线 (Descartes 叶线)：

$$(-1-\eta)(-1+\eta)^2=\xi^2(-2+\eta),$$

其形式如图 6-1 所示. 图中表明了法锥面是怎样分为不同的分支的. 这里有一支是卵形线, 其他两支与卵形线相接触并且延伸向无穷远. 两支在接触点成尖角, 在跨过接触点时它们有解析的联系而全体构成一个自交的代数曲线.

在图 6-2 中画出了射线曲面, 在两点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ 之间的线段是法曲面上的二重点的像. 射线曲面的介于这两点之间的带有尖角的部分是法曲面的延伸向无穷远的分支的像. 射线曲面的其余的凸部是法曲面的卵形部分的像.

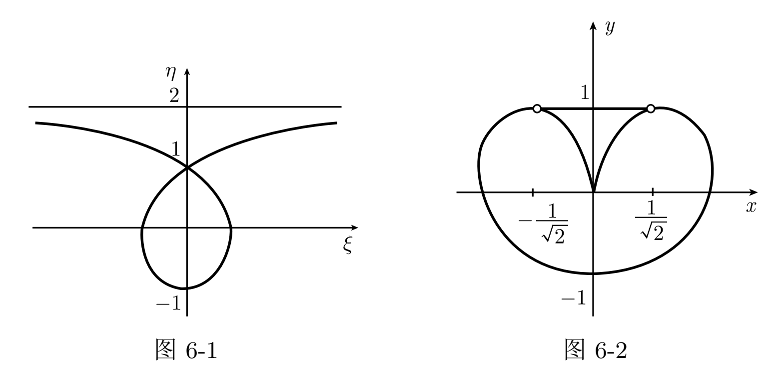



图 6-1　　图 6-2

这个例子虽然有些拼凑的意味, 但却表明了射线锥面与射线曲面的几何构造的两种可能的特异性质. 如果法曲面具有二重点, 则射线曲面和射线锥面可能是非凸的, 为了构成它的凸壳, 必须加上一个盖子. 如果法曲面具有延伸向无穷远的分叶或者具有拐点, 则射线曲面将有孤立的尖点. 在 6.3′ 中将会遇到呈现这种性质而具有物理意义的例子.

### 6.3.6 不变性

特征形、特征矩阵以及双特征线在坐标变换之下都是不变的. 同前所述, 这个

论断直接得自这些概念的定义, 特别是得自内导数的不变性也得自双特征线都是特征曲面之间的接触线这个事实. 这些不变性的解析证明完全和 6.1.5 相仿.

### 6.3.7　双曲性. 类空间流形、类时间方向[①]

关于特征曲面或者法锥面的实质至今还没有作过特别的假定. 然而本章的主要目的 —— 解决 Cauchy 问题, 所需要的还不只是这些曲面的实的分支的存在性. 为了保证 Cauchy 问题的可解性, 必须提出一种更严格的双曲性条件. 可以把这种可解性和双曲性概念视为等价的. 不过, 对于数学物理来说, 更方便的是提出某些可以用代数或几何判据来证实的条件, 并且要它们足以保证尽可能广泛的一类问题的解的存在性. 双曲性的此类定义[②]的各种提法的要旨在于最大限度地抓住代数法锥面的实质.

**定义:** 如果存在着通过点 $O$ 的矢量 $\zeta$ 而包含 $\zeta$ 的每一个二维平面 $\pi$ 都和法锥面 $Q(\xi)=0$ 相交出 $mk$ 个实的不同的直线, 则称算子 $L[u]$ 在点 $O$ 处[③]是双曲的.

定义的代数条件是如果 $\theta$ 是不与 $\zeta$ 平行的任一矢量, $\lambda$ 为一参数, 则直线 $\xi=\lambda\zeta+\theta$ 必定和法锥面相交于 $mk$ 个不同的实点, 即 $\lambda$ 的方程

$$Q(\lambda\zeta+\theta)=0 \tag{13}$$

必须有 $mk$ 个不同的实根. 点 $O$ 处的空间元素凡与矢量 $\zeta$ 相垂直者称为类空间的, $\zeta$ 称为类空间的法矢量. 类空间的面元将射线锥面分为“前向”部分和“后向”部分[④].

为了便于应用, 给出双曲性的等价的第二个定义, 它强调的是类空间曲面的概念.

首先注意, 可以把任一矢量 $\theta$ 分解为平行于 $\zeta$ 和垂直于 $\zeta$ 的支量, 并且可以把前者和 $\zeta$ 合并起来. 其次, 根据 6.3.6 中所说的不变性, 可以假定 $\zeta$ 的支量是 $(1,0,0,\cdots,0)$, 因而 $\theta$ 的第一个支量是 0. 于是 $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ 变成 $Q(\lambda,\theta_1,\cdots,\theta_n)=0$.

这个注记容易得出下列另一个定义:

如果对于 $n$ 维流形 $\mathscr{F}$ (或者它的一个元素)—— 不妨利用适当的坐标变换将它写成 $x_0=0$ 上的每一个点和任意的实数组 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 来说, 方程 $Q(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$ 具有 $mk$ 个不同的实根 $\xi_0$, 则称 $\mathscr{F}$ (或者其相应的元素) 为类空间的. 按照 6.3.4 中的说法, 这就意味着由 $x$ 空间的每一个 $n-1$ 维的初始流形 $\mathscr{F}$ 伸张出 $mk$ 个不同的特征叶片.

---

① 与 3.6.2 比较.

② 参考第 3 章 3.6.2.

③ 应当再次强调, 双曲性是 $L$ 或 $Q$ 的一种局部性质, 并且可以仅就通过所考虑的点 $P$ 的面元而论. 对于拟线性算子, 双曲性还依赖于局部的 Cauchy 条件.

④ 注意, 在投影空间里解释时, 这些部分在无穷远点是相连接的.

如果有通过点 $O$ 的此种类空间流形 (或元素), 则称 $L[u]$ 在点 $O$ 处是双曲的. 点 $O$ 处的类空间法矢量 $\zeta$ 构成法锥面的内 "核", 其边界为锥面的内叶.

法锥面的核是凸的. 这个重要的定理几乎是直接得自定义. 如果它是错误的, 那么在核内将会有矢量 $\zeta$, 通过 $\zeta$ 的有些平面和内叶相交多于两次, 因而它们都和法锥面相交多于 $mk$ 次. 从几何上说, 可以把法锥面看做是由包围着内 "核" ($\zeta$ 指入其内) 的封闭的内叶和其余依次套在核上的外叶构成的. 这些外叶可以是封闭的, 也可以延伸向无穷远. 在任何情况下, 通过 $\zeta$ 的一切平面 $\pi$ 都和法锥面相交出 $mk$ 条不同的直线.

由垂直于法锥面的凸内叶的母线的那些平面所支托着的锥面是局部射线锥面的凸壳 $\Gamma$. 确切地说, 是它的外壳[①]的罩子 (证明见 6.1.8). 定义: 任一由 $O$ 指向这个外壳内部的方向均称为类时间的方向; $x$ 空间里的曲线, 如果它的方向处处是类时间的, 则称此曲线为类时间的[②].

显然, "类空间" 与 "类时间" 的概念皆与坐标系无关.

对于单独一个二阶方程来说, 法锥面只有一层, 局部射线锥面也只有一层 (见 6.1), 这种情况显然也符合这里所讨论的方案.

由此将前几节中在各种情况下对于特征锥所作的观察与有关的定义作一概括是有益的. 如果法锥面的 $k$ 次代数条件确定了一个最大数目的实的而且是彼此分离的叶面, 则在互逆的变换之下, 每一叶对应着局部射线锥面的不同的一叶, 亦即一个不同的 "波前的传播状况". 法锥面的凸内核变为局部射线锥面的外壳, 它自动地成为凸曲面. 如果法锥面是由一套凸叶组成的, 则射线锥面也是这样. 不然后者可能包含孤立的射线或者某种奇异性[③].

一般地, 上述关于各叶的分离性的假定是不成立的. 对于数学物理来说, 根 $\lambda$ 的互异性条件是太苛刻了, 因为在许多有关的情况下重根 $\lambda$ 是要发生的, 因而代数法锥面的几个叶可以相互接触、交截、或者甚至完全重合[④]. 在 6.3.9 中将看到, 不难将定义 1 或 2 推广, 使它们概括具有一致的多重性的特征曲面的情况[⑤]. 但是即使是像 $u_{x_0x_1x_2}=0$ 这样简单的微分方程, 虽然其 Cauchy 问题显然是可解的, 仍然不属于定义的范畴之内.

对具有不完全分离的叶的法锥面的微分方程来说, 恰当地推广双曲性的概念是

① 再强调这个事实 —— 这里完全没有必要谈到射线锥面的内叶. 它可能是由与法锥面的各叶相对应的各个闭叶组成的, 这些闭叶也都套在核上. 但是射线锥面可能具有一种迥然不同的结构.

② 有与此定义不等价的其他定义, 参考 F. John[4]157 页.

③ 注意, 代数曲面理论的目前水平尚不能完全令人满意地来用以解决在这里所碰到的真实的几何结构问题.

④ 这样的多重性对于理论研究仍然是严重的障碍. 对多数一阶方程组来说, 例如 Maxwell 方程组, 重根总是要发生的. 显然, 具有任何预先指定的代数法锥面的单个 $K$ 阶微分方程都可以构造出来.

⑤ Gårding 等人由考虑微分方程中低阶项的影响而对常系数的情况 (并且在一定限度上推广到非常系数的情况) 成功地推广了双曲性的概念 (参考 L.Gårding [2] 与 A. Lax[1]).

困难的[①], Cauchy 问题的研究需要更精密的分析. 不过所幸的是, 在数学物理中只要 $Q(\lambda\zeta+\theta)=0$ 的根 $\lambda$ 都是实的, 那么平面 $\pi$ 与法锥面重复交截所引起的困难一般说来并不与问题的解的唯一性和存在性的证明相牵涉. 原因在于数学物理方程一般来说都是对称的[②]. 特别是一阶的对称双曲型方程组已经呈现为最关注的中心论题. 在数学物理的文章中非对称的方程组是次要的.

### 6.3.8 对称双曲型算子

考察线性的 (或拟线性的) 一阶对称方程组, 即形式如下的方程组:

$$L[u]=\sum_{0}^{n}A^i u_i+Bu, \tag{14}$$

其中矩阵 $A^i$ 是对称的, 但矩阵 $B$ 不必一定是对称的.

如果矩阵 $A^i$ 之一或者一个线性组合

$$\sum \xi^i A^i$$

是定号的, 例如说是正定的, 则对称方程组 (14) 称为 (在点 $O$ 处是) 对称双曲型的. 垂直于矢量 $\xi$ 的 $n$ 维流形 $\mathscr{F}$ 称为类空间的. 因为正定矩阵的带有正权的线性组合仍是正定的, 所以又推出这种与类空间元素垂直的矢量 $\xi$ 的集合构成一个凸锥.

例如, 如果 $A^0$ 是正定的, 则 $n$ 维空间 $x_0=t=$常数就是类空间的.

可以看出, 对称双曲型算子的概念和 6.3.7 中的定义的密切关系如下所述. 为简单起见, 假设 $A^0$ 是正定的, 对于 $\xi_0=1,\xi_1=\cdots=\xi_n=0$, 方程

$$Q(\lambda\xi+\theta)=Q(\lambda,\theta_1,\cdots,\theta_n)=0$$

确有 $k$ 个实根, 因为它显然是对称的行列式方程

$$\left\|\lambda A^0+\sum_{1}^{n}\theta_i A^i\right\|=0, \tag{15}$$

其中 $A^0$ 是正定的. 根 $\lambda$ 都是矩阵 $\sum\theta_i A^i$ 关于正定矩阵 $A^0$ 的本征值. 主要的差别在于对称双曲性的定义中并未假定 (15) 的根 $\lambda$ 都是单根. 事实上, 在 6.8, 6.10 中即将看到对称方程组的 Cauchy 问题总是可解的.

下面的论述是和物理学中许多例子相切合的. 如果 $A^0$ 是正定的, 可以利用线性变换把方程组 (14) 化为

---

① 比较第 5 章 5.8.

② 有时这种对称性与下述事实有密切的联系, 即这些方程通常都是某个二次变分问题的 Euler 方程.

$$L[u]=\tilde{L}[v]=v_t+\sum_{i=1}^{n}\tilde{A}^i v_i+\tilde{B}v, \tag{16}$$

其中 $\tilde{A}^i,\tilde{B},v$ 表示经过变换得来的量, 并且矩阵 $\tilde{A}^i$ 仍旧是对称的①.

甚至于在重根的情况, 特征矩阵也有完全的一组 $k$ 个独立的左本征矢量 $l(l=r)$, 不论曲面是否多重的特征曲面 (重特征曲面对应着多个线性独立的零化矢量 $l$), $lL[u]$ 都是相应的特征曲面上的内算子.

### 6.3.9 高阶对称双曲型方程

最后应当指出关于高阶的单个方程或方程组的一个注记. 如果该方程或方程组是由一个一阶的对称双曲型方程组经过消去后所得的结果, 那么也应当把它们称为对称双曲型的, 并且也被包括在一阶的对称双曲型方程组的理论之中.

例如

$$u_{x_0x_1x_2}=0$$

就是由

$$u^1_{x_0}=u^2,\quad u^2_{x_1}=u^3,\quad u^3_{x_2}=0$$

这些对称的方程组得来的.

值得注意的是任何单个的二阶双曲型微分方程都可以化为一个一阶的对称双曲型方程组. 把 $u$ 的微分方程写成 (参考 6.1) 下列的明显形式

$$L[u]=u_{tt}+2\sum_{i=1}^{n}a^i u_{it}-\sum_{i,k=1}^{n}a^{ik}u_{ik}+\cdots=0, \tag{17}$$

其中的三个点表示 $u$ 的不高于一阶导数的项, 并且 $a^{ik}=a^{ki}$.

假定 (17) 是双曲型的并且 $t=$常数是一个类空间的曲面, 于是二次型 $H(\xi_i,\xi_k)=\sum_{i,k=1}^{n}a^{ik}\xi_i\xi_k$ 是正定的, 并且点 $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$ 落在椭球

$$1+2\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i-H(\xi_i,\xi_k)=0$$

之内. 事实上, 如果方程

$$(\lambda-\tau)^2+2(\lambda-\tau)\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i-H(\xi_i,\xi_k)=0$$

① 变换是

$$\tilde{L}[v]=TLT(v),$$

所以

$$\tilde{A}^j=TA^jT.$$

由于 $A^0$ 是正定的, 故它有平方根 $C:A^0=C^2$. 现在取 $T=C^{-1}$. 显然 $\tilde{A}^0=I$, 并且由于 $T$ 是对称的, 所以矩阵 $\tilde{A}^j$ 也都是对称的.

有符号相反的两个实根, 那么以 $(\tau, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为法矢量的面元是类空的.

为了完成上述还原, 在 (17) 中直接用新的未知函数 $v^0, v^i$ 分别代替一阶导数 $u_t, u_x$. 于是得到矢量 $v = (v_0, \cdots, v_n)$ 的方程组

$$\left.\begin{aligned} &v_t^0 + 2\sum a^i v_{x_i}^0 - \sum_{i\cdot k=1}^{n} a^{ik} v_{xk}^i + \cdots = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} a^{ik}(v_t^k - v_{x_i}^0) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}\right\}$$

这个方程组是对称的并且是双曲型的①. 同前所述, 如果以所给的 $u_i$ 和 $u_t$ 的初始值作为 $v$ 的初始值, 则不难证明这两个问题是等价的.

### 6.3.10 多重特征曲面叶和可约化性

可以补充一个关于未必对称的一阶方程组的一般情况的注记. 在 6.3.7 中的第二个定义中所说的特征曲面的 $k$ 扇叶片 $C^\kappa$ 对应着 $k$ 个线性独立的零化矢量 $l^1, \cdots, l^k$, 使得算子 $l^\kappa L[u]$ 是特征曲面叶 $C^\kappa$ 上的内微分算子. 现在, 假定这些特征曲面叶中的 $s$ 个相互重叠, 例如 $C^1, \cdots, C^s$, 但是对于曲面 $\phi(x)$ 仍然有矩阵 $A$ 的 $s$ 个线性独立的零化矢量 $l^1, \cdots, l^s$, 并且在整个特征曲面上都是如此②. 那么, 整个特征曲面 $C$ 就称为 $s$ 重的, 并且所有这 $s$ 个微分算子 $l^i L (i = 1, \cdots, s)$ 都是 $C$ 上的内算子.

仍可以把这样的算子 $L[u]$ 称为双曲型的 (广义的), 虽然上面假定了 $A$ 在 $C$ 上的秩是 $k - s$.

这个多叶重叠的现象和特征形 $Q(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ 的出现可约化性有密切的关系, 可约化性的意思指的是能分解为次数较低的不能再分解的因子的乘积③:

$$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_j \cdots ,$$

特别是 $s$ 个恒等因子 $Q_i$ 的发生与多重特征曲面的情况有密切关系.

特征曲面必须适合方程 $Q_j = 0$ 中的一个. 进一步说, 如果假定方程是双曲型

---

① 事实上, 它的形式是 $A^0 v_t + \sum_{\nu=1}^{n} A_i^\nu v_\nu + \cdots = 0$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}, \quad A^\nu = \begin{pmatrix} 2a^\nu & -a^{\nu 1} & \cdots & -a^{\nu n} \\ -a^{\nu 1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^{\nu n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

② 在这里不讨论两叶或多叶 $C^\kappa$ 仅仅相交或接触的情况 (参考 M. Yamaguti and K. Kasahara [1]).

③ 特别地, 这种情况发生于当方程组 $L[u] = 0$ 是由几个小组构成的时候, 在每一个小组里只包含未知函数中的几个的导函数而各个小组仅由低阶项关联着 (弱关联).

的, 即有 $k$ 个线性独立的零化矢量 $l^k$, 那么每一个方程 $Q_j=0$ 恰巧给出 $k_j$ 个线性独立的零化矢量 $l^i$, 这里 $k_j$ 是多项式 $Q_j$ 的次数. 如果因子 $Q_j$ 之中有 $s$ 个彼此恒等, 那么相应的特征曲面是 $s$ 重的, 对此曲面来讲, 有 $s$ 个线性独立的零化矢量.

反之, 简单的代数道理表明, 按照定义 $s$ 重特征曲面叶的出现必然推出 $Q$ 可约化为 $Q_1^s\cdot Q_2$ 的形式.

应当强调指出, 在可约化的情况下, 双特征线也应该根据相应的不可约因子 $Q_j$ 去定义 (在多叶重叠的情况必须这样定义) 而不是根据 $Q$.

如前所述, 可约化性和多叶重叠出现于物理学的许多方程中, 例如 Maxwell 方程, 磁性流体波的线化方程, 弹性波方程 (6.3′ 和 6.13′). 特征曲面叶的接触和相交也经常遇到①. 不过, 在这些情况下方程组都是对称双曲型的, 这种多重性对唯一性和存在性的证明并不引起什么困难 (但是在研究奇性的传播和有关论题时需要特别注意).

### 6.3.11 关于双特征方向的引理

为了 6.4 中的应用, 在本节中补充下面一些注记.

**引理:** 在固定的点 $x$ 处, 把特征方阵 $A$ 看成变量 $\xi_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}(i=0,\cdots,n)$ 的一个函数, 并且受条件 $\|A\|=Q(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$ 的约束. 如果 $A$ 的秩是 $k-1$, 那么沿双特征射线的求导由下列关系给出:

$$\dot{x}_i=lA_{\xi_i}r\quad(i=0\cdots,n),$$

其中 $x$ 上边的点表示沿着双特征射线对于一个适当曲线参数求导, $l$ 和 $r$ 分别表示矩阵 $A$ 的左零化矢量和右零化矢量.

证明可由直接计算完成② 然而将进行如下间接推理.

① 可以猜想, 这种多重性对于微分方程组必定会发生. 特别是可以看出每一个含有奇数个方程的方程组有重根. 在一般情况下这个猜想的证实似乎会是一个有趣的代数问题.

② 在一阶方程组的情况下, $A=\sum A^\nu\xi_\nu$, 用 $a_\nu^{ij}$ 记 $A^\nu$ 的元素, 并注意 $Q\xi_\nu=\sum\limits_{i,j=1}^{k}a_\nu^{ij}\mathfrak{a}^{ij}$, 其中 $\mathfrak{a}^{ij}$ 是行列式 $\|A\|$ 中 $a^{ij}=\sum\limits_{i=0}^{n}a_\nu^{ij}\xi_v$ 的子式. 按假设, 可以认为 $\mathfrak{a}$ 的一个行或列的诸子式相应地就是零化矢量 $r$ 或 $l$, 因而它们除一个标量因子之外, 被唯一地确定了. 有 $\mathfrak{a}^{11}:\mathfrak{a}^{1j}=\mathfrak{a}^{j1}:\mathfrak{a}^{i}(i,j=1,\cdots,k)$, 或

$$\frac{1}{\alpha}\mathfrak{a}^{ij}=\mathfrak{a}^{1j}\mathfrak{a}^{i1}=l_ir_j,$$

其中 $l_i=\mathfrak{a}^{i1},r_j=\mathfrak{a}^{1j}$ 分别是矢量 $l$ 和 $r$ 的支量并且 $\dfrac{1}{\alpha}=\mathfrak{a}^{11}$ (可假定 $\mathfrak{a}^{11}\neq0$). 由于

$$lA^\nu r=\sum_{i,j=1}^{k}l_ia_\nu^{ij}r_j=\sum_{i,j=1}^{k}\frac{1}{\alpha}a_\nu^{ij}\mathfrak{a}^{ji},$$

所以

$$\alpha lA^\nu r=Q\xi_\nu.$$

考虑在一定点 $O$ 处的所有的特征面元, 其皆垂直于法锥面的叶片而由参数组 $\xi_0, \cdots, \xi_n$ 所确定, 后者除了受条件 $Q(\xi_0, \cdots, \xi_n) = 0$ 的限制之外是独立的变量. 矢量 $r$ 和 $l$ 都是 $\xi$ 的函数.

取方程 $Ar = 0$ 的微分, 得到

$$A\mathrm{d}r + \sum_{i=0}^{n} A_{\xi_i} r \mathrm{d}\xi_i = 0.$$

以 $l$ 乘之并注意 $lA = 0$, 则此等式化为

$$\sum_{i=0}^{n} lA_{\xi_i} r \mathrm{d}\xi_i = 0.$$

因为变量 $\xi_i$ 受条件 $Q(\xi_0, \cdots, \xi_n) = 0$ 的限制, 所以微分 $\mathrm{d}\xi_i$ 不完全是独立的而需满足下列线性关系：

$$\mathrm{d}Q = \sum_{0}^{n} Q_{\xi_i} \mathrm{d}\xi_i = 0.$$

因为 $\mathrm{d}\xi_i$ 的 $n$ 个支量可以任意选取, 从这些关系立即得知, 量 $\partial Q/\partial \xi_i$ 和 $lA^i r$ 是成比例的, 这就证明了引理.

这个结果可以推广到当 $A$ 在所考察的整个区域上具有秩数为 $k-s$ 的重特征叶片的情况. 特征曲面的这样的一个叶片适合如下形式的一个方程：

$$\xi_0 = f(\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

矩阵 $A$ 具有线性独立的右零化矢量 $r^1, r^2, \cdots$ 和左零化矢量 $l^1, l^2, \cdots$. 于是对任意的 $i$ 和 $j$ 有

$$l^j A^\nu r^i = -l^j A^0 r^i f_\nu.$$

所以不论 $i$ 和 $j$ 取何值, 比例

$$l^j A^\nu r^i : l^j A^0 r^i = -f_\nu \quad (\nu > 0)$$

总是成立的.

证明完全和上述一样. 在一个定点 $x$ 处考察方程

$$Ar^i = \sum_{\nu=0}^{n} A^\nu \xi_\nu r^i = 0,$$

其中 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为独立的参数. 微分之, 并且 $l^j$ 左乘其结果, 则同前所述, 得到

$$\sum_{i=0}^{n} l^j A^\nu r^i \mathrm{d}\xi_\nu = 0,$$

对于所考察的叶片来说, 其中 $\xi_0 = f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 并且

$$\mathrm{d}\xi_0 = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \mathrm{d}\xi_\nu$$

是限制参数 $\mathrm{d}\xi_\nu$ 的唯一的条件. 所以

$$l^j A^\nu r^i + l^j A^0 r^i f_\nu = 0 \quad (\nu > 0).$$

# 6.3′ 例. 流体动力学、晶体光学、磁流体动力学

## 6.3′.1 引言

在本节中将考察三个例子①, 用以说明 6.3 的一般理论.

第一例子 —— 流体动力学 (拟线性) 微分方程组, 表明特征、射线和射线劈锥面的物理意义.

第二个例子 —— 晶体光学方程组, 显示出各向异性的重要特点. 波的传播速度和它的传播方向有关, 在晶体光学中, 法曲面和射线曲面都是四次曲面, 因而比流体动力学的情况更为复杂.

第三个例子 —— 磁流体动力学方程组, 说明法锥面、特别是射线劈锥面在现实物理问题中可能有的复杂结构.

G. F. Duff② 研究了各向异性弹性波方程组的更复杂的例子. L. Gårding③ 给出了一些例子, 它们显示出了法曲面、射线曲面和依赖区域的严重退化性质.

在对称双曲型方程组的情况下, 证明 Cauchy 问题解的存在性和唯一性时没有什么特殊的困难 (见 6.8.10). 然而对于非对称的方程组或者单个高于二阶的方程来说, 法锥面的可能的复杂几何结构, 特别是多重元素, 引起了尚未完全解决的困难④, 即使在对称双曲型方程组的情况, 解的结构的详细分析, 特别是奇性传播的探讨, 也受到特征曲面的复杂几何性质的阻碍. 因此, 6.4 中的分析仅能直接用于特征方程的根的重数不变的情况.

## 6.3′.2 流体动力学微分方程组

作为非线性问题的一个例子, 考察在 $xy$ 平面上描写可压缩流体运动的微分方程组 (在第 5 章 5.33 中已经讨论过定常流的情况). 如果用 $u(x,y,t), v(x,y,t)$ 记流

---

① 遵照物理学中的惯例, 将在这一节中用一些特别的记号. 读者应当把其纳入 6.3 的记号系统里.

② 参考 G. F. Duff[2] 和 V. T. Buchwald[1].

③ 参考 L. Gårding[4].

④ 关于具有多重特征的单个方程的讨论, 参考 L. Gårding[2] 和 A. Lax[1].

体的速度支量, 用 $\rho(x,y,t)$ 记密度, 并且和前述一样, 用 $p(\rho)$ 表示压强, 它是密度的函数, 而 $p'(\rho)>0$, 于是拟线性的 Euler 运动方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\rho u_t+\rho u u_x+\rho v u_y+p'\rho_x=0,\\&\rho v_t+\rho u v_x+\rho v v_y+p'\rho_y=0,\\&\rho_t+u\rho_x+v\rho_y+p(u_x+v_y)=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

假定已知 $u,v,\rho$ 沿流形 $\phi(x,y,t)=0$ 的值. 则一般地, $u,v,\rho$ 的一切导数, 特别是外导数 $u_\phi,v_\phi,\rho_\phi$ 沿着这个流形上的值就被唯一地确定了. 不过, 如果在 $\phi=0$ 上或者在整个族 $\phi=$常数上特征条件

$$Q\equiv\begin{vmatrix}\rho(\phi_t+u\phi_x+v\phi_y) & 0 & p'\phi_x\\ 0 & \rho(\phi_t+u\phi_x+v\phi_y) & p'\phi_y\\ \rho\phi_x & \rho\phi_y & \phi_t+u\phi_x+v\phi_y\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

成立, 情况就不同了. 展开这个行列式, 得到

$$Q\equiv\rho^2(\phi_t+u\phi_x+v\phi_y)[(\phi_t+u\phi_x+v\phi_y)^2-p'(\phi_x^2+\phi_y^2)]=0, \tag{3}$$

然后略掉因子 $\rho^2$ 并令 $\phi_t=\tau,\phi_x=\xi,\phi_y=\eta$, 则有①

$$(\tau+u\xi+v\eta)[(\tau+u\xi+v\eta)^2-p'(\xi^2+\eta^2)]=0. \tag{3a}$$

在 $xyt$ 空间里的特征曲面 $\phi=0$ 或者在 $xy$ 平面上相应的曲线族 $t=\psi(x,y)$ (它是令 $\phi=t-\psi(x,y)$ 而得到的) 又一次表示在运动的流体中可能存在的间断性的流形, 即波前. 所以, 与 (3a) 中第一个因子相应, 得到特征曲面

$$\tau+u\xi+v\eta=0. \tag{4}$$

在 $\xi\eta\tau$ 空间里相应的法锥面②叶是一个平面. 所属的射线在 $xy$ 平面上的投影不是别的而正是流动的流线, 在 $xyt$ 三维空间里由 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v$ 确定的射线本身表示流动的流线和流动速度的配合.

与 (3a) 中第二个因子相应, 有特征流形

$$(\tau+u\xi+v\eta)^2-p'(\xi^2+\eta^2)=0, \tag{5}$$

① $\tau+u\xi+v\eta=\dot\phi$ 是一个运动着的流体微团的 $\phi$ 随时间的变化率.

② 法锥面是对于一个固定的顶点如 $t=0,x_0=y_0=0$ 和固定的 $u,v,\rho$ 值而作局部考虑的.

它是法锥面的一个二次的叶. 由比例 $\mathrm{d}t : \mathrm{d}x : \mathrm{d}y$ 所给出射线或双特征线的方向仍表示间断性的 “传播速度” 或者射线速度. 以 $t$ 为参数的射线满足 “Monge 方程” (参考 2.5)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - v\right)^2 = p', \tag{6}$$

这是不难验证的.

在声学和流体动力学中, $\sqrt{p'}$ 是声速. 所以方程 (6) 说明间断性传播的相对速度等于声速.

这些结果和它们与前面 (第 5 章 5.3.3) 叙述过的定常情况的关系可以用下面的几何解释进一步说明.

当 $u$ 和 $v$ 给定时, 假定顶点是在原点 $x = y = t = 0$, 则局部射线锥面或 $xyt$ 空间里的特征微分方程的 Monge 锥面是

$$\left(\frac{x}{t} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{t} - v\right)^2 = p'(\rho).$$

显然, 可以从原点把平面 $t = 1$ 中的圆

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = p'$$

投射而得到它. 按此圆是否包含原点 $x = 0, y = 0$, 即视 $u^2 + v^2 < p'$ 或 $u^2 + v^2 > p'$, 问题中的圆锥或者包含 $t$ 轴, 或者倾斜到那种程度以至于使得 $t$ 轴落在它的外边 (见图 6-3).

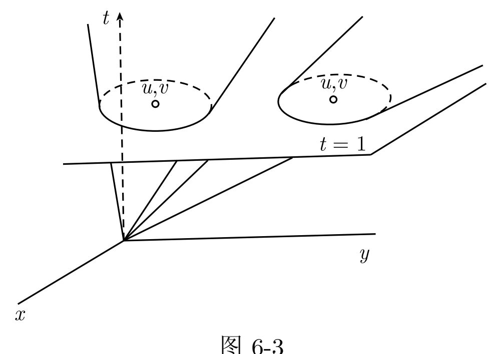



图 6-3

令所有对 $t$ 的导数等于零, 即过渡到定常的情况. 如此则仅考虑 Monge 锥的符合条件 $\phi_t = 0$ 的切平面, 换句话说, 垂直于 $xy$ 平面或者包含 $t$ 轴的切平面. 它们和锥面相接触的直线构成定常情况的两个特征方向. 既然当且仅当 $t$ 轴落在锥外时, 即当流速 $\sqrt{u^2 + v^2}$ 大于声速 $\sqrt{p'}$ 时, Monge 锥才有通过 $t$ 轴的两个不同的实的切平面. 所以明确了前述第 5 章 5.3 中关于定常流动的结论.

### 6.3′.3 晶体光学

在第 3 章 3.2 中曾由不大相同的观点推出了真空中的 Maxwell方程的特征条件. 在这里将要把 Maxwell 方程推广到晶体光学的情况. 联系磁矢量 $\mathfrak{D}$, 电矢量 $\mathfrak{E}$, 电位移 $\mathfrak{D}$ 和磁位移 $\mathfrak{B}$ 的 Maxwell 一般方程是

$$\mathrm{curl}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{D}, \quad \mathrm{curl}\mathfrak{E} = \frac{-1}{c}\dot{\mathfrak{B}}. \tag{7}$$

其中 $c$ 是光速, $\mathfrak{B}$ 上的点表示对时间 $t$ 的导数, $\mu\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ ($\mu$ 是导磁率, 通常假定等于 1). 电矢量 $\mathfrak{E}$ 的支量 $u_1, u_2, u_3$ 和电位移 $\mathfrak{D}$ 的关系是 $\mathfrak{D} = (\epsilon_1 u_1, \epsilon_2 u_2, \epsilon_3 u_3)$, 这里 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是沿三个坐标轴方向的介电常数. 不同常数 $\epsilon$ 的出现表征着介质是一种晶体.

由 (7) 立即得到 $(\mathrm{div}\mathfrak{D}) = 0$ 和 $(\mathrm{div}\mathfrak{B}) = 0$. 假定初始时刻有 $\mathrm{div}\mathfrak{D} = \mathrm{div}\mathfrak{B} = 0$, 那么在任何时刻都有

$$\mathrm{div}\mathfrak{D} = 0, \quad \mathrm{div}\mathfrak{B} = \mathrm{div}\mathfrak{H} = 0, \tag{7a}$$

将恒假定 (7a) 成立.

由 (7) 消去矢量 $\mathfrak{H}$, 得到关于电矢量的三个二阶线性微分方程:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 \ddot{u}_1 &= \Delta u_1 - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial x}, \\
\sigma_2 \ddot{u}_2 &= \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}, \\
\sigma_3 \ddot{u}_3 &= \Delta u_3 - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 $\sigma_i = (\mu/c^2)\epsilon_i$①将扼要地进行求法锥面方程、射线锥面方程和法曲面方程的代数演算. 把 $x, y, z$ 改写成 $x_1, x_2, x_3$, 有特征流形 $\phi = t - \psi(x) = 0$ 的下列方程:

$$H(\xi) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

其中 $\xi_i = \phi_{x_i}, \rho^2 = |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. 作简单的计算后得

$$\begin{aligned} H(\xi) =& (\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)(\rho^2 - \sigma_3) \\ & \cdot \left(1 - \frac{\xi_1^2}{\rho^2 - \sigma_1} - \frac{\xi_2^2}{\rho^2 - \sigma_2} - \frac{\xi_3^2}{\rho^2 - \sigma_3}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9a}$$

① 参考 6.14′.1 中关于矢量的每个支量的各个方程.

在 $\tau, \xi$ 空间里法锥面的方程是

$$\begin{aligned} Q(\tau,\xi) =&(\rho^2-\sigma_1\tau^2)(\rho^2-\sigma_2\tau^2)(\rho^2-\sigma_3\tau^2)\\ &\cdot\left(1-\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1\tau^2}-\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2\tau^2}-\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3\tau^2}\right)=0, \end{aligned} \tag{9b}$$

所以

$$H(\xi)=Q(-1,\xi).$$

因此法曲面是

$$F(\xi)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=1. \tag{10}$$

若以 $\xi_i/\rho^2$ 代替 $\xi_i$, 便得到逆法曲面 (参考 6.3.3) 的方程:

$$G(\xi)=\sum\frac{\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=1. \tag{11}$$

法曲面的另一种形式是

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}=0, \tag{10a}$$

相应的逆法曲面是

$$\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{1-\sigma_i\rho^2}=0. \tag{11a}$$

利用恒等式

$$1=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2}=\sum\frac{(\rho^2-\sigma_i)\xi_i^2}{(\rho^2-\sigma_i)\rho^2}=\sum\frac{\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i}-\frac{1}{\rho^2}\sum\frac{\sigma_i\xi_i^2}{\rho^2-\sigma_i},$$

可以从 (10) 直接计算得出 (10a), 然后又得到 (11a).

射线曲面可以看成逆法曲面的法平面的包络[①], 同样也可以作为法曲面 (10) 的切平面关于单位球的极点的轨迹.

在点 $\xi$ 处的切平面以 $\zeta_i$ 为流动坐标时的方程是 $\sum\limits_i F_{\xi_i}(\xi)(\zeta_i-\xi_i)=0$ 或 $\sum F_{\xi_i}(\xi)\zeta_i=\sum\xi_k F_{\xi k}$. 这个切平面的极点的坐标是

$$\eta_i=F_{\xi_i}(\xi)\Big/\sum_{k=1}^{3}\xi_k F_{\xi k}(\xi).$$

从这些代数方程和 (10a) 中消去坐标 $\xi_i$, 进行计算之后, 得出**射线曲面的方程**:

① 注意用这个解析方法得到的是射线曲面本身而不是直接造出它的外壳.

$$\sum_i \frac{\eta_i^2}{R^2 - \dfrac{1}{\sigma_i}} = 1 \quad (R^2 = \sum \eta_i^2). \tag{12}$$

法曲面和射线曲面都是四次代数曲面 ——“Fresnel 曲面”. 把 $\sigma_i, \xi$ 和 $\rho$ 分别与 $1/\sigma_i, \eta$ 和 $R$ 对换, 则这两个曲面的一个就变为另一个. 将在 6.3′.4 中进行分析这些曲面都是由两叶闭曲面组成的, 其中内部的一叶是凸的. 由原点将它们投射到一个四维空间里就分别得到法锥面和射线锥面. 在对射变换下, 二者之一的凸核对应于另一个的凸壳.

### 6.3′.4　法曲面和射线曲面的形状

法曲面 (10) 是一个四次曲面, 其关于原点对称. 这个曲面和每一条通过原点的直线相交于四个点, 它是由两个封闭的 “罩子” 组成的, 这两个 “罩子” 除了在四个点处相互接触之外彼此是分离的. 假定 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 这四个二重点位于 $\xi_1\xi_3$ 平面内的直线

$$\xi_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}} \pm \xi_3\sqrt{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}} = 0$$

上, 并确定了双轴晶体的主轴.

由方程 (10) 作计算即可证明这些事实. 方程 (10) 和 (12) 形式上的相似还表明相应的命题对于射线曲面也成立, 当然 $\sigma_1, \sigma_2$ 和 $\sigma_3$ 要换为它们的倒数.

用 $(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)(\rho^2 - \sigma_3)$ 乘 (10) 并按 $\xi$ 合并同类项, 发现法曲面的下列方程

$$-\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1 - \varPsi(\xi) + \rho^2\varPhi(\xi)) = 0, \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \\ &\varPsi(\xi) = \frac{\rho^2 - \xi_1^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \xi_2^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \xi_3^2}{\sigma_3}, \\ &\varPhi(\xi) = \frac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

如果 $\alpha$ 是任一单位矢量, 那么过原点而方向为 $\alpha$ 的直线是由形式为 $\xi = \rho\alpha$ 的点组成的, 其中 $\rho$ 是一个参数. $\rho^2$ 的二次方程

$$\rho^4\varPhi(\alpha) - \rho^2\varPsi(\alpha) + 1 = 0 \tag{14}$$

的根确定了这条直线和法曲面的交点. 这个方程的判别式是

$$X(\alpha) = \varPsi^2(\alpha) - 4\varPhi(\alpha). \tag{15}$$

若令

$$A_1^2=\frac{1}{\sigma_3}-\frac{1}{\sigma_2},\quad A_2^2=\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_3},\quad A_3^2=\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1},$$

不难经过计算证明对于 $\sum\alpha_i^2=1$ 有

$$X(\alpha)=\prod(\alpha_1A_1\pm\alpha_2A_2\pm\alpha_3A_3),\tag{16}$$

其中乘积包括正负号的四种组合. 因为 $A_1$ 和 $A_3$ 都是实数, $A_2$ 是纯虚数, 所以 $X$ 的因子可以配成共轭的复数对. 因此 $X\geqslant 0$. 事实上, 仅当 $\alpha_2=0$ 且 $\alpha_1A_1\pm\alpha_3A_3=0$ 时才有 $X=0$. 所以 (14) 的四个根都是实的, 并且除了 $\alpha_2=0$ 且 $\alpha_1A_1\pm\alpha_3A_3=0$ 的情况之外它们的值是不同的.

所以法曲面是由两个罩子组成的, 其方程是

$$\varPsi(\alpha)-\sqrt{X(\alpha)}=\frac{2}{\rho^2},\quad \varPsi(\alpha)+\sqrt{X(\alpha)}=\frac{2}{\rho^2}.$$

利用 $\varPsi$ 和 $\varPhi$ 的齐次性, 可以定义 $X(\xi)$ 如下:

$$x(\xi)=\varPsi^2(\xi)-4\rho^2\varPhi(\xi).\tag{17}$$

于是内罩和外罩的方程分别是

$$\left.\begin{aligned}\varPsi(\xi)+|\sqrt{X(\xi)}|=2,\\ \varPsi(\xi)-|\sqrt{X(\xi)}|=2,\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

这两个罩子仅仅在四个点处相互接触, 这四个点是在 $\xi_1\xi_3$ 平面内的直线

$$\xi_1A_1\pm\xi_2A_2=0$$

上 (见图 6-4).

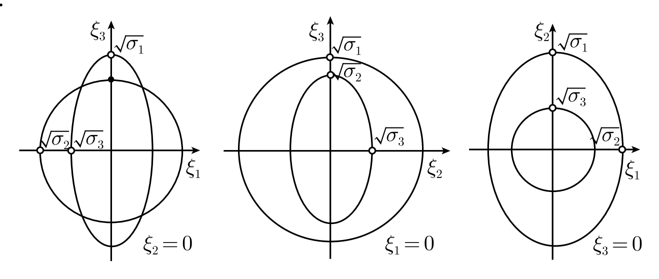



图 6-4　法曲面与坐标面的交线

为了对法曲面有一直观认识, 用坐标平面去截割它. 其与平面 $\xi_2=0$ 的交线是一个圆

$$\xi_1^2+\xi_3^2-\sigma_2=0$$

和一个椭圆

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_3}+\frac{\xi_3^2}{\sigma_1}-1=0,$$

它们相交于四个点. 当然, 这些交点就是法曲面的内罩和外罩的接触点. 在其他两个坐标面上的截线也都是一个圆和一个椭圆, 不过它们是不相交的. 在平面 $\xi_1=0$ 上的截线是

$$\xi_2^2+\xi_3^2-\sigma_1=0$$

和

$$\frac{\xi_2^2}{\sigma_3}+\frac{\xi_3^2}{\sigma_2}-1=0.$$

相仿地, 在平面 $\xi_3=0$ 上的截线是

$$\xi_1^2+\xi_2^2-\sigma_3=0$$

和

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_2}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_1}-1=0.$$

如图 6-4 所示.

由 6.3 的一般理论知法曲面的内罩必须是凸的, 外罩不是凸的. 因为它有凹向内的四个锥顶, 内罩的相应的顶是向外的.

前面已经指出过, 若将 $\sigma_1,\sigma_2$ 和 $\sigma_3$ 换成其倒数, 则对于射线曲面也有完全同样的结论. 不过要注意 6.3.5 中所指出的事实, 即当处理锥顶的时候, 需要修正对射变换的概念. 包围原点的凸曲面的象必定是另一个凸曲面. 法曲面的凸内罩对应着射线曲面的凸壳 (在图 6-5 中二者均示以粗线). 法曲面的锥顶变换为四个平面“盖子”, 把它们加到射线曲面上就作成了它的凸壳. 这些盖子不是由特征平面的包络产生的而是射线曲面本身 (可以把它表示为特征平面的包络) 的支托平面的一些部分.

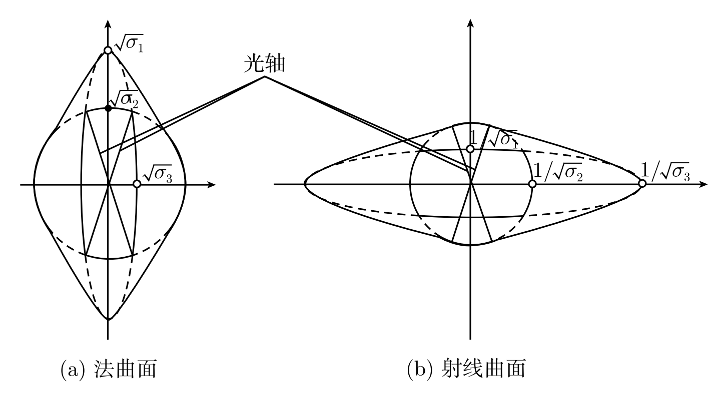



图 6-5

因为法曲面和射线曲面是互为对射的, 所以法曲面的凸壳被变换为射线曲面的内罩. 法曲面的外罩之不属于其凸壳的部分被变换为射线曲面的相应部分 (在图 6-5 中两者均示以虚线). 正像法曲面的锥顶对应着射线曲面的盖子一样, 法曲面的盖子被变换为射线曲面的锥顶. 盖子的边缘都是抛物的曲线, 即法曲面的主曲率之一等于零的点所成的曲线 (见图 6-5).

事实上, 射线曲面的盖子的边缘都是圆. 因为每一个边缘都是一个平面和一个四次曲面的接触曲线, 所以每个边缘都必须是一个四次曲线, 它的每一个点都是二重的, 所以它是一个圆锥截线. 为了看清楚盖子的边缘是一个圆, 用齐次坐标 $\eta,\tau$ 来写出射线曲面的方程：

$$\tau^4-\tau^2\Psi(\eta)+R^2\Phi(\eta)=0,$$

其中在 $\Psi$ 和 $\Phi$ 的表达式里的参数 $\sigma_1,\sigma_2$ 和 $\sigma_3$ 应换为它们的倒数. 于是射线曲面包含射影空间里的绝对圆, 其方程为

$$\tau=0,\quad R^2=0.$$

因此射线曲面的每一个平面截口都包含该平面的两个绝对点. 如果截口平面曲线退化为两条二次曲线, 那么这两条曲线之一包含这些绝对点, 所以是一个圆. 特别是, 对于盖子和射线曲面的接触曲线来说, 这个论断也是真实的 (这个推理附带地断定了射线曲面和每一个坐标平面的交线都必定包含着一个圆).

### 6.3′.5 晶体光学的 Cauchy 问题

晶体光学的一阶方程组和其他常系数微分方程组 (如磁流体动力学方程组) 的 Cauchy 问题都可以借助消元法 (参考第 1 章 1.1.2) 归结为二阶方程组或一个高阶方程的 Cauchy 问题. 将以晶体光学的情况为例扼要地证明相应的 Cauchy 问题的等价性.

由原来关于电矢量和磁矢量的 Maxwell 方程组 (7) 消去磁矢量, 得到关于电矢量的三个二阶方程的方程组：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1\ddot{u}_1&=\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1\partial x_3},\\\sigma_2\ddot{u}_2&=\frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2u_3}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2\partial x_1},\\\sigma_3\ddot{u}_3&=\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2u_1}{\partial x_3\partial x_1}-\frac{\partial^2u_1}{\partial x_3\partial x_2},\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

借助消元法, 不难见到矢量 $u$ 的一切支量 $w$ 都满足同一个六阶方程：

$$D(\xi,\tau)w=0,\tag{20}$$

其中 $\tau$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\xi_i$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 并且

$$D(\xi,\tau)=\begin{vmatrix}\rho^2-\xi_1^2-\sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3\\ -\xi_1\xi_2 & \rho^2-\xi_2^2-\sigma_2\tau^2 & -\xi_2\xi_3\\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2-\xi_3^2-\sigma_3\tau^2\end{vmatrix}. \tag{20a}$$

由 (13) 知

$$D(\xi,\tau)=-\sigma_1\sigma_2\sigma_3(\tau^6-\varPsi(\xi)\tau^4+\rho^2\varPhi(\xi)\tau^2). \tag{21}$$

因为可以从 $D$ 的每一项中提出一个因子 $\tau^2$, 所以可把方程 (20) 降为一个四阶方程. 令 $v=w_{tt}$, 则

$$F(\xi,\tau)v=(\tau^4-\varPsi(\xi)\tau^2+\rho^2\varPhi(\xi))v=0. \tag{22}$$

利用方程 (7a), 经过简单的计算, 能够消去方程 (19) 中的两个支量而获得关于电磁矢量的一切矢量的四阶方程

$$F(\xi,\tau)u=0. \tag{22a}$$

Maxwell 方程 (7) 的 Cauchy 问题和方程 (22) 的 Cauchy 问题一般地有密切的联系. 在前一问题中给定了矢量 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{H}$ 当 $t=0$ 时的值. 来证明可用方程 (22) 的适合特殊的 Cauchy 数据

$$\left.\begin{array}{ll} v(0,x)=0, & v_t(0,x)=0,\\ v_{tt}(0,x)=0, & v_{ttt}(0,x)=g(x)\end{array}\right\} \tag{22b}$$

的解来表达 Maxwell 方程的 Cauchy 问题的解.

若令 $w^*(t,x)=\displaystyle\int_0^t(t-s)v(s,x)\mathrm{d}s$, 则

$$D(\xi,\tau)w^*=0, \tag{23}$$

且

$$\left.\begin{array}{l} w^*(0,x)=\dfrac{\partial^i}{\partial t^i}w^*(0,x)=0\quad(i=1,2,3,4),\\ \dfrac{\partial^5}{\partial t^5}w^*(0,x)=g(x).\end{array}\right\} \tag{23a}$$

如果用

$$w^*(t,x)=U\{g\}$$

记这个解, 则 Cauchy 问题

$$D(\xi,\tau)w(t,x)=0, \tag{24}$$

$$w(0,x)=g_0(x),\quad \frac{\partial^i}{\partial t^i}w(0,x)=g_i(x)\quad (i=1,\cdots,5) \tag{24a}$$

的解显然就是

$$\begin{aligned} w(t,x)=&U\{g_5\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{g_4\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{g_3\}+U\{-\varPsi(\xi)g_3\}\\ &+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{g_2\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{-\varPsi(\xi)g_2\}\\ &+\frac{\partial^4}{\partial t^4}U\{g_1\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\{-\varPsi(\xi)g_1\}+U\{\rho^2\varPhi(\xi)g_1\}\\ &+\frac{\partial^5}{\partial t^5}U\{g_0\}+\frac{\partial^3}{\partial t^3}U\{-\varPsi(\xi)g_0\}+\frac{\partial}{\partial t}U\{\rho^2\varPhi(\xi)g_0\}. \end{aligned} \tag{25}$$

于是, 为了求 Maxwell 方程组的初值问题的解, 只需证明它的 Cauchy 数据直接给出 (24) 的 Cauchy 数据. 利用方程组 (7), 可以用各支量 $w$ 的空间导数表示它们的时间导数, 而空间导数又可由 Cauchy 数据给出. 将方程组先对 $t$ 求导数, 如此等等, 还可以得出对时间的高阶导数. 于是, 只要能在特殊形状的 Cauchy 数据 (22b) 之下求四阶方程 (22) 的解, 也就会求 Maxwell 方程组的 Cauchy 问题的解了, 本书将在 6.14′ 中处理后一问题.

### 6.3′.6 磁流体动力学①

受电磁力作用的电离气体或液体的运动是一个愈来愈重要的课题. 它提出了极其众多的涉及双曲型算子的问题. 在此有趣的是, 即使是这种运动的简单情况, 也会导出结构比较复杂的特征曲面, 但这些特征曲面仍属于本章所阐述的一般理论的情况. 限于讨论最简单的情况 ——处于磁场中的完全导电的液体. 令 $u$ 表示流动速度的矢量, $B$ 为磁矢量, $J$ 为电流密度矢量, $\mu$ 为磁导率. 还用符号 $\nabla$ 记梯度, $\times$ 记有向积, 需要时用 $\cdot$ 记无向积.

这样的液体的运动方程构成一个既是各向异性的又是非线性的双曲型方程组. 为了简化, 假定流动的速度比光速小得多, 因而可以忽略相对论的效应, 例如 Maxwell 方程中的位移电流. 于是有

$$\mu J=\operatorname{curl} B, \tag{26}$$

其中 $\mu$ 表示磁导率. 进一步假定导电率为无穷, 则可将电场矢量 $E$ 表示如下：

$$E=-u\times B. \tag{26a}$$

Maxwell 方程组中其余的两个方程和流体的 Euler 运动方程共同给出关于流体的 $B,u$ 和密度 $\rho$ (它们是位置 $x=(x,y,z)$ 和时间 $t$ 的函数) 的下列偏微分方

① 关于这一领域中更多的细节请参考 F. de Hoffmann and E. Teller[1], K. O. Friedrichs and H. Krauzer[1], H. Grad[1], J. Bazer and O. Fleischman[1]; 还有 F. G. Friedlander[2], M. J. Lighthill[1] 和 H. Weitzner[1]. 本节不是按照 6.3 中所用的记号, 而是按照物理学文献中所用的.

程组:

$$\left.\begin{aligned}&\text{div } B=0,\\&B_t-\text{curl}(u\times B)=0,\\&\rho u_t+\rho(u\cdot\nabla)u+\text{grad }\rho-\mu^{-1}(\text{curl } B)\times B=0,\\&\rho_t+\text{div}(\rho u)=0,\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

第三个方程中的最后一项表示磁场作用在单位体积的流体上的力 $J\times B$. 与在通常的 Maxwell 方程组中一样, 第一个方程具有初始条件的性质.

将考察这些由略去一切二阶项所得的线性化了的方程, 于是不难看出这个线性方程组在 6.3.8 的意义上等价于一个对称双曲型方程组.

首先考虑不可压缩流体的情况, $\rho=$常数. (27) 的最后一个方程化为

$$\text{div } u=0,$$

并且可以把压强 $p$ 当做一个因变量. 为了得出特征条件, 考虑一个任意的流形 $\phi(x,t)=0$ 并令

$$v=\phi_t+u\cdot\nabla\phi=\phi.\tag{28}$$

(因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,x(t))=\phi_t+u\cdot\nabla\phi$, 所以 $v=\phi$ 是从一个随着流体运动的点观察量 $\phi$ 对时间的变化率.) 那么, 如果 $\phi=0$ 是一个特征流形, $v$ 应当满足一个行列式方程, 不难发现其展开形式是

$$\mu\rho v(\mu\rho v^2-(B\nabla\phi)^2)^2=0.\tag{29}$$

于是, 对应 $v=0$ 有一个特征速度, 而对应两个相对速度 $\pm v=B\nabla\phi(\mu\rho)^{-1/2}$ 中的每一个各有一个二重的特征速度.

同 6.3′.2, 特征 $v=0$ 代表流动的一条流线. (29) 的另一个因子代表前向 Alfvèn 波和后向 Alfvèn波. 令 $\tau=\phi_t,\xi=\nabla\phi$, 则见它们的法曲面是平面 $\sqrt{\mu\rho}(\tau+u\xi)\pm(B\xi)=0$.

不失一般性, 可设 $u=0$, 即采用一种以流体的速度运动着的坐标系, 因为微分方程在这种变换下是不变的. 有时不去考虑本来的法曲面而考虑逆法曲面. 前向 Alfvèn 波的逆法曲面恰是一个以

$$b=|B|(\mu\rho)^{-1/2}$$

为直径而过原点的球面 (见图 6-6). 它的极点是射线曲面, 它是由一条孤立的射线从原点投射而得的一个单独的点 $x=bB/|B|$ 组成的.

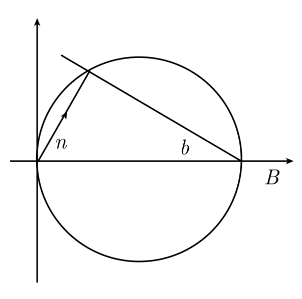


图 6-6　前向 Alfvèn 波的逆法曲面

所以, 一个前向 Alfvèn 波只沿着 $B$ 的方向传播, 其相对于流体的速率 $b$ 称为 Alfvèn速率. 相仿地, 一个后向 Alfvèn 波以速率 $b$ 沿着与 $B$ 相反的方向传播.

对于可压缩流体, (27) 仍然适用, 但此刻 $p$ 是一个已知函数 $p(\rho)$. 由于声速

$$a = \sqrt{p'}$$

和 Alfvèn 速率 $b$ 同时参与, 此时情况更为复杂. 采用和不可压缩流情况中同样的符号, 找到的特征条件是

$$v(v^2 - (b\nabla\phi)^2)[v^4 - (a^2 + b^2)v^2 + a^2(b\nabla\phi)^2] = 0, \tag{30}$$

其中 $a = \sqrt{p'}, b = |B|(\mu\rho)^{-1/2}$. 前两个因子仍然表示流线特征 $v = 0$ 和 Alfvèn 特征 $v = \pm B\nabla\phi(\mu\rho)^{-1/2}$.

与 (30) 中的四次因子相应的轨迹, 即法曲面和射线曲面, 比起 Alfvèn 轨迹来就更加有趣且更加复杂了. 为了简化讨论而又不失一般性, 仍假定速度 $u$ 为零, 至少在所考虑的点处如此 (微分方程在以恒速平移的坐标系的变换下是不变的). 和前面一样, 在特征微分方程里以矢量 $\xi$ 代替 $\nabla\phi$ 并且以 $\tau$ 代替 $\phi_t$.

一般来说, 法曲面有三叶, 并且由于它们以磁矢量 $B$ 为旋转轴而对称, 因而可仅考察其与 $\xi_1\xi_2$ 平面的截线. 法锥面的内叶是凸的, 包裹着它的核. 外叶伸张到无穷远, 它们像是垂直于 $B$ 轴的平面, 不过被轴穿了个孔 (见图 6-7).

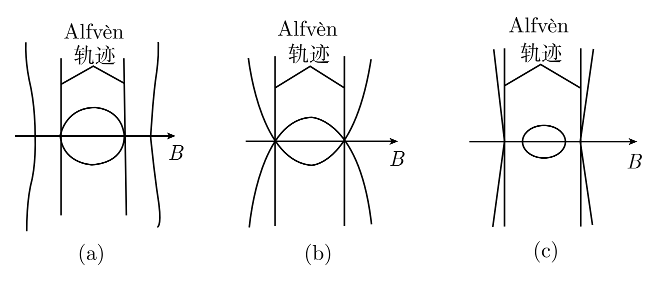



图 6-7 法曲面

从几何上来讨论, 应按声速 $a$ 与 Alfvèn 速率 $b$ 的关系区别对待下列三种情况：

(a) $a^2 < b^2$,

(b) $a^2 = b^2$,

(c) $a^2 > b^2$.

图 6-7 中所示是法曲面. 在情况 (a) 和 (c) 下, 法曲面有两个二重点, 即和原点的距离为 $1/b$ 而在 $B$ 的方向上的那两个点. 在无穷远还有一个四重点. 值得注意的是伸张到无穷远的两叶曲面对应着特征方程的四次因子. 所以法锥面并不是由套起来的闭曲面组成的.

在情况 (b) 下有两个三重点, 它们是 Alfvèn 轨迹与四次轨迹的两叶的交点. 于是有了一个这样的例子, 其中法锥面的凸核是由相交而伸张到无穷远的两叶上的两片组成的. 这些交点是法曲面的锥形点.

将这些轨迹 (见图 6-7 中 (a), (b), (c)) 关于单位球作反演, 即得相应的逆法曲面. 图 6-8 中 (b), (c) 表明即使法曲面本身的核是凸的, 逆法面的外叶也不一定是凸的.

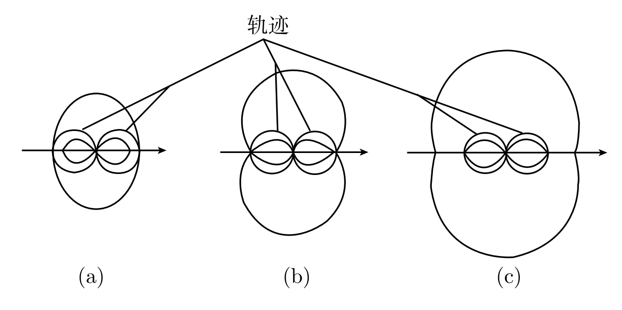



图 6-8　逆法面

图 6-8 中 (a), (b), (c) 中表明了射线曲面. 它的代数次数较法曲面的次数高. 情况图 6-8 中 (a) 表明, 即使法锥面和法曲面都是正则的, 相应的射线锥面也可能有奇异性. 在这种情况下, 三尖形的图是由图 6-8 中 (a), (c) 中的完整的卵形得到的. 尖点对应着法曲面外叶的拐点和无穷远点. 在图 6-9(b) 中, 射线曲面的外壳不再是凸的, 所以它和它的凸壳不完全重合. Alfvèn 轨迹的射线位于射线锥面其余部分的外边, 虽然法速率的 Alfvèn 轨迹 (逆法曲面) 恒在另一法速轨迹之上或内. 如果认识到法速度和沿着射线的速度一般是不同的, 便不难解释这一点.

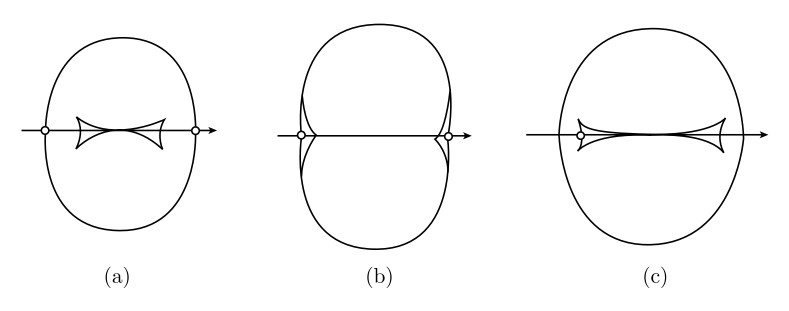



图 6-9　射线曲面

因射线锥面有尖点, 故可以推测具有光滑初始边界的干扰可能会产生出尖点来. 事实确实如此, 如图 6-10 中所示.

这些例子说明, 即使法锥面是正则的, 射线劈锥面也可能具有复杂的结构并且表现出奇异性. 与此相应, 其他特征曲面还可能具有出乎意料的异奇性. 这些奇异

性表现出了涉及代数几何学和偏微分方程论间相互关系的有趣的问题.

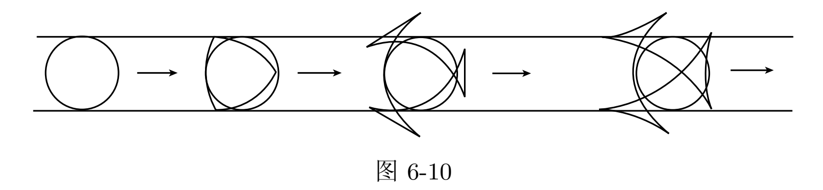


图 6-10

在本节中考察了特征元素特别是波前的几何形状. 以后当详细讨论初值问题和波的传播的时候, 读者将体会到前面的分析对于波的传播问题的重要性 (如参考 6.4, 6.7, 6.12, 6.14, 6.15 诸节).

## 6.4 间断性的传播和 Cauchy 问题

### 6.4.1 引言

对于光滑的初始数据, 将在 6.8, 6.9 和 6.10 中用 "能量积分" 法构造出 Cauchy 问题的解来. 这是一种不直接以特征概念为基础的方法. 然而, 在本节和下节中, 将体会到特征曲面和射线仍然对解的结构起着决定性的作用. 开始将分析间断性在特征曲面上沿着射线的传播 (参考 6.1 和 6.2). 但是这个分析将使探讨的途径弄得更开阔些, 结果就可以使只要沿射线解常微分方程, 便能获得一大类问题的起码是近似的解.

初始数据或者这些初始函数的导数的间断性大都限于初始空间的至多是 $(n-1)$ 维的流形上. 除此之外, 将假定这些数据具有任何所需程度的光滑性 (具有任何所需阶数的连续的导函数).

正如下文将详细指出的, 间断性的传播的分析是以这样的假定为基础的, 即所考虑的特征是彼此不同的, 或者在重特征的情况, 在每一点处每一个特征元素的重数都是一样的. 这个限制从一般理论的范围内排除了某些有关的数学物理问题. 虽然对那样的问题可以作特殊的处理, 但是一般理论的未臻完善, 则可作为后起学者进一步研究的课题①. 以后各节中很多例子和注释都将说明这个情况.

### 6.4.2 一阶方程组的一阶导数的间断性. 输动方程

首先考虑一阶的线性方程组②

$$L[u] = \sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0. \tag{1}$$

① 对于重特征的理论已经取得了一些进展, 如 D. Ludwig[3]. 又可参考 R. Lewis[1].

② 至于拟线性方程组, 参考 6.4.9.

曾经遇到 (见第 3 章和第 6 章 6.3) 若跨过某曲面 $C:\phi(x)=0$ 时 $u$ 是连续的而其一阶或者可能的高阶导数发生跳跃, 则 $C$ 必为特征曲面. 由于 $u_i=u_\phi\phi_i+$ 切向导数, 并且假定了当跨过 $C$ 时切向导数是连续的, 从跨 $C$ 的跳跃关系①

$$(L[u])=\sum_{i=0}^{n}A^i(u_i)=0$$

可推出

$$\sum_{i=0}^{n}A^i\phi_i(u_\phi)=A(u_\phi)=0.$$

所以矩阵 $A=\sum A^i\phi_i$ 是奇异的, 并且外导数 $u_\phi$ 跨过 $C$ 的跳跃

$$g=(u_\phi)=\sigma r \tag{2}$$

是特征矩阵 $A$ 的一个右零化矢量, 其定义见于 6.3, $\sigma$ 是一个标量因子.

除非特别声明, 与 6.3 中一样假定特征矩阵 $A$ 的秩为 $k-1$, 因而除了一个标量因子之外具有一个且仅有一个右零化矢量和一个左零化矢量, 适合 $lA=Ar=0$.

偏微分方程

$$|A|=Q(\phi_0,\cdots,\phi_n;x)=0$$

的每一个解 $\phi$ 表示一族特征曲面

$$C_c:\phi(x)=c=\text{常数},$$

对于所有这些曲面, 零化矢量 $r$ 和 $l$ 都是确定的.

现在叙述一个定理: 控制着跳跃

$$(u_\phi)=\sigma r$$

的标量 $\sigma$ 依常微分方程 (输运方程)

$$\dot{\sigma}+P\sigma=0 \tag{3}$$

($\sigma$ 上面的点表示沿射线的一个参数求导) 在 $C$ 上沿双特征射线而传播, 其中

$$P=lL[r]. \tag{4}$$

为了简要地证明这个事实②, 把解表示为如下的形式

$$u=\frac{1}{2}|\phi|g(x)+R(x),$$

① 符号 $(f)$ 在这里和别的地方都表示跨过 $C$ 时 $f$ 的间断性跳跃.

② 在 6.4.4 中将更详细而一般地分析方程组 (1) 的间断性.

其中 $g=(u_\phi)=\sigma r$, $g(x)$ 和 $R(x)$ 都具有连续的一阶导数而且它们在 $C$ 上的内导数也都是连续的, 这样就表明了跨过 $C:\phi=0$ 时 $u_\phi$ 的间断性. 当 $\phi>0$ 时令 $h(\phi)=\frac{1}{2}$, 当 $\phi<0$ 时令 $h(\phi)=-\frac{1}{2}$. 于是, 由于 $Ag=0$, 在 $C$ 的两侧都得到

$$L[u]=h(\phi)Ag+\frac{1}{2}|\varphi|L[g]+L[R]=\frac{1}{2}|\varphi|L[g]+L[R]=0.$$

用零化矢量 $l$ 乘它, 便得出 $\frac{1}{2}|\phi|lL[g]+lL[R]=0$. 因为 $l\sum A^i\phi_i=lA=0$, 所以, $lL[R]$ 是一个切向算子. 因此据假设可知 $lL[R]$ 的一阶导数在跨过 $C$ 时是连续的. 所以, 把最后这个方程对 $\phi$ 求导并取此求导后的方程跨过 $C$ 时的跳跃, 就立即得到在特征曲面 $C$ 上的内微分方程:

$$lL[g]=l\sum A^i g_i+lBg=0.$$

进一步代入 $g=\sigma r$, 便得

$$l\sum A^i r\sigma_i+l\left(\sum A^i r_i+Br\right)\sigma=0,$$

据 6.3.11 中的引理, 这正是前面所说的

$$\sigma+lL[r]\sigma=0.$$

还能够仿照 6.2.3 去推出这个结果, 为此可先假定 $\phi$ 有特殊的形式 $\phi=x_n$, 然后再利用特征与特征微分的不变性.

### 6.4.3 初始值的间断性. 理想函数的引入. 前进波

在第 5 章 5.9.1 中已经指出过, 物理实况的一种适当的数学表示需要容许具有更严重的间断性的广义解, 即当跨过 $C$ 时, 本身发生跳跃 $(u)\neq 0$ 的解 $u$. 然而, 不能对一切数学上想象得到的间断性[①]都给其找出物理意义来. 对于广义解应当予以限制, 即要求它们与其有关的导数都表示从光滑解用极限步骤理想化所得的结果. 按照这个表述, 将认为那些可以用理想函数亦称为广义函数或分布表示的解是有物理意义的.

此类分布, 特别是 Dirac 的 $\delta$ 函数, 已经作为一种缩写符号而在本书的前面用过了. 在本节及以后章节要给其下确切的定义并且系统地使用它们. 虽然在本章的附录里已经给出了分布的一般理论系统, 在这里仍应列出下面有关的几点.

① 例如, 考虑 $L[u]=0$ 的两个不同的解 $u^1,u^2$, 并且这样来定义一个 "间断解" $u$, 它在某一任取的曲面 $C$ 的一侧恒等于 $u^1$ 而在另一侧恒等于 $u^2$. 于是在跨过 $C$ 时, $u$ 发生了跳跃 $(u)$, 但是不论 $C$ 或 $(u)$ 都没有任何特点可以辨识.

依赖于一个变元 $\phi$ 的分布 $S(\phi)$ 或广义函数可定义为一个 "相变元" $\phi$ 的连续函数 $W(\phi)$ 在变元 $\phi$ 的一个有限区域上的符号导数

$$S(\phi) = D^\alpha W(\phi),$$

其中 $\alpha$ 是一个正数, $D$ 表示 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}$. 于是可以把分布当做普通的函数进行微分. 还可以用至少可微分 $\alpha$ 次的普通函数为系数去作出分布的线性组合, 从而得到其他的分布. 甚而还可以把分布代入线性微分算子并把这些理想函数当做普通的函数来处理.

除了分布 $S = S_0$ 之外, 还要考虑分布 $S_\nu(\phi)$, 其意义由下列等式确定:

$$S'_\nu(\phi) = DS_\nu = S_{\nu-1}. \tag{5}$$

若 $i > \alpha$, 则 $S_i$ 可定义为 $W$ 的以零为下限的 $i-\alpha$ 次的叠积分, 因而 $S_i(0) = 0$.

若 $\phi \neq 0$, 假定 $S(\phi)$ 是一个正则函数. 这意味着当 $\phi \neq 0$ 时 $W(\phi)$ 具有普通的导数. 于是, 函数 $S_\nu(\phi)$ 显然随着 $\nu$ 的增加而降低其奇异性, 当 $\nu \geqslant \alpha$ 时是连续的, 并且对于充分大的 $\nu$ 是光滑的. 此外, 当 $\nu > \alpha$ 时在有限的区间上有

$$|S_\nu(\phi)| < \frac{M}{(\nu-\alpha)!}|\phi|^{\nu-\alpha},$$

其中 $M$ 是一个常数.

给出如下几个例子.

**例 6.4.1**

$$W(\phi) = \frac{1}{2}(|\phi| + \phi), \quad DW = \eta(\phi),$$
$$D^2W = \delta(\phi), \quad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\phi),$$

其中 $\eta(\phi)$ 是 Heaviside 函数:

$$\eta(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \phi > 0, \\ 0, & \text{当 } \phi < 0. \end{cases}$$

**例 6.4.2**

$$W(\phi) = \frac{1}{2}|\phi|, \quad DW = \eta(\phi) - \frac{1}{2} = h(\phi),$$
$$D^2W = \delta(\phi), \quad D^\alpha W = \delta^{(\alpha-2)}(\phi).$$

**例 6.4.3**

$$W(\phi) = \sqrt{|\phi|}, \quad DW(\phi) = \frac{1}{2}|\phi|^{-1/2}, \text{ 等.}$$

**例 6.4.4**

$$W(\phi)=\log|\phi|,\quad DW(\phi)=\frac{1}{\phi},\quad D^2W(\phi)=-\frac{1}{\phi^2},\ 等.$$

在奇异点 $\phi=0$ 处, 把普通函数和用同一函数符号表示的广义函数等同起来是没有意义的[①]. 不过, 如上所述, 仍可把这样的广义函数或者其组合置于线性微分方程里并且把它们当做普通的函数来处理[②].

为了表示在曲面 $C:\phi(x,t)=0$ 上具有奇异性的函数 $u(x,t)$, 注意: 减去一个奇异项就可得一个间断性较弱的剩余式. 这就启发引入形式如下的间断的 (理想) 函数

$$u(x,t)=\sum_{\nu=0}^{N}S_\nu(\phi)g^\nu(x,t)+R(x,t),\tag{6}$$

其中 $N$ 可以随所用时的情况而选定, 系数 $g^\nu$ 是需要多么正则就多么正则的, 并且余式 $R$ 也具有任何所需程度的正则性. 如果 $u$ 是一个矢量, 那么系数 $g^\nu$ 和 $R$ 也都是矢量, 而 $S_0,S_1,\cdots$ 都是标量.

应当注意, 如果仅仅需要说明在 $\phi=0$ 处的奇异性, 那么这样的表达式并不是唯一的. 假定除了 $\phi=0$ 处之外 $S(\phi)$ 是正则的, 那么, 除了沿着曲面 $C:\phi=0$ 之外, 可以任意修改系数 $g^\nu$, 这些修改恒可归入余式 $R$. 如果不需要注意 $u$ 的奇异性的精细分解, 那么还可以把展开式 (6) 合并为一项或两项. 例如, 若 $W(\phi)=\log|\phi|$, 则 $S(\phi)=S_0(\phi)=$常数$\cdot\phi^{-\alpha}$, 于是对于整数 $\alpha$, 表达式 (6) 可以缩简为如下的形式:

$$u=\frac{1}{\phi^\alpha}G(x,t)+\log|\phi|G^*(x,t),$$

其中系数 $G$ 和 $G^*$ 都是正则的.

然而, 展开式 (6) 对于分析研究仍将是最适当的.

较方便的办法是, 不要在 (6) 中显示出数 $N$ 和余式 $R$ 而简单地写为

$$u(x,t)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu(\phi)g^\nu(x,t),\quad S_0=S,\tag{6a}$$

其含意是这个形式的展开式应当在达到某一适当的第 $N$ 项后即行截止并且加上一个适当光滑的余式 $R$.

如果级数 (6a) 实际在达到第 $N$ 项后已经截止并且余式是零, 那么称 $u$ (鉴于在 6.18 中关于波动概念的讨论) 为一个 $N$ 次的前进波; 如果级数 (6a) 可以延展为一个收敛的无穷级数, 则称 $u$ 为一个完全的前进波; 否则称 $u$ 为一个近似的前进波.

① 参考本章附录.
② 参考本章附录.

如上所述, 此种类型的分布可以看成是函数 $D^\alpha W^\epsilon(\phi)$ 当 $\epsilon\to 0$ 时的 (弱) 极限, 这里 $W^\epsilon(\phi)$ 具有一切有关阶数的导数. 于是把 $u$ 看成是正则函数 $u^\epsilon$ 的极限, 它表示跨过 $C$ 的而不是沿着 $C$ 的一种 "断裂", 并且对于它来说 $L[u^\epsilon]$ 趋于 $L[u]$. 代替对这些函数 $u^\epsilon$ 进行运算而最后取其当 $\epsilon\to 0$ 时的极限, 将利用关于 $\delta$ 函数和一般的符号函数 $D^\alpha W(\phi)$ 的简便的运算法则 (见附录).

由于需要详细说明 $u$ 跨过 $C$ 时的间断性, 这就进一步促使利用形如 (6a) 的前进波.

例如, 可以把 $u$ 的一个跳跃性间断简单地用一个项 $\eta(\phi)g(x,t)$ 来表示, 为了同时表达法向导数 $u_\phi$ 的跳跃间断性, 用两个项 $\eta(\phi)g(x,t)+|\phi|g^1(x,t)$, 等等.

可以先把一些假定重述如下：首先, 恒假定微分算子的系数和数据都是充分光滑的而足以保证有关系数 $g^\nu$ 和余式 $R$ 的光滑性的论述成立. 其次, 除了在 $\phi=0$ 上的奇异性以及可能在 $\phi$ 取别的值时有奇异性之外, 同样也假定奇异性 $S(\phi)$ 是一个适当光滑的函数.

为了构造 (6) 或 (6a) 型的前进波的广义解 $u(x,t)$, 直接把这种展开式代入微分方程, 把广义函数当做普通的函数进行微分. 此外还约定, 所得的每一个分布 $S_\nu$ 的光滑系数分别等于零. 这样就引出关于系数 $g^\nu$ 的一系列微分方程, 而这些方程可以化成颇为简单的常微分方程.

如果数 $N$ 充分的大, 那么可以使剩下的项具有任意程度的光滑性. 参考 6.10 中的构造方法, 此法将完成 Cauchy 问题的解.

在级数 (6a) 仅有有限多个项或为收敛的无穷级数的情况下, 不必考虑余项, 这时这种步骤可适用于任意的函数$S(\phi)=S_0(\phi)$ 而不论它们是否光滑. 这 (参考 6.18) 将能对于重要类型的数据完成解的整个构造而不必求助于 6.10 的存在定理.

### 6.4.4　一阶方程组的间断性的传播

为了实际进行演算, 注意

$$u_i=S_{-1}(\phi)\phi_i g+\sum_{\nu=0}^{N-1}S_\nu(\phi)\{g_i^\nu+g^{\nu+1}\phi_i\}+\cdots(g^0=g) \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}u_{ij}=&S_{-2}\phi_i\phi_j g+S_{-1}\{\phi_{ij}g+\phi_i g_j+\phi_j g_i+g^1\phi_i\phi_j\}\\&+\sum_{\nu=0}^{N-2}S_\nu\{g_{ij}^\nu+g_i^{\nu+1}\phi_j+g_j^{\nu+1}\phi_i+g^{\nu+1}\phi_{ij}+g^{\nu+2}\phi_i\phi_j\}+\cdots\end{aligned} \tag{8}$$

等, 其中三点表示正则的项. 如前所述, 如果形式展开式仅有有限多个项, 那么余式将是任意光滑的.

把 (7) 代入一阶方程 (1) 里, 得到 $(A=A^i\phi_i)$

$$L[u] = S_{-1}Ag^0 + \sum_{\nu=0}^{N-1} S_\nu(Ag^{\nu+1} + L[g^\nu]) + (S_N L[g^N] + L[R]) = 0, \tag{9}$$

其中当 $N$ 充分大时 $R$ 是正则的. 约定所有 $S_{-1}, S, S_1, \cdots$ 的系数以及 $S_N L[g^N] + L[R]$ 都不仅在 $\phi = 0$ 上而且在邻近的 $x$ 空间里的 $C_c : \phi = c \neq 0$ 上都等于零. 于是

$$Ag = 0, \tag{10}$$

$$L[g^\nu] + Ag^{\nu+1} = 0, \quad (\nu = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{10a}$$

$$S_N L[g^N] + L[R] = 0. \tag{10b}$$

因此, 同前所述, $|A| = Q(D\phi) = 0$,

$$g^0 = g = \sigma r,$$

从而 $\phi =$常数表示一族特征曲面 $C_c$. 用左零化矢量 $l$ 乘 (10a) 得出

$$lL[g^\nu] = 0, \tag{11}$$

特别地, 当 $\nu = 0$ 时得到

$$lL[g] = lL[\sigma r] = \sum_\nu lA^\nu r\sigma_\nu + lL[r]\sigma = 0 \tag{11a}$$

或者 (参考 6.3.11 的引理)

$$lL[\sigma r] = \sigma + lL[r]\sigma = 0. \tag{12}$$

这就是在 6.4.2 中所说的确定 $g^0 = g$ 的基本常微分方程.

现在依次确定因子 $g^1, g^2, \cdots$; 把 $g^{\nu+1}$ 看成是线性方程组 (10a) 的一个解, 从其来源知道, 虽然它们的矩阵 $A$ 是奇异的, 仍是相容的①. 有下列推论:

$$g^{\nu+1} = \sigma^{\nu+1} r + h^{\nu+1}. \tag{13}$$

这里, 只要 $L[g^\nu]$ 是已知的, 那么 $h^{\nu+1}$ 便是已知的 (以 $r$ 为模), $\sigma^{\nu+1}$ 是一个标量因子.

把 (13) 代入 (11), 并且把 $\nu$ 改写成 $\nu+1$, 又得到沿着射线的一个常微分方程:

$$\dot{\sigma} + lL[r]\sigma + k^\nu = 0 \quad (\sigma = \sigma^{\nu+1}), \tag{12a}$$

其中当 $L[g^\nu]$ 为已知时 $k^\nu$ 也是已知的.

所以, 一旦知道了函数 $g^\nu$ 沿着 $C_c$ 和一个横截流形 (如 $x_0 = 0$) 的截口上的初始值, 那么这些常的 "输运"微分方程 (12) 和 (12a) 就依次在 $C_c : \phi =$常数$= c$ 上确

① 这个相容性却并不是关系 (12a) 的直接推论.

定出了函数 $g^\nu$. 于是, 在 $x$ 空间的一个被特征曲面 $\phi=$常数$=c$ 填满了的 $n+1$ 维的部分中 $g^\nu$ 被确定了.

对于 $u$ 为跳跃间断的情况：$S(\phi)=\eta(\phi)$, 即 $(u)=g$, 由关系 (7) 和 (8) 能够立即用系数 $g^\nu$ 和它们在 $C:\phi=0$ 上的导数表示出导数在间断面 $C$ 上的跳跃 $(u_i),(u_{ij}),\cdots$. 因为 $\delta(\phi),\delta'(\phi),\cdots$ 的跳跃都是零, 所以

$$\left.\begin{array}{l}(u)=g,\\(u_i)=g_i+g^1\phi_i,\\(u_{ij})=g_{ij}+g_i^1\phi_j+g_j^1\phi_i+g^1\phi_{ij}+g^2\phi_i\phi_j,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\tag{14}$$

反之, $u$ 的各阶导数的跳跃也沿着 $C_0$ 依次确定了 $g,g^1,g^2,\cdots$ (应当记住不能由 $u,u_i,\cdots$ 的跳跃确定 $g,g^1,\cdots$ 向 $C_0$ 外的延拓).

### 6.4.5 重数不变的特征

在 6.3 中就曾经指出过, 对于对称双曲型方程组来说, 多重特征元素不一定引起严重的困难. 虽然数学物理学中的大多数方程都是对称的, 仍不妨把前面的分析推广到具有多重特征的方程的重要情况, 即重数既不随法线方向也不随点的位置而变的情况; 至于方程组则可以是对称的, 也可以是非对称的. 假定有 $s$ 个独立的右零化矢量 $r^1,r^2,\cdots,r^s$ 和 $s$ 个独立的左零化矢量 $l^1,l^2,\cdots,l^s:Ar^i=l^jA=0,1\leqslant i,j\leqslant s$. 因为 $A(u)=0$, 跳跃 $(u)$ 必为 $r^1,r^2,\cdots,r^s$ 的一个线性组合

$$(u)=\sigma_1r^1+\sigma_2r^2+\cdots+\sigma_sr^s.\tag{15}$$

一般地, 导出关于标量因子 $\sigma_i$ 的微分方程. 把 (15) 代入 $lL[u]=0$, 对于 $l=l^j$ 即得

$$l^j\sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=0}^{n}A^\nu r^i\sigma_\nu^i+l^j\sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=0}^{n}(A^\nu r_\nu^i+Br^i)\sigma^i=0\quad(j=1,\cdots,s).\tag{11b}$$

这些方程又是关于 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 在 $C$ 内的由 $s$ 个偏微分方程构成的方程组. 所以, 当 $s>1$ 时的求导不能化为沿双特征射线的普通求导, 开始时清晰地集中在局部的间断性会扩展到曲面 $C$ 上 (下边将给出例子). 但是, 如果特征曲面在整个 $x$ 空间里具有相同的重数 $s$, 则这种情况就不会发生, 而间断性和从前一样是沿着射线传播的. 确切地说, 参照 6.3.10, 定义特征曲面的重数如下：若对于 (某一 $n$ 维区域内的) 任意一组值 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$, 代数方程 $Q(\phi_0,\cdots,\phi_n)=0$ 确定一个重根 $\phi_0=f(\phi_1,\cdots,\phi_n)$, 使得矩阵 $A=A^\nu\phi_\nu$ 具有 $s$ 个独立的右零化矢量 $r^i(i=1,2,\cdots,s)$ 和同样数目的独立的左零化矢量 $l^i$, 则称相应的特征曲面为 $s$ 重的.

为了证明上述结论, 根据 6.3.11 的引理, 微分方程 (11b) 中所有的量 $\sigma^i$ 都是沿同一个特征方向

$$\dot{x}_\nu : \dot{x}_0 = -f_\nu \qquad (\nu > 0)$$

求导的, 于是断言得证. 可以立即看出, 这些双特征射线是属于确定所考察的曲面叶的那一个不可约因子 $Q$ 的.

### 6.4.5′ 间断性沿高于一维的流形而传播的例子. 锥形折射

如果 6.4.5 的假定不成立, 即如果一个特征曲面 $C$ 的重数是较高的, 但是它又不属于一个在空间每一点处沿任何法线 (在空间中的) 方向有相同重要的特征曲面族, 那么很可能发生这种情况, 即初始间断性从 $C$ 上的一点沿着 $C$ 上的二维的或维数更高的流形而散布开去.

可以由几乎是明显的例子看出这一点. 考察一个由三个方程构成的方程组, 并且假定第一个方程不包含对变量 $x_3$ 的导数. 于是平面 $x_3 =$常数都是二重的 (也可能是三重的) 特征曲面, 因为有后两个方程的至少一个线性组合其中不出现对 $x_3$ 的导数. 显而易见, 在 $C : x_3 = 0$ 上的初始间断性将沿着 $C$ 作二维的传播. 为此只需考察一个典型的例子就够了. 以 $x, y, z$ 记自变量并以 $u, v, w$ 记 $u^1, u^2, u^3$, 考察方程组

$$\left.\begin{aligned} &u_x = 0, \\ &u_y - u = 0, \\ &w_z - v = 0. \end{aligned}\right\}$$

特征平面 $z = 0$ 对应着两个独立的左零化矢量 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0)$. 此平面 $C$ 不是被一族而是被两族双特征线 $x =$常数和 $y =$常数所遮盖. 支量 $v$ 满足微分方程 $v_{xy} = 0$, 并且 $v$ 跨过平面 $z = 0$ 时的间断性显然作为此方程的解而散布开来. 开始时集中在一点处的间断性在通过这一点的两条双特征线 $x =$常数和 $y =$常数之间散布开来.

在上面的例子中, 和 "常规" 性状之间的区别可以认为是不大的. 但是, 有些在物理学中具有重要意义的例子, 其与常规性状之间是有比较重大的差异的. 在这些情况下, 自变量的个数多于三, 通过所考察的特征面上的一个初始点的那些特征曲线构成一个二维的流形 —— 一个锥面. 最著名的是晶体光学中的例子 (锥形折射). 按照 6.3′ 中对于晶体光学微分方程所作的分析, 如果法线方向 $\alpha = \xi/|\xi|$ 和速度 $\eta = -\tau/|\xi|$ 是由 6.3′ 中的特征方程 (9b) 联系着的, 那么属于这些微分方程的平面波前 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - \eta t = 0$ 便是特征曲面. 这个方程通常对于一个给定的法线方向确定了两个速率而对于这两个速率中的每一个又确定了一条特征射线 (在 6.3.4 中已经包含了由给定的法线方向构造出这两条射线的方法).

然而, 对于这件事情有一个例外, 即当法线方向 $\alpha$ 指向晶体的一个光轴方向的时候. 这时两个速率重合, 并且代替所属的两条过该点的射线, 构成一个圆锥面的一族射线. 首先被 Hamilton 从理论上发现而后由实验证实了的这个 "锥形折射" 现象的实际意义是一条入射光线沿一个轴向进入晶体之后被分裂为那个锥面的全部母线, 并且由入射光线所携载的间断性开始沿着锥面传播, 在这个锥的内部也进行传播但被大大地减弱了. 应用 6.4.5 中的步骤并适当变换所得微分方程即可从解析看到这件事实, 并且看到间断性的强度满足对于两个空间变量和一个时间变量写出的波动方程.

在磁流体动力学中 (参考 6.3′.6), 当入射电磁波前由真空沿磁场方向撞入磁化流体内时①, 也发生类似的锥形折射现象, 并且此时流体的声速和 Alfvèn 速度相同.

### 6.4.6 初始间断的分解和 Cauchy 问题的解

在本节中要用前面的理论把具有间断初始值的 Cauchy 问题化为具有光滑初始值的 Cauchy 问题. 在以下的几节中将给出后一问题的解的存在性和唯一性的证明. 这种约化的基础是能够造出一个形式如 (6) 的有限波 $w$, 其吸收了给定的初始间断性并且对于它来说 $L[w]$ 具有所需要的光滑度.

假定 $x_0=t=0$ 是类空间的初始流形 $\mathscr{J}$, 于是由

$$\phi(0,x_1,\cdots,x_n)=\phi(x)=c=\text{常数 (在 } \mathscr{J} \text{ 上)}$$

所定义的一个 $n-1$ 维的流形 $\mathscr{J}_0$ 产生出遮满 $xt$ 空间的 $k$ 个特征曲面 $C^\kappa$ : $\phi^\kappa(t,x)=\text{常数}=c$ $(\kappa=1,\cdots,k)$. 不论它们之中是否有些相互重合, $L[u]$ 的双曲性质都肯定了特征矩阵有 $k$ 个线性独立的右零化矢量 $r^\kappa$.

假定跨过 $n-1$ 维流形 $\mathscr{J}_0:\phi(x)=0$ 时有着间断性 $S$ 的初始值具有下列形式

$$u(0,x)=u_0(x)=\sum_{\nu=0}^{N}S_\nu(\phi(x))g^\nu(x)+R(x).$$

解决 Cauchy 问题的第一步是把初始值 $u_0(x)$ 分解为 $k$ 个支量, 每一个支量隶属于通过 $\phi(x)=0$ 的 $k$ 扇特征曲面 $\phi^\kappa(t,x)=c$ 之中的一扇. 相应地, 把解 $u$ 也分解为 $k$ 个支量:

$$u(t,x)=\sum_{\kappa=1}^{k}U^\kappa(t,x).$$

利用 6.4.3 中的记号, 有

$$U^\kappa\sim\sum_{\nu}S_\nu(\phi^\kappa(t,x))g^{\nu,\kappa}(t,x),$$

① 详细的分析见于 D. Ludwig[2].

$$L[U^\kappa]=0 \quad 且 \quad \sum_\kappa U^\kappa(0,x)=u_0(x).$$

因此, 由于对于一切 $\kappa$ 有 $\phi^\kappa(0,x)=\phi(x)$, 对于每一个 $\nu$ 约定

$$\sum_\kappa g^{\nu,\kappa}(0,x)=g^\nu(x), \tag{16}$$

其中 $g^\nu(x)$ 是已经由初始数据知道了的. 根据 6.4.4, 已经按 (13) 把 $g^{\nu,\kappa}$ 表示为标量 $\sigma^{\nu,\kappa}$ 和已知的零化矢量 $r^\kappa$ 的函数. 由此对于每一个 $\nu$ 导出关于 $\mathscr{J}$ 上的初始值 $\sigma^{\nu,\kappa}$ 的 $k$ 个线性方程的方程组.

特别是对于初始的跳跃间断, 即 $S_0(\phi)=S(\phi)=\eta(\phi),\eta(\phi)$ 仍表示 Heaviside 函数, $g^0(\phi)=g(\phi)$ 当 $\phi=0$ 时表示矢量 $u$ 跨过 $C$ 时的跳跃量.

由 6.4.4 知 $u$ 跨过 $C^\kappa:\phi^\kappa(t,x)=0$ 时的跳跃的表达式是 $(u^\kappa)=\sigma^\kappa(t,x)r^\kappa(t,x)$, 所以在初始平面内 $\phi=0$ 上有

$$\sum(u^\kappa)=(u_0)=\sum_{\kappa=1}^k\sigma^\kappa(0,x)r^\kappa(0,x)=g(0,x). \tag{17}$$

由双曲性的假定知道矢量组 $r^\kappa(0,x)$ 是线性独立的, 所以这个由 $k$ 个线性方程构成的方程组是非奇异的, 从而唯一地确定了标量组 $\sigma^\kappa(0,x)$. 于是, 初始间断性 $(u_0)$ 被分解为 $k$ 个支量, 每个支量附属于通过初始间断的 $k$ 扇特征曲面之一.

虽然这个分解法对于初始流形 $\phi=0$ 是带有强制性的, 但是, 和 6.4.4 中相同, 现在约定对于通过 $\phi^\kappa(0,x)=c=$常数的叶片上的一切特征 $C_c^\kappa$ 都按照 (17) 那样去作. 作为输运常微分方程 (12a) 的推论, 即使当 $c\neq 0$ 时曲面 $C_c^\kappa$ 上没有间断性, 初始值 $\sigma^\kappa(0,x)$ 仍然确定了 $\sigma^\kappa$, 因而对于一切特征曲面 $C_c^\kappa$ 也确定了因子 $g^{0,\kappa}$.

相仿地, 利用 (13) 能够通过一些显然的步骤确定系数 $g^\nu(x)$ 的分解和它们沿着特征 $C_c^\kappa$ 的延拓. 对于标量 $\sigma^{\nu,\kappa}(0,x)$, 由方程 (16) 易推出形式如下的线性方程组:

$$\sum_\kappa \sigma^{\nu,\kappa}r^\kappa=M^\kappa,$$

只要对于 $\mu<\nu$ 知道了 $g^{\mu,\kappa}$, 此方程组中的 $M^\kappa$ 便是已知的. 于是, 一步步地, 先确定 $\sigma^{\nu,\kappa}$ 的初始值, 然后由 (12a) 确定这些标量, 从而确定了 $g^{\nu,\kappa}$ 沿 $C_c^\kappa$ 的值. 因此, 对于 $c=0$ 的适当的邻域, 在 $C_c^\kappa$ 的 $n+1$ 维的邻域上确定了这些函数.

上述 $g^\nu$ 的分解不仅适用于跳跃性间断, 而且也适用于任意的奇异性 $S(\phi)$. 不过, 当 $S(\phi)=\eta(\phi)$ 时, 还能进一步找出系数 $g^\nu$ 和 $u_0$ 的导数的跳跃之间的关系. 读者不难证实, 可以在 6.4.4 中公式 (14) 的基础上作到这一步.

有了这些准备之后, Cauchy 问题的解就容易完成了. 取充分大的 $N$, 作

$$U=\sum_{\kappa=1}^k\sum_{\nu=1}^N S_\nu(\phi^\kappa(x,t))g^{\nu,\kappa}(x,t).$$

于是, $L[U]=G(x,t)$ 以及 $w=u-U$ 都具有任意程度的光滑性. 因此, 由 $L[u]=0$ 推出具有光滑的右端的微分方程

$$L[w]=-G(x,t)$$

和光滑的初始条件. 在 6.10 中将构造出此类问题的唯一的解. 所以 $u=U+w$ 就是本小节所提的 Cauchy 问题的唯一的解.

### 6.4.6′ 特征曲面作为波前

关于波和波前此处应作如下的说明. 在 6.3 中, 认为特征曲面是方程 $L[u]=0$ 的解 $u$ (称为 “波”) 可能出现间断性的地方, 亦即波前. 现在, 前面的结果又表明任一特征曲面 $\phi(t,x)=0$ 都是对于一个适当构成的波 $u$ 的一个波前. 所以, 可以把特征曲面定义为波前.

此外, Huygens 的波前构图法 —— 波前是依赖于参数 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 的另一族波前 $\phi(t,x,\alpha)$ 的包络, 其反映在下列定理中: 如果波 $u(t,x,\alpha)$ 是微分方程 $L[u]=0$ 的依赖于参数 $\alpha$ 的一个解, 并且在某一波前 $\phi(t,x,\alpha)=0$ 上是奇异的, 那么叠加式 $u(t,x)=\displaystyle\int u(t,x,\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 是一个波, 它的奇异性仅存在于波前 $\phi(t,x,\alpha)=0$ 的包络上. 关于这个事实的证明可参考 6.15.3 的讨论[①].

### 6.4.7 用收敛的波展开式解 Cauchy 问题

如果前进波展开式终止于第 $N$ 项或收敛于一个完全的前进波, 那么即使不依靠 6.10 中的存在定理, 前述的步骤也解决了 Cauchy 问题. 同前所述, 在这种情况下, 不管 $S$ 是否是奇异的, 对于任意的 $S(\phi)$ 这个展开式都表示 $L[u]=0$ 的一个解.

考察完全前进波的情况. 为了作出所有的系数 $g^\nu$, 先假定系数 $A^\nu,B$ 具有各阶的导数; 更确切地说, 假定它们是解析的 (如常数或者多项式). 于是, 下列定理成立.

设初始值是由下列级数给定的

$$u(0,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu(\phi(x))g^\nu(x),$$

而 $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(1/\nu!)(\phi)^\nu g^\nu(x)$ 关于 $x$ 是解析的, 即在 $x=0,\phi=0$ 的某邻域内可以展为一个一致收敛的幂级数. 那么在 6.4.4 中所定义的无穷级数

$$u(t,x)=\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu(\phi^\kappa(t,x))g^{\kappa,\nu}(t,x)$$

① 参考 D. Ludwig[1].

对于充分小的 $|x|$ 和 $t$ 也是收敛的并且是 Cauchy 问题的解. 这里 $S(\phi)$ 是任一分布.

借助 6.4.4 中构造法的基础对系数 $g^{\nu,\kappa}$ 及其导数的估计, 可以试图证明这个定理. 然而, 仅指出 D. Ludwig① 的一个漂亮的证明, 其成功地把这个论断归结于 Cauchy 和 Kowalewsky 存在定理.

### 6.4.8 二阶和高阶的方程组

利用对一阶方程组所采取的步骤, 能够对于 $m$ 阶方程组的形式如 (6) 的解得到一个非常一般的结果. 可以将它叙述如下：相函数 $\phi$ 是特征的, 且因子 $g^\nu$ 由形式如下的支量给出

$$g^\nu = \sigma^\nu r + h^\nu,$$

其中 $\sigma^\nu$ 是一个标量, 只要已知 $g^{\nu-1}, g^{\nu-2}, \cdots$ 便知道了 $h^\nu, h^0 = 0$, 并且 $r$ 是特征矩阵 $A$ 的右零化矢量.

在特征曲面 $C_c : \phi = c =$常数上, 标量 $\sigma = \sigma^\nu$ 沿着双特征射线满足下列输运常微分方程：

$$\dot{\sigma} + P\sigma + k^\nu = 0, \tag{18}$$

其中 $k^\nu$ 当已知 $g^{\nu-1}, \cdots$ 时是已知的, $k^0 = 0$, 并且其中不论 $\nu$ 取何值, 在 $C_c$ 上恒有

$$P = \frac{1}{(m-1)!} lL[(\phi - c)^{m-1} r]. \tag{19}$$

$l$ 表示 $A$ 的左零化矢量.

不难由明显的计算给出这个一般定理的证明, 例如当 $m = 2$ 时, 即对于一组 $k$ 个二阶方程：

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=0}^{n} A^{ij} u_{ij} + \sum_{i=0}^{n} A^i u_i + Bu = 0, \tag{20}$$

其中 $A^{ij} = A^{ji}, A^i$ 和 $B$ 是 $k \times k$ 矩阵 (见 6.3.1). 假定这些矩阵具有充分多的对 $x$ 的导数 (在拟线性的情况下还要它有充分多的对 $u$ 和对 $u_i$ 的导数). $A = \sum A^{ij}\phi_i\phi_j$ 是特征矩阵. 将 (7), (8) 代入 (20), 由 $A_{\phi_i} = 2\sum_{j=0}^{n} A^{ji}\phi_j$ 而得

$$\begin{aligned} L[u] =& S_{-2}Ag^0 + S_{-1}[Ag^1 + A_{\phi_i} g_i^0 + (A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^0] \\ &+ \sum_{\nu=0}^{N-2} S_\nu [Ag^{\nu+2} + A_{\phi_i} g_i^{\nu+1} + (A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^{\nu+1} + Lg^\nu] + \cdots. \end{aligned}$$

仍约定①当 $i \leqslant N-2$ 时 $S_i$ 的一切因子不仅在 $C = C_0$ 上而且在 $C_0$ 的一个

① 若 $S_i$ 是充分奇异的, 这在 $\phi = 0$ 上勿宁说是 $L[u] = 0$ 的一个推论.

$n+1$ 维的邻域中的 $C_c:\phi=c=$常数上等于零. 所以在这些曲面上 $Ag=0$. 因此 $|A|=0$, 于是整个曲面族 $C_c$ 是由特征曲面构成的, 并且 $g=\sigma r$, 如于 6.4.4 中所见.

$S_{-1}, S_0, \cdots$ 的系数在 $C_c$ 上给出

$$Ag^1 + A_{\phi_i} g_i^0 + (A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^0 = 0, \tag{21}$$

$$Ag^{2+\nu} + A_{\phi_i} g_i^{1+\nu} + (A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^{1+\nu} + L[g^\nu] = 0 \quad (\nu = 0, 1, \cdots). \tag{21a}$$

$$\cdots\cdots$$

现在用 $A$ 的左零化矢量 $l$ 乘之, 由于 $lA=0$, 恰与在 6.4.4 中一样得到

$$lA_{\phi_i} g_i^0 + l(A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^0 = 0, \tag{22}$$

$$lA_{\phi_i} g_i^\nu + l(A^{ij}\phi_{ij} + A^i\phi_i)g^\nu + lL[g^{\nu-1}] = 0, \tag{22a}$$

$$\cdots\cdots$$

因为在特征曲面 $\phi=$常数上有 $\sum_{j=1}^{n} lA_{\phi_i}\phi_j = 2lA = 0$, 这些微分方程又是在特征曲面内的方程. 根据 6.3.11 的引理, 特征射线矢量 $\dot{x}_i = Q_\phi$ 是和 $lA_\phi r$ 成比例的. 由此推知, 将 $g=\sigma r$ 代入 (22) 后便得到关于 $\sigma$ 的沿着 $C_c$ 中的射线的常微分方程 $\dot{\sigma} + P\sigma = 0$, 其中 $P = lL[r(\phi - c)]$.

完全如同 6.4.4 中所述, 可以得出限制 $\nu > 0$ 时的函数 $g^\nu$ 的奇异性的非齐次常微分方程. (21a) 是具有奇异矩阵 $A$ 的关于 $g^{\nu+2}$ 的一个线性方程组. 因为 (21a) 是相容的方程组 (见 6.4.4), 所以得到

$$g^{\nu+2} = \sigma^{\nu+2} r + h^{\nu+2}, \tag{23}$$

只要已知 $g, g^1, \cdots, g^{\nu+1}$ 及其导数, 上式中的 $h^{\nu+2}$ 便是已知的, 且 $\sigma^{\nu+2}$ 是一个标量. 把 $\nu+2$ 改写成 $\nu$ 并把 (23) 代入 (22a), 得到关于 $\sigma^\nu$ 在 $\phi - c = 0$ 上的非齐次常微分方程 (输运方程)

$$\dot{\sigma}^\nu + P\sigma^\nu = K^\nu,$$

其齐次部分和前面是一样的. 于是只要知道了 (6) 中所有的因子在 $C^c$ 上的一个与所有射线相交的 $n-1$ 维流形上的初始值, 就可以把这些因子一步步地确定出来.

对于更高阶的方程组, 证明基本上是一样的. 利用 6.3 中所说的特征的不变性, 还可以简化前面的计算. 详细的叙述从略.

### 6.4.9 补注. 弱解. 激波

像在第 5 章 5.9 中对于两个自变量所作的论述那样, 如果把微分方程 $L[u]=0$ 换成一个积分关系

$$\int uL^*[v]\mathrm{d}x=0,$$

那么就可以用 "弱解" 的概念获得容许有奇异性的广义解. 这里 $L^*$ 是伴随算子, $v$ 是具有 "紧致支集" 的任意光滑的试探函数, 即在一个充分大的球外恒等于零的函数. 对于 $n$ 个自变量的情况, 论述和前面完全一样, 此处无需重复. 无论如何, 它是和分布的概念 (参考附录) 密切地联系着的.

但是关于拟线性方程(1) 可以加一个注记. 对于它们来说, 特征和双特征的概念当然和线性的情况是一样的. 还有, 关于一阶导数的间断性的结论也仍旧成立.

然而, 假定要考虑函数 $u$ 本身的间断性, 那么 6.4.8 中的理论就不成立了. 如果一阶方程组具有一组守恒律的形式, 即如果可以把它们写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}P^{ij}(x,u)=0\quad(j=1,\cdots,k),$$

那么可以与第 5 章 5.9 中一样引入称之为 "激波" 的那种间断性.

于是, 对于 $u$ 跨过它时发生跳跃的那个曲面 $C:\phi(x)=0$, 这些定律的弱意义下的解释完全和第 5 章中一样引出激波条件:

$$\sum(P^{ij}(u))\phi_i=0\quad(j=1,\cdots,k),$$

其中 $u$ 的跳跃和间断曲面 $C:\phi=0$ 是互相连接在一起的, 因而激波面$C$ 不再是特征曲面.

最重要的例子是流体动力学方程组①, 在第 5 章已经就两个自变量的情况讨论过了.

## 6.5 振荡的初始值②. 解的渐近展开式. 向几何光学的过渡

### 6.5.1 前注. 高阶前进波

将 6.4 中的方法用于振荡的初始值, 可阐明 "几何光学" 中波沿光线而传播的现象. 对于高频率的振荡, 其给 Cauchy 问题提供一个渐近解而只需解一些常微分方程.

用下述间断初始函数的初值问题的解的叠加去构造解似乎是自然的, 即以 $\psi=\delta(x-\xi)$ 为初始函数, 它是严格地集中在点 $x=\xi$ 处的 (参考 6.15). 不管怎样, 恰好

① 详细的分析参考 R. Courant and K. O. Friedrichs[1], 116–172 页.
② 参考 P. D. Lax[4].

可以用 Fourier 积分把初始值分解为平面波系. 相应地, 需先求振动解, 然后将其叠加起来而构造出 Cauchy 问题的解, 这种方法和在常系数情况下相应的方法是类似的 (见第 3 章 3.5).

根据 6.4 的理论, 开始就来考虑形式上由

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j(\phi(x,t))g^j(x,t), \tag{1}$$

表示的 "前进波", 其中 $T_j$ 不一定是相函数 $\phi(x,t)$ 的奇异函数, 并且仍旧有 $T_j' = T_{j-1}$. 像在 6.4 中那样, 把 (1) 形式上代入 $L[u]=0$ 并要求 $T_{-1}, T_0, T_1, \cdots$ 的所有系数都等于零. 显然, 所得关于因子 $g^i$ 的形式关系和在 6.4 中对于奇异的 $T_j = S_j$ 所得到的关系是一样的.

利用复数记号, 特别选取

$$T_0(\phi(x,t)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\phi(x,t)}, \quad T_j = \frac{1}{(\mathrm{i}\xi)^j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\phi(x,t)}$$

其中 $\xi$ 是一个大参数.

### 6.5.2 渐近解的构造

不去管那些启发性的讲解而注目于构造双曲型方程组

$$L[u] = u_i + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = u_t + N(u) = 0 \tag{2}$$

的渐近解, 并假定它是形式为①

$$U^{\kappa}(x,t;\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\phi\kappa(x,t)}\left\{u_0^{\kappa} + \frac{u_1^{\kappa}}{\xi} + \cdots + \frac{u_\nu^{\kappa}}{\xi^\nu} + \cdots\right\} \tag{3}$$

的 $k$ 个式子的和, 其中函数矢量 $u_0, u_1, \cdots, u_\nu$ 不依赖于 $\xi$, 并且取到项 $u_\nu/\xi^\nu$ 的展开式的余式的数量级是 $\xi^{-\nu-1}$.

在 Cauchy 条件

$$u(0,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\phi(x)}\psi(x) \tag{4}$$

之下求方程 (2) 的解. 为此令

$$\phi^{\kappa}(x,0) = \phi(x),$$

以后将给出 $U^{\kappa}$ 的初始数据.

现在弃去 (3) 中的上角字 $\kappa$ 而来分析单独一个表达式 (3) 的构造. 将 (3) 代入

① 略去分母中的因子 $(i)^j$ 是无关紧要的.

$L[u]=0$, 用 $I$ 记单位矩阵, 并引入特征矩阵 $A=I\phi_t+\sum_{j=1}^{n}A^j\phi_j$, 由 (3) 形式地得到

$$0=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\phi(x,t)}L[u]=\mathrm{i}\xi A\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu}{\xi^\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{L[u_\nu]}{\xi^\nu}.$$

与 6.4 中一样, 比较两端 $\xi^{-\nu}$ 的系数 $(\nu=-1,0,1,\cdots)$, 便相继得到下列关系：

$$Au_0=0, \tag{5}$$

$$\mathrm{i}Au_{\nu+1}+L[u_\nu]=0 \quad (\nu=0,1,\cdots). \tag{6}$$

对于 (5) 的一个解 $u$ 又应有 $Q=|A|=0$. 于是 $\phi=$常数$=c$ 是以 $\phi(x,0)=\phi(x)$ 为初始值的一族特征流形. 假定 $A$ 的秩等于 $k-1$, 并分别用 $r$ 和 $l$ 记 $A$ 的右零化矢量和左零化矢量：$Ar=0, lA=0$. 于是有下列关系

$$u_0=\sigma r, \tag{7}$$

其中 $\sigma$ 是一个标量. 用 $l$ 乘 $\nu=0$ 时的 (6), 得到关于 $u_0$ 的 (从而有关于 $\sigma$ 的) 关系

$$lL[u_0]=lL[\sigma r]=0, \tag{8}$$

它和 6.4 中的 (11a) 是相同的. 若已知 $t=0$ 时 $\sigma$ 的初始值, 这个关系便以沿着属于特征曲面 $\phi=$常数的射线的一个常微分方程确定了 $\sigma$.

如果进一步假定已知 $u_0$, 那么当 $\nu=0$ 时的 (6) 便是关于矢量 $u$ 的支量具有奇异矩阵 $A$ 的线性方程组. 与 6.4 中一样, 由此得出

$$u_1=\sigma^1 r+h^1, \tag{9}$$

其中 $\sigma^1$ 是一个标量, 并且 $h^1$ 是用 $L[u_0]$ 表达的已知式子. 为了确定 $\sigma^1$, 用 $l$ 乘当 $\nu=1$ 时的 (6) 而得到 "输运方程"

$$lL[u_1]=lL[r\sigma^1]+lL[h^1]=0, \tag{10}$$

这是关于标量 $\sigma^1$ 的沿着属于特征流形 $\phi=$常数的一条射线的又一个常微分方程 (非齐次的).

同样, 得到

$$u_j=\sigma^{j_r}+h^j, \tag{11}$$

$$lL[u_j]=0 \quad 或 \quad lL[r\sigma^j]+lL[h^j]=0, \tag{12}$$

只要知道了 $u_0,u_1,\cdots,u_{j-1}$, 便知道了其中的 $h^j$, 而前者可由前述关于标量 $\sigma^j$ 的常微分方程确定.

令

$$ {}^JU = \alpha e^{i\xi\phi(x,t)}\left\{u_0 + \frac{u_1}{\xi} + \cdots + \frac{u_J}{\xi^J}\right\}, \tag{13} $$

有

$$ \boldsymbol{L}[{}^JU] = \alpha e^{i\xi\phi(x,t)}\sum_{\nu=-1}^{J}[iAu_{\nu+1} + L[u_\nu]]\frac{1}{\xi^\nu} = \frac{P^J}{\xi^J}, \tag{14} $$

其中 $P^J$ 是有界的. 这个表达式关于 $\xi$ 的数量级是 $\xi^{-J}$, 也就是得到了 $U$ 的一个渐近表达式.

现在转到 (2) 的 Cauchy 问题. 由 (2) 的双曲性可推出 (见 6.3) 对应于同一个初始数据 $\phi^\kappa(x,0) = \phi(x)$, 从族 $\phi(x) = c =$常数中的每一个初始流形伸张出 $k$ 个特征曲面 $\phi^\kappa(x,t) = c$. 所有这些 $\phi^\kappa$ 都满足特征微分方程

$$ Q = \left|\phi_t I + \sum_{j=1}^{n} A^j\phi_j\right| = 0. $$

即使这些曲面之中有些是重合的, $k$ 个左零化矢量 ${}^1l, {}^2l, \cdots, {}^kl$ 和 $k$ 个右零化矢量 ${}^1r, {}^2r, \cdots, {}^kr$ 都是线性独立的矢量组.

对于这些特征曲面 $\phi^\kappa$ 中的每一个, 考虑前面所作的渐近解 $U^\kappa$. 相应地, 应当考虑 (7) 和 (11) 中的 $k$ 个标量因子 $\sigma$(略去 $u_j$ 的下标 $j$), 并把它们分别记为 $\sigma, {}^2\sigma, \cdots, {}^k\sigma$. 然后借助于等式

$$ \sum_{\kappa=1}^{k} u_0^\kappa(x,0) = \psi(x), \tag{15} $$

$$ \sum_{\kappa=1}^{k} u_j^\kappa(x,0) = 0 \quad (j \geqslant 1), \tag{16} $$

其中 $\psi(x)$ 是任意的充分光滑的函数, 调整支量 $u_0^\kappa(x,0), u_j^\kappa(x,0), \cdots$ 的初始值.

由 (7) 和 (11) 知 $u_0^\kappa = {}^\kappa\sigma^0 r^\kappa$ 且 $j > 1$ 时 $u_j^\kappa = {}^\kappa\sigma^j r^\kappa + {}^\kappa h^j$, 其中 ${}^\kappa\sigma^j$ 是标量. 将其代入 (15) 和 (16), 然后考察 $t = 0$ 时的这些关系. 这些矢量 $r^\kappa$ 的线性独立性保证对于每一个 $j$ 值都唯一地确定了 $k$ 个标量 ${}^\kappa\sigma^j$ 的初始值. 于是, 对于方程组 (2) 的以 $u(x,0) = e^{i\phi(x)}\psi(x)$ 为初始值的 Cauchy 问题, 实际作出了解, 它是形如 (3) 的 $k$ 个和式的和.

根据 (14), ${}^JU^\kappa$ 的按 $1/\xi$ 展开的有限幂级数渐近地表达了支量 $U^\kappa$. 由此得到最终的结论：${}^JU = \sum_{\kappa=1}^{k} {}^JU^\kappa$ 确实是以 $e^{i\phi(x)}\psi(x)$ 为初始值的函数 $u$ 的一个渐近表达式. 事实上, 因为 $L[u] = 0$, 对于 ${}^JV = {}^JU - u$ 由 (14) 有

$$L[{}^J V] = \frac{P^J}{\xi^J},$$

同时 ${}^J V$ 的初始值是零. 所以 ${}^J V$ 的 Duhamel 积分表达式 (例如 6.10.1 中的) 表明 ${}^J U$ 关于 $\xi$ 的数量级和 $\xi^{-J}$ 相同, 因此上述表达式是渐近的.

此外, 如果初始数据具有充分高阶的连续导数, 那么类似的估计对于任意高阶导数的渐近表达式也成立.

由上述渐近解可以得出初值问题的一个近似解 —— 常常还是颇为精确的解. 它是由仅解一些常微分方程而得到的, 因为在确定 $\phi^\kappa$ 以及依次确定 $u_0, u_1, \cdots, u_j$ 的时候仅依赖一些常微分方程和一些代数步骤.

### 6.5.3 几何光学

这里所说的几何光学的渐近理论要追溯到 Green, Liouville (1837), A. Sommerfield 和 J. Runge①.

现在可以了解由偏微分方程 (2) 所表达的波动光学和用光线的几何性质描写波动现象的几何光学之间的关系了. 在光学中, 要处理高频振动, 这时偏微分方程的精确解的渐近展开式的首项给出了它的初次近似解. 展开式的这一项以及后面的那些项都是借助沿着光线的常微分方程而确定的. 自然地, 在几何光学和 6.4 与本节中的展开式之间有密切的联系.

通常在光学中不涉及初值问题而要考虑的是混合问题和边值问题, 这时假定数据和解除了一个因子 $e^{i\omega t}$ 之外都和时间无关. 此外, 还假定微分方程的系数都和时间无关. 考虑一阶方程组

$$L[u] \equiv u_t + M[u] \equiv u_t + \sum_{\nu=1}^{n} A^\nu(x) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + B(x)u = 0. \tag{17}$$

令

$$u(x,t) = e^{i\omega t} v(x)$$

而将空间变量和时间变量分开. 于是, $v(x)$ 需满足 “约化的方程”：

$$M[v] + i\omega v = 0. \tag{18}$$

另一方面, 知道 (17) 有如下形式的解：

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\phi) g^j(x,t), \tag{19}$$

① 文献见 J. B. Keller[1]; J. B. Keller, R. M. Lewis, and B. D. Seckler[1]; M. Kline[1], [2]; P. D. Lax[4] 和 R. K. Luneburg[1], [2].

其中 $T_j(\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\phi}/(\mathrm{i}\omega)^j$. 鉴于微分方程的系数都与 $t$ 无关, 来考虑系数 $g^j(x,t)$ 也都与 $t$ 无关的那种解. 若令

$$\phi(x,t)=t+\psi(x),$$

则有

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\psi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g^j(x)}{(\mathrm{i}\omega)^j};$$

因此

$$\nu(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\psi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g^j(x)}{(\mathrm{i}\omega)^j}. \tag{20}$$

于是, 按本节的办法, 导出约化方程 (18) 的一个渐近展开式. 系数 $g^j(x)$ 需满足下列关系

$$\left(I\phi_t+\sum_{\nu=1}^{n}A^\nu\phi_\nu\right)g^{j+1}+L(g^j)=0\quad(j=-1,0,\cdots), \tag{21}$$

或者等价地,

$$\left(I+\sum_{\nu=1}^{n}A^\nu\psi_\nu\right)g^{j+1}+Mg^j=0\quad(j=-1,0,\cdots).$$

在 6.4 和本节前面都曾看到, 可以仅通过求解沿光线的常微分方程而求得方程 (21) 的解. 因此可以用常微分方程找到展开式 (20). 这些沿着光线的常微分方程就是几何光学的方程.

在 6.4 的理论和非齐次的约化方程 (18) 之间也有相仿的对应关系. 考虑方程

$$L[u]\equiv u_t+Mu=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(x). \tag{22}$$

设 $u(t,x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}v(x)$, 则 $v(x)$ 应满足

$$Mv+\mathrm{i}\omega v=f(x).$$

用条件

$$L[w]=0,\quad 当\ t>0,$$
$$w(x,0)=f(x)$$

定义 $w(x,t)$. 于是 Duhamel 原理给出形式解

$$v(x,\omega)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega s}w(x,s)\mathrm{d}s. \tag{23}$$

当 $\omega$ 很大时, $v$ 的渐近展开式是由 $w(x,t)$ 的奇异性确定的, 后者又依赖于 $f(x)$ 的奇异性. 根据 6.4 知道这些奇异性沿光线而传播. 所以, 同上所述, 可用沿着光线的常微分方程确定出与几何光学相应的 $v(x)$ 的渐近展开式.

## 6.6 初值问题的唯一性定理和依赖区域的例子

能量积分法是 S. Zaremba① 首先应用的. A. Rubinowicz②, K. O. Friedrichs 和 H. Lewy③又重新发现了它, 推广了它, 并把它用于处理对称双曲型方程组. K. O. Friedrichs④和 J. Schauder⑤后来发表的许多论文显然表明了这个方法的力度和适用范围的广泛性.

在本节中, 考察 Cauchy 问题解的可确定性及唯一性的几个典型例子, 首先是几个二阶方程, 以便更好地体会 6.8 中的一般理论 (参考第 5 章 5.4).

任意初始数据的 Cauchy 问题解的存在性和唯一性是彼此密切有关的两个论题 (参考第 3 章 3.6); 将在 6.8, 6.9, 6.10 中借助解及其导数的某种被称为 "能量积分" 的方均值去讨论它. 只要知道了与某一点 $P$ 相应的有界的 "依赖区域" 上的 Cauchy 数据, 那么问题的解在点 $P$ 处的值便唯一地确定了. 6.6 和 6.7 的目的就是要说明唯一性和可确定性的重要事实.

### 6.6.1 波动方程

对于二维波动方程

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

下面给出的唯一性的证明和第 5 章中相应的论述有些不同. 设 $S$ 是任一类空间的初始曲面 $\phi(x,y,t)=0$, 且

$$\phi_t^2 - \phi_x^2 - \phi_y^2 > 0$$

或

$$t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

其中 $x_\nu, y_\nu, t_\nu$ 表示曲面的单位法矢量的支量, 即

$$x_\nu = \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_t^2}}, \quad y_\nu = \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_t^2}},$$

$$t_\nu = \frac{\phi_t}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_t^2}}.$$

假定微分方程的一个解 $u$ 和它的一阶导数在 $S$ 的一个子区域 $B'$ 上都等于零. 断言: 只要通过 $P$ 的特征锥和初始曲面的交线落在 $B'$ 之内, 那么 $u$ 在点 $P$ 处的值必等于零 (见图 6-11).

① 参考 S. Zaremba[1].
② 参考 A. Rubinowicz[1] 和 [2].
③ 参考 K. O. Friedrichs and Lewy [1].
④ 例如 K. O. Friedrichs [2].
⑤ 参考 J. Schauder [4].

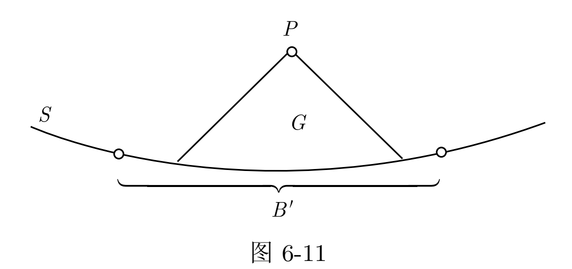



图 6-11

用 $G$ 表示由 $B'$ 和顶点在 $P$ 的特征锥面所围出的区域. 特征锥面是 $x, y, t$ 空间里的锥面, 它的母线和平面 $t=0$ 成 45 度角, 即特征射线.

证明的基础是恒等式

$$2u_tL[u] \equiv -2(u_tu_x)_x - 2(u_tu_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y)_t^2 + (u_t^2)_t = 0, \tag{2}$$

而且要把它在区域 $G$ 上进行积分. 因为表达式 (2) 是一个散度, 引用 Gauss 定理并将初始条件代入, 即得

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_M (u_x^2t_\nu + u_y^2t_\nu + u_t^2t_\nu - 2u_tu_xx_\nu - 2u_tu_yy_\nu)\mathrm{d}S \\ &= \iint_M \frac{1}{t_\nu}[(u_xt_\nu - u_tx_\nu)^2 + (u_yt_\nu - u_ty_\nu)^2]\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

其中 $M$ 是锥面的那一部分, 它属于区域 $G$ 的表面, $\mathrm{d}S$ 是 $M$ 上的面元, 并且考虑了在 $M$ 上的关系 $t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 = 0$. 所以, 上面这个展布在锥面上的积分等于零, 因而被积分式等于零. 换句话说, $u_xt_\nu - u_tx_\nu = 0$ 且 $u_yt_\nu - u_ty_\nu = 0$ 在 $M$ 上处处成立. 于是, $u$ 的两个线性独立的内导数在 $M$ 上等于零. 所以解 $u$ 在 $M$ 上是常数, 因此由初始条件知道它在 $M$ 上恒等于零. 由此可知 $u$ 在点 $P$ 处等于零.

这个论证同时说明了微分方程的在下述意义上的依赖区域: 在给定了 $S$ 上的初始值后, 解 $u$ 在点 $P$ 处的值仅依赖于 $S$ 的被经过 $P$ 的向后特征射线锥面截割出来的那一部分上的初始值.

对于三个或更多个自变量的情况, 唯一性和依赖区域的问题可以用第 5 章 5.4 中对于更一般的微分方程 $u_{tt} - \Delta u + au_x + bu_y + cu_t + du = 0$ (其中 $a, b, c, d$ 皆为时间 $t$ 和空间变量 $x, y$ 的任意的连续函数) 所采取的方法去解决 (参考 6.8 中的一般理论).

下面来证明 "波动方程的特征初始值问题" 的唯一性. 这里, 初始值不再是给定在一个类空间的初始流形 $(\phi_t^2 - \phi_x^2 - \phi_y^2 > 0)$ 上, 而是给定在一个特殊的初始流形上, 确切地说, 在一个特征半锥面 $K$:

$$(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = 0 \quad (t \geqslant t_0) \tag{3}$$

上. 按照前述结论, 不能任意地给定函数 $u$ 和一个外导数 (因而给定了一切导数) 而仅能任意地给定函数 $u$ 本身. 假定已给的初始值是在这锥的包含其顶点在内的某邻域上的一个连续可微函数在这锥面上所取的值. 于是, $u$ 在 (3) 所定义的半锥面 $K$ 上的值处处唯一地确定了 $u$ 在半锥 (见图 6-12).

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2>0 \quad (t>t_0)$$

内各处的值. 由前面所得的公式可证明这个断言: 假定 $u$ 在特征锥上的初始值为零, 并在由此锥和以点 $P$ 为顶点的后特征锥所围的区域 $G$ 上积分恒等式 (2). 用 $M_1$ 和 $M_2$ 分别记这两个锥面上所论的部分, 并且沿用前面的记号, 立即得到

$$\iint_{M_2}\frac{1}{t_\nu}[(u_xt_\nu-u_tx_\nu)^2+(u_yt_\nu-u_ty_\nu)^2]\mathrm{d}S=0,$$

因被积分式中仅含 $u$ 在这些锥面上的内导数, 而由假定可知它们在 $M_1$ 上皆等于零, 所以在 $M_1$ 上的积分等于零. 于是独立的内导数 $u_xt_\nu-u_tx_\nu, u_yt_\nu-u_ty_\nu$ 在过 $P$ 的锥面 $M_2$ 上同样也等于零. 由此可知, 在锥面 $M_2$ 上 $u$ 是常数. 又因为 $u$ 在两个锥面的交线上等于零, 所以 $u$ 在 $M_2$ 上恒等于零, 特别是在点 $P$ 处 $u$ 也等于零.

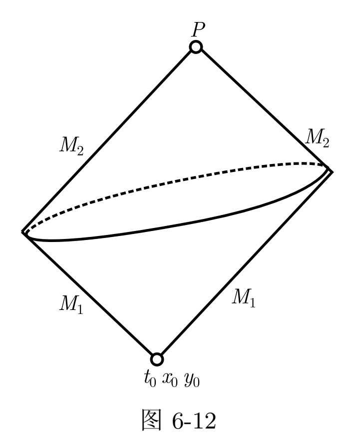



图 6-12

### 6.6.2 微分方程 $u_{tt}-\Delta u+\frac{\lambda}{t}u_t=0$ (Darboux 方程)[①]

这个方法的另一变形可用于所谓 Darboux 方程:

$$L[u]\equiv u_{tt}+\frac{\lambda}{t}u_t-\Delta u=0, \tag{4}$$

其包括一个奇异项. 此处 $\lambda$ 是变量 $x_i$ 和 $t$ 的任一非负连续可微函数. 特征方程仍是

$$\phi_t^2-\phi_{x_1}^2-\phi_{x_2}^2-\cdots-\phi_{x_n}^2=0 \tag{5}$$

① 参考 6.13.

或

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \nu}\right)^2-\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2=0, \tag{5a}$$

且特征锥 $\phi(x,t)=(t-\tau)^2-\sum_{i=1}(x_i-\xi_i)^2=0$ 也和 6.6.1 中的一样. 证明: 若方程 (4) 的一个二次连续可微的解 $u$ 和它的导数 $u_t$ 在以 $P$ 为顶点 $(t>0)$ 的特征锥的底面 $B$ (在平面 $t=0$ 内) 上恒等于零, 则 $u$ 在点 $P$ 处以及此锥内部 $G$ 的任何地方皆等于零.

证明因为有

$$0=-2u_tL[u]\equiv 2\sum_{i=1}^{n}(u_tu_{x_i})_x-\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+u_t^2\right)_t-\frac{2\lambda}{t}u_t^2.$$

于是, 乘以体积元素 d$v$, 在区域 $G$ 上积分, 考虑在 $B$ 上的初始条件, 并对右端的散度引用 Gauss 定理, 则得

$$0=\iiint\limits_G\frac{2\lambda}{t}u_t^2\mathrm{d}v+\iint\limits_M\left[-2u_t\sum_{i=1}^{n}u_x\frac{\partial x_i}{\partial \nu}+\left(u_t^2+\sum_{i=1}^{n}u_x^2\right)\frac{\partial t}{\partial \nu}\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $M$ 表示锥的表面, d$S$ 为 $M$ 上的面元. 由于 $M$ 上的特征关系 (5a), 沿 $M$ 积分的被积分式可以写成

$$\frac{1}{t_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left(u_x\frac{\partial t}{\partial \nu}-u_t\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2.$$

因为 $\lambda>0$, 立即推出关系 $u_t=0$ 在 $G$ 内处处成立. 于是 $u$ 在 $G$ 内恒等于零, 如所断言.

### 6.6.3　真空中的 Maxwell 方程

作为四个自变量的微分方程组的一个例子, 仍然考虑 Maxwell 方程组[①] (参考第 3 章 3.2), 并令光速 $c=1$:

$$\mathfrak{E}_t-\mathrm{curl}\mathfrak{H}=0,\quad \mathfrak{H}_t+\mathrm{curl}\mathfrak{E}=0. \tag{6}$$

对于这个微分方程组, 假定已知矢量 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{H}$ 当 $t=0$ 时的初始值来考虑 Cauchy 问题. 目的是要证明: 若 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{H}$ 的初始值恒等于零, 则矢量 $\mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{H}$ 必恒等于零. 事

① 对于 Maxwell 方程组还应补充下列关系:

$$\mathrm{div}\mathfrak{G}=0,\quad \mathrm{div}\mathfrak{H}=0.$$

当这些关系在初始空间 $t=0$ 内成立时, 不难据 (6) 证明它们在整个时空内成立. 所以这两个关系具有初始条件的性质.

实上, 如果把下面的唯一性的证明 (同样还有对于晶体光学方程的证明) 看成是 6.8 的一般结论的一个特例, 那么它会显得更加明显. 不过, 因为历史上对特殊情况的证明曾经推动了一般理论的发展, 还是要把它写在这里.

对于四维的 $x, y, z, t$ 空间的任一点有一个特征超锥面, 它被初始超平面 $t = 0$ 截出的截口是一个三维球 $B$. 利用平行于初始超平面的一个超平面 $t = h$, 把这个四锥 $G$ 截出一个截头锥 $G_h$, 它的边界是 $B$, 锥 $G$ 的表面的一部分 $M_h$, 还有在 $t = h$ 上的部分 —— 球 $D_h$ (见图 6-13).

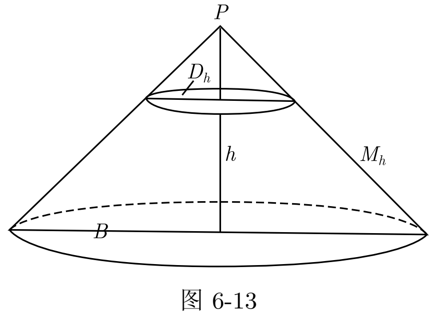


图 6-13

由矢量恒等式 $\mathfrak{H}\mathrm{curl}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\mathrm{curl}\mathfrak{H} = \mathrm{div}[\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]$, 可以从 Maxwell 方程推出

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t - \mathrm{curl}\mathfrak{H}) + 2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t + \mathrm{curl}\mathfrak{E}) \\ &= (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)_t + 2\mathrm{div}[\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]. \end{aligned}$$

先固定 $t$ 而把它对 $x, y, z$ 在 $G_h$ 上积分, 然后再对 $t$ 由 0 到 $h$ 积分. 考虑在 $t = 0$ 上的初始条件 $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$, 立即得到

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{M_h} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) t_\nu \mathrm{d}S + 2\iiint\limits_{M_h} [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] \mathfrak{x}_\nu \mathrm{d}S \\ &\quad + \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\mathfrak{x}_\nu$ 是 $x, y, z$ 三维空间内中心在点 $P$ 的投影上而半径为 $t$ 的球的法矢量, 并且 $t_\nu = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ 是 $M_h$ 的法矢量沿 $t$ 轴方向的支量.

由 $M_h$ 上的特征条件 $t_\nu^2 = \mathfrak{x}_\nu^2$, 得到在 $M_h$ 上成立的关系:

$$(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) t_\nu^2 + 2t_\nu \mathfrak{x}_\nu [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] = \mathfrak{E}^2 t_\nu^2 + 2\mathfrak{E}[\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu] t_\nu + \mathfrak{H}^2 \mathfrak{x}_\nu^2.$$

又因为 $[\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu]^2 = \mathfrak{H}^2 \mathfrak{x}_\nu^2 - (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{x}_\nu)^2$, 所以右端等于

$$(\mathfrak{E} t_\nu + [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu])^2 + (\mathfrak{H}\mathfrak{x}_\nu)^2.$$

于是从 (7) 推出

$$0 = \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iiint\limits_{M_h}\frac{1}{t_\nu}\{(\mathfrak{E}t_\nu+[\mathfrak{H}\times\mathfrak{x}_\nu])^2+(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{x}_\nu)^2\}\mathrm{d}S,$$

由此又推出在 $D_h$ 上恒有 $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$, 因而它们在 $G$ 内处处也成立. 这正是所要证明的.

对于 6.3′ 的晶体光学微分方程组 (7), 可以相仿地证明唯一性定理并找出依赖区域, 但是对此略去详细的讨论而建议参考 6.8 的一般理论.

## 6.7　双曲型问题的依赖区域

### 6.7.1　引言

6.6 的例子表明, 双曲型的初值问题的一个重要特点是属于点 $P$ 的一个有界区域 $\Gamma=\Gamma_P$ 内的 Cauchy 数据唯一地确定了解 $u(P)$ 在点 $P$ 处的值. 这个区域之外的 Cauchy 数据对 $u(P)$ 的值没有影响. 显然, 如果 $\Gamma_P$ 内的 Cauchy 数据处处为零, 则有 $u(P)=0$. 这个特点是与双曲型问题反映着波以有限速度传播这一事实相符合的.

显然, 联系 $u(P)$ 和 $\Gamma_P$ 中的数据的唯一性定理表明了此种依赖区域$\Gamma_P$ 的存在性. 将在 6.8 中陈述并推导这些唯一性定理. 在本节中, 限于对依赖区域 $\Gamma_P$ 作几何的说明.

顺便指出, 依赖区域 $\Gamma_P$ 的概念派生出初始区域 $D$ 的影响区域的概念. 这个区域是所有那样的点的集合, 它们的依赖区域都和 $D$ 有公共点. 从物理上说, 影响区域 $I_D$ 之外的现象不受 $D$ 内数据的影响, 即 $I_D$ 之外的介质对于 $D$ 内的初始状况无所察觉.

应当预先指出这些概念中有一点模糊不清的地方, “$\Gamma_P$ 是 $u(P)$ 的一个依赖区域” 这句话蕴含着一种否定的意义, 它仅仅肯定 $\Gamma$ 之外的数据不影响 $u(P)$ 的值. 任何一个包含 $\Gamma$ 的区域 $\Gamma^*$ 也属于同一范畴. 因此, 依赖区域的确切含意应当定义为那样一个最小的点集 $\Gamma$, 使得在 $\Gamma$ 内任给的数据能够唯一地确定 $u(P)$. 但是要对这个区域 $\Gamma$ 作一般的刻画是困难的. 它可能是 $x$ 空间里具有间隙[1]的一个区域, 在另一些情况下它还可能是仅由此种区域的边界组成的 (参看后面关于 Huygens 原理的讨论). 因此寻求一个折衷的说法, 把依赖区域 $\Gamma$ 定义为用自然而一般的几何描述尽可能便于到最小的区域, 而不一定要着眼于最小点集. 将在 6.7.2 中给出这种描述.

① 此种间隙的发生有弹性波 (参考 6.13′) 和晶体光学为其例证. I. G. Petrovskii[3] 曾对这个现象作过深刻的一般研究.

### 6.7.2 依赖区域的描述

仍选定时间 $t=x_0$ 并用 $x$ 表示空间变量 $x_1,\cdots,x_n$, 同时假定 $x$ 空间是类空间的, 因而 $t$ 是一个真正的时间变量. 将考虑两个密切联系着的概念：依赖区域 $\Gamma_P$ 和射线劈锥面的外壳, 也就是在 6.3 中所说的以 $P$ 为中心的外球面波前. 这种由 $P$ 向 $t$ 减小的方向画的劈锥是 "后向依赖劈锥", 向 $t$ 增加的方向画的劈锥是 "前向依赖劈锥". 如果方程是非齐次的, 那么依赖区域是由 $n+1$ 维 $x,t$ 空间里在 $\Gamma_P$ 上和它的内部而介于 $P$ 和初始流形之间的一切点组成的. 如果方程是齐次的, 那么依赖区域仅包括 $\Gamma_P$ 上和 $\Gamma_P$ 内而落在初始流形 $I$ 上的点. 仍将随意用符号 $\Gamma_P$, 或者在齐次方程的情况, 用 $\gamma_P$ 表示依赖区域.

为了重述并扩充在 6.3 中给出的定义, 首先考虑算子 $L[u]$, 它的主部是常系数的, 于是 $L[u]$ 的双曲性质保证法锥面的内核是凸的 (见 6.3.7). 它的对偶锥 $\Gamma$ 也是凸的, 在 $\Gamma$ 上每一点处的法线皆属于法锥内核的边界. 所以 $\Gamma$ 的面元把类空间面元和其他的面元区分开来. 如上所述, $\Gamma=\Gamma_P$ 就定义为依赖劈锥.

还可以定义 $\Gamma_P$ 如下：设 $P$ 的坐标是 $(\tau,\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 对于每一个 $\alpha$ 值来考察特征平面

$$v(t-\tau)-\alpha\cdot(x-\xi)=0,$$

其中速度 $v$ 是极大值. $\Gamma_P$ 是所有半空间 $v(t-\tau)-\alpha(x-\xi)\leqslant 0$ 的交集. 即它们的公共点集. 其中 $\alpha$ 跑过单位球面.

对于非常系数的情况, 定义是相仿的. 通过类空间平面 $t=\tau$ 上的线性流形 $(\alpha x)=0$ 或者 $(\alpha(x-\xi))=0$, 向着 $t<\tau$ 的方向画 "类平面" 的特征曲面. 它们之中其 "负" 法线方向指向法锥内核的边界之内的那一个, 把类空间面元和其他的面元分别开来, 并且对应于点 $P$ 处的一个极大的局部速度. 于是, $\Gamma_P$ 是那些相应的半空间的交集, 其中 $\alpha$ 跑过单位球面. 仍然可以把 $\Gamma_P$ 看成是过 $P$ 的后向射线劈锥面的一个壳罩.

由 6.3.7 中的 "类时间的" 一词的定义立即得到下面的解说：依赖劈锥 $\Gamma_P$ 的内部是这样一个点集, 可以用处处类时间的曲线把它的每一个点都和 $P$ 连接起来.

在下一节里将限于讨论一阶的对称双曲型算子

$$L[u]=u_t+\sum_{i=1}^{n}A^i u_i+Bu=u_t+Mu.$$

于是 $t=$常数是类空间的, 由平面 $t=\tau$ 的落在劈锥 $\Gamma$ 之内的部分和这劈锥的 "罩子"$R_\tau^*$ 介于 $t=0$ 和 $t=\tau$ 之间的部分 $(0\leqslant t\leqslant\tau)$ 所组成的曲面 $R_\tau$ 构成一个 "类空间的透镜" $L_\tau$. 如果 $t=\tau$ 是 $P$ 的时间坐标, 那么这个透镜就和劈锥的 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 的那一段的内部重合.

假定 $\phi(t,x)=0$ 表示透镜 $L_\tau$ 的表面, 那么特征形 $A=I\phi_t+\sum_i^n A^i\phi_i$ 在 $t=0$ 和 $t=\tau$ 上显然都等于单位矩阵, 并且特征矩阵 $A$ 在罩子 $R_\tau^*$[①] 上是非负的.

诚然, 在对应于一个极大速度的类平面特征曲面上, 立即看出特征矩阵是非负的. 因为 $\Gamma_P$ 的边界上的每一个点都是这样一个特征曲面的切点, 特征矩阵在 $\Gamma_P$ 的边界上是非负的. 所以对于一个曲面来说, 如果它的元素恰好都在类空间元素集合和非类空间元素集合的分界上, 特征矩阵肯定是非负的.

自然, 依赖区域和影响区域这两个概念更普遍地也同样适用于任何点集 $\Pi$, 例如, 平面 $t=$常数$>0$ 上的一个区域. 这时依赖区域 $C_\Pi$ 是由所有 $t\geqslant 0$ 而可从 $\Pi$ 沿着类时间曲线达到的那些点的集合的闭包构成的.

上面已经着重指出过, 依赖区域 $\Gamma_P$ 的概念中有一点灵活的余地, 因为可以用包含 $\Gamma_P$ 在内的一个较宽广的区域 $\bar\Gamma_P$ 代替 $\Gamma_P$. 特别地, 可以考虑过点 $P$ 具有极大速度的三个类平面的特征曲面所围成的一个 "四面体" 区域 $\bar\Gamma_P$. 于是 $\Gamma_P$ 就是所有这些四面体区域 $\Gamma_P$ 的共同的部分.

再指出：本节中诸概念的正确性隐含于下面的唯一性和存在性的证明之中[②].

## 6.8 能量积分和一阶线性对称双曲型方程组的唯一性定理

### 6.8.1 能量积分和 Cauchy 问题的唯一性

在本节中, 限于研究线性而基本上是对称的双曲型一阶方程组, 其定义已见于 6.3.8. 它们的形式是

$$L[u]=\sum_{i=0}^n A^i u_i+Bu=0, \tag{1}$$

其中所有的矩阵 $A^i$ 都是对称的, 但是 $B$ 不一定是对称的.

据 6.3.7 知, 如果在曲面 $S:\phi(x)=0$ 上特征矩阵

$$A=A^i\phi_i$$

是正定的, 则对于 $L$ 来说 $S$ 是类空间的. 假定方程组 (1) 是双曲型的, 即它有类空间的曲面. 不失一般性, 仍假定超平面 $x_0=t=$常数是类空间的, 即矩阵 $A^0$ 是正定的.

① $R_\tau^*$ 是 "弱类空间的"; 有时姑且把 $R_\tau^*$ 叫做类空间的. 主要的是不等式 $A\geqslant 0$ 在 $R_\tau^*$ 上仍然成立.

② 十分明显可见的例子表明不一定常常需要用射线劈锥面的凸壳代替这劈锥面. 例如, 取 $n=2,k=2,L_1=D_0^2-D_1^2-4D_2^2,L_2=D_0^2-4D_1^2-D_2^2$. $x,y$ 平面中的射线曲面是由两个相交的椭圆构成的. 如果 $u_1$ 和 $u_2$ 的初始数据是分别给定在这两个椭圆上的, 方程组 $L_1[u_1]=0,L_2[u_2]=0$ 显然有唯一的解而无需考虑凸壳. 但是如果两个方程由于低于二阶的项同时包含 $u_1$ 和 $u_2$ 而纠结到一起, 那么射线曲面仍旧不变, 而数据必须给定在凸壳上.

本节讨论的基础是 Gauss 公式, 它是 $uL[u]$ 的如下的 “散度” 表示式的直接推论:

$$2uL[u] = (u, A^j u)_j + 2(u, Bu) = 0, \tag{2}$$

其中

$$\hat{B} = B - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} A_j^j. \tag{3}$$

利用一个简单的变量代换, 恒可将 $L$ 变换为一个新的算子, 使得 $(u, \hat{B}u)$ 是正定的. 代替 $u$, 引入函数

$$v = \mathrm{e}^{-\mu x_0} u, \tag{4}$$

其中 $\mu$ 为一正的常数. 于是 $L[u] = \mathrm{e}^{\mu x_0}\{L[v] + \mu A^0 v\} = 0$, 从而有

$$\sum A^j v_j + B^* v = 0, \tag{1a}$$

其中

$$B^* = \hat{B} + \mu A^0. \tag{5}$$

因为假定了 $A^0$ 是正定的, 那么只要把 $\mu$ 取得充分大, 二次型 $(u, B^* u)$ 在任何给定的区域上也是正定的. 特别是可以认为

$$(u, u) \leqslant 2(u, B^* u). \tag{6}$$

设 $D$ 为 6.7 中所说的一个透镜形状的区域, 即由沿其公共边界连接在一起的两个类空间曲面 $S_0$ 和 $S$ 围成的一个区域. 于是下列唯一性定理[①]成立: 如果一个解 $u$ 在 $S_0$ 上恒等于零, 那么它在每一个和 $S_0$ 在一起构成一个类空间透镜的曲面 $S$ 上也恒等于零.

在透镜 $D$ 上积分 (2) 就几乎立即得到证明. 这样得到的 Gauss 公式是

$$0 = \int_S (u, Au)\mathrm{d}S - \int_S (u, Au)\mathrm{d}S + \iint_D (u, \hat{B}u)\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{d}S$ 表示面元, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots$ 表示体元, $A$ 是边界上的特征矩阵. 因为 $(u, Au)$ 和 $(u, \hat{B}u)$ 都是正定的, 所以 $u$ 在 $D$ 内恒等于零.

注意在这个证明中利用了 $S$ 的而不是 $S_0$ 的类空间性质.

如果 $B$ 恒等于零, 则称算子 $L$ 是守恒的.

在这种情况下, 沿曲面 $S_0$ 计算的 “能量”

$$\int (u, Au)\mathrm{d}S$$

和沿 $S$ 计算的是一样的, 这件事能联想到 “能量的守恒” 因而取名 “能量积分”.

① 读者应当把本节中的讨论和第 3 章附录 II 中的 Holmgren 定理对比. Holmgren 定理的证明是以伴随微分方程的 Cauchy 问题解的存在性为基础的, 而并不利用对称性或者双曲性.

### 6.8.2　一阶的和高阶的能量积分

将区分出变量 $x_0 = t$ 作为时间, 并且和前述一样假定超平面 $t =$常数是类空间的. 按 6.3, 可以引入新的未知函数 $u$ 使微分方程取得简化的形式

$$L[u] = u_t + \sum^{n} A^i u_{x_i} + Bu = 0, \tag{1b}$$

其中矩阵 $A^i$ 仍然是对称的.

考察特别的透镜形的区域, 或者更确切地说, 按下述方式构造成的单参数族的透镜形的区域：设 $P$ 为 $t, x$ 空间内的一点, 它的 $t$ 坐标是正的. 令 $\Gamma_P$ 为点 $P$ 的后向依赖劈锥 (见 6.7). $R_h$ 表示 $\Gamma_P$ 和超平面 $t = h$ 的截口. 于是考虑由 $S_0 = R_0$ 和 $S_1 = R_h + M_h$ 所围成的透镜形的区域, 这里 $M_h$ 是劈锥的表面 (外衣) 的介于超平面 $t = 0$ 和 $t = h$ 之间的部分. 在 6.7 中已经指出过, $M_h$ 是 “弱” 类空间的, 即 $(u, Au)$ 在 $M_h$ 上是非负的. 因为 $R_0$ 和 $R_h$ 都是类空间的, 所以得到前述唯一性定理：如果 $u$ 在 $\Gamma_P$ 内满足方程 $L[u] = 0$ 且在 $R_0$ 上恒等于零, 那么 $u$ 在整个 $\Gamma_P$ 内恒等于零.

这个结果包含着一个重要的事实：

函数 $u$ 在点 $P$ 处的值被 $L(u) = f$ 在 $\Gamma_P$ 内的值和 $u$ 在 $R_0$ 上的 Cauchy 数据唯一地确定了, 因而它不受 $\Gamma_P$ 以外的数据的影响.

上述这件事实确证了 $\Gamma_P$ 的 “依赖劈锥” 这个名称的合理性.

如果引用记号①

$$\|u(h)\| = \left\{ \int_{R_h} u^2(x, h)\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

则 6.8.1 中唯一性定理的证明里包含着 (在条件 $(u, \hat{B}u) \geqslant 0$ 之下) 能量不等式

$$\|u(h)\| \leqslant \|u(0)\|. \tag{8}$$

如下定义的 $r$ 级的能量积分：

$$\|u(h)\|_r^2 = \int_{R_h} \sum_{|p| \leqslant r} |D^p u|^2 \mathrm{d}x \tag{9}$$

也适合相仿的不等式, 这里右端的求和符号遍及所有对于变量 $x$ 的 $|p| \leqslant r$ 阶的偏导数 $D^p u$ (将用矢量 $V$ 表示所有这些偏导数构成的集合).

下面的不等式称为 $r$ 级的能量不等式：

$$\|u(h)\|_r \leqslant c\|u(0)\|_r, \tag{10}$$

① 这里的记号与第 5 章 5.6, 5.7 中用以表示 “最大范数” 的记号的意义不同.

这里 $c$ 是一个常数, 它依赖于 $L$ 的系数的绝对值的上界以及这些系数的直到 $r$ 阶的导数的绝对值的上界 (恒假定已经按照 (4) 除去了一个具有充分大 $\mu$ 的指数函数因子).

证明和对于普通的能量不等式 (8) 一样. 只需对矢量 $V$ 的微分方程组作同样的推理, $V$ 是由 $L[u]=0$ 对一切 $x$ 变量微分而得的. 如此构成形式为 $L[V]+MV=0$ 的一个方程组; 这里同一个算子 $L$ 作用到单独每一个导数 $D^l u$ 上, 而 $MV$ 表示 $V$ 的支量的线性组合.

微分方程 (1b) 和由它对 $t$ 与 $x$ 微分所得的方程用 $u$ 的 $\leqslant r$ 阶的 $x$ 导数表达出了 $u$ 的一切 $r$ 阶的导数. 把这个结果和较高级能量不等式 (10) 合并即得

$$\|u(h)\|_r^* \leqslant c'\|u(0)\|_r, \tag{11}$$

$$\|u(h)\|_r^{*2} = \int_{R_h} \sum_{|p|\leqslant r} |D^p u|^2 \mathrm{d}x, \tag{9a}$$

现在这里边的和式包括 $u(x,t)$ 的 $\leqslant r$ 阶的一切偏导数而不只是对 $x$ 的导数.

最后, 对于非齐次方程$L[u]=f$, 下列能量不等式成立:

$$\|u(h)\|^2 \leqslant 2\|u(0)\|^2 + \int_0^h \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t, \tag{12}$$

其中

$$\|f(t)\|^2 = \int_{R(t)} f^2(x,t)\mathrm{d}x.$$

为了证明 (12), 把恒等式 (2) 和不等式

$$2uf \leqslant u^2 + f^2$$

合并, 且利用不等式

$$2(u, \hat{B}u) - u^2 \geqslant 0.$$

对于较高阶的能量积分, 下列类似的结果成立:

$$\|u(h)\|_r^2 \leqslant c\|u(0)\|_r^2 + c\int_0^h \|f(t)\|_r^2 \mathrm{d}t. \tag{12a}$$

后文即将表明, 所有这些不等式不仅对唯一性的证明是重要的, 而且对解的构造和分析也是重要的.

### 6.8.3 混合初边值问题的能量不等式

6.8.2 中的能量表达式能够立即把唯一性的证明推广到某些重要类型的问题上,

即对称的但不一定是双曲型的方程而带着混合的边界条件和初始条件 (见第 5 章 5.6). 在本小节中, 扼要地陈述这种推广①. 限于混合的双曲型问题, 即混合的初值及边值问题, 选定其中的变量 $t=x_0$, 并假定微分方程的形式是 (1b). 这些问题是要求方程 (1b) 的解 $u$, 它对于一切正的 $t$ 值和 $x$ 空间里一个给定的区域 $G$ 上的一切 $x$ 值有定义, 并且具有给定在 $G$ 上的初始值 $u(x,0)$. 此外, 在 $G$ 的边界 $S$ 上 $u$ 还必须适合适当的条件 (参考第 5 章 5.6.5). 假定这些边界条件是 $u$ 在 $S$ 上的支量之间的线性齐次关系. 它们在 $S$ 上的不同点处可以是不相同的, 并且可以和时间 $t$ 有关. 在物理上, 可以表示把系统限于区域 $S$ 上而加的限制 (如运动学条件), 或者表示系统与限制此系统的机构之间的相互作用, 例如反射、折射、钳制、阻尼、冷却、蒸发、辐射等.

讨论仅涉及唯一性, 一般的存在性的证明. 虽然对于 Cauchy 问题是在 6.10 中给出了, 对于混合问题则仍然越出本卷的范围之外 (但是对于两个自变量的情况已见于第 5.6.5 和附录).

姑且用 $S:\gamma(x_1,\cdots,x_n)=0$ 表示 $G$ 的边界或者通过 $G$ 的边界而垂直于 $t=0$ 的柱面 $Z$ 的侧面. 特征矩阵 $A=\sum\limits_{i=0}^{k}\xi_iA^i$ 在 $S$ 上显然是

$$A=\sum_{i=1}^{k}\xi_iA^i \quad (\xi_i=\gamma_{x_i}).$$

因为 $Z$ 上的法矢量的 $t$ 方向的支量为零.

本小节的主要目的是在 $Z$ (或 $S$) 上对于 $t>0$ 提出适当的边界条件, 它和 $G$ 上的 Cauchy 条件在一起保证解的唯一性, 并且对于解的存在性来说可以期望它们也是充分的条件.

和第 5 章 5.6.5 中一样, 适当的边界条件是在 $Z$ 的柱表面 $S$ 的每一点 $x,t$ 上, 矢量 $u(x,t)$ 属于由 $p$ 个线性齐次关系

$$(u,m^j)=0 \quad (j=1,\cdots,p). \tag{13}$$

所定义的一个 $r=k-p$ 维线性空间, 其中 $m^j$ 为 $p$ 个独立的矢量. 空间 $N$ 受下述假设的限制：对于属于 $N$ 的矢量 $u$, 二次型

$$Q(u,u)=uAu$$

在 $Z$ 上是非负的.

边界条件得自 Gauss 公式 (由 (2) 推出)

① 参考 K. O. Friedrichs 的一篇文章 [3], 其中研究了对称型但不一定是双曲型方程组的唯一性和存在性问题. 又见 P. D. Lax and R. S. Philips[1] 和 G. F. Duff[3].

$$\iint_D (u, \hat{B}u)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_S (u, Au)\mathrm{d}S = 0$$

的启发, 其中 $A = \sum_{i=0}^{n} A^i \phi_i$ 是在曲面 $D$ 上的特征矩阵. 如果 $(u, \hat{B}u)$ 是一个正定二次型, 那么只要所给边界条件保证二次型 $(u, Au) = Q(u)$ 在 $S$ 上处处非负, 从这个公式就立即推出 (1) 在 $D$ 上的解的唯一性. 有趣的是, 不管 (1) 是否是双曲型的, 这个论断都成立.

特别地, 如果取 $D$ 为 $G$ 上的柱状区域的介于 $t=0$ 和 $t=\tau$ 之间的, 一般对于 (1b) 的一个解 $u$ 得到

$$\int_G (u, u)\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}^{t=\tau} + \int_0^\tau \int_S (u, Au)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \iint_D (u, \hat{B}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{14}$$

于是, 恰如 6.8.1 中对于 Cauchy 问题一样, 此刻由 $u$ 的边界条件推出一个混合问题的唯一性. 这个论断是本小节的主要目的.

不过, 为了说明进一步的情况并且提供一个适用的判继依据, 还要提出几点注意.

第一, 当 $A$ 给定时, 空间 $N$ 可以按不同的方式选择. 例如, 在 $k=2$ 而 $(u, Au) = u_1^2 - u_2^2$ 的简单情况下, 每一个由 $u_2 - \sigma u_1 = 0$ $(|\sigma| < 1)$ 给定的线性空间显然皆满足定号性条件.

第二, 如果提的边界条件过多, 即如果较少的边界条件足够保证解的唯一性, 那么便不能期望有一个解存在. 由于条件愈少则边界空间 $N$ 愈大, 因此引入下列概念作为存在性的一个适当前提. 边界空间 $N$ 是最大非负的, 即不能把它扩张为一个更大的线性空间而保持二次型 $(u, Au)$ 仍然处处为非负的. 虽然不给出存在性的证明, 仍将假定 $N$ 的这个最大性质.

与 $N$ 的最关切的问题是 $N$ 的维数 $\dim N$ 是什么, 即多少个线性独立的条件 (13) 定义一个正的最大空间 $N$.

为简单计, 假定柱面 $Z$ 是处处非特征的, 即 $A$ 的本征值皆不为零①. 如此则断言：最大非负的空间 $N$ 的维数 $r$ 等于 $A$ 的正本征值的个数. 数 $r$ 和加于 $u$ 的条件 $(u, m^j) = 0$ 的个数 $p = k - r$ 都不依赖于最大空间 $N$ 的具体选择 (对于两个自变量的情况, 参考第 5 章 5.6).

这个定理所提供的判断依据常常是可直接应用的.

证明的基础是在 $k$ 矢量 (具有 $k$ 个支量的矢量) 的一个 $d$ 维线性空间里, 只要 $d + s < k$, 那么总可以找出一个非零的矢量 $u$, 要它适合 $s$ 个线性非齐次的条件.

① 不难看出这个方便的假设不是不可少的.

现在考虑具有本征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 的矩阵 $A$ 的赋范本征矢量的一个完全组. 假定前 $r$ 个本征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是正的, 其他的是负的. 若

$$u = \alpha_i u_i,$$

则

$$(u, Au) = \alpha_i^2 \lambda_i.$$

首先证明 $\mathrm{Dim}N \leqslant r$. 事实上, 如果 $N$ 的维数大于 $r$, 那么可以在 $N$ 内找到一个矢量 $u$, 使得 $r$ 个正交性条件 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ 成立, 于是 $(u, Au) = \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i < 0$ 便和当 $u$ 属于 $N$ 时 $A$ 为正的假设发生矛盾.

其次证明若 $d = \mathrm{dim}N < r$, 则空间 $N$ 不是最大的. 事实上, 条件

$$(u, Av) = 0 \quad (v \text{ 为 } N \text{ 中任一矢量})$$

和

$$(u, u_i) = 0 \quad (i = r+1, \cdots, k)$$

表示关于矢量 $u$ 的 $d+k-r$ 个线性齐次方程, 既然 $d+k-r$ 小于 $k$, 所以存在着非零解 (前一个条件说明 $u$ 不属于 $N$). 于是, 对于形式为 $w = \alpha u + v$ 的任一矢量, 其中 $v$ 属于 $N$ 且 $\alpha$ 为任一正的常数, 有

$$(w, Aw) = \alpha^2 (u, Au) + (v, Av) > 0. \tag{15}$$

这就意味着一切矢量 $w$ 皆属于 $N$, 而由于 $u$ 不属于 $N$, 这就和 $N$ 的最大性质发生抵触.

所以只剩下 $\mathrm{dim}N = r$ 的一种可能情况. 于是, 断言得证.

相仿地可以定义维数为 $p = k - r$ 的最大负空间 $N^*$, 它是形 $-A$ 的正空间.

迄乞都假定了 $|A| \neq 0$. 如果 $|A| = 0$, 那么存在着 $u$ 的满足方程 $Au = 0$ 的一些本征函数. 没有任何重大的改变：只是 $N$ 和 $N^*$ 又有了共同的属于这些本征函数的零空间, 例如说它的维数是 $g$.

作为最后一点注记, 可以指出, 对于 $L^*[u] = 0$ 的伴随的后退问题, 其中 $u(x, \tau)$ 被给定在 $G$ 上并且求的是 $t < \tau$ 时的解, 在 $Z$ 上的适当的边界条件是 $u$ 必须属于一个最大非正的空间 $N^*$.

### 6.8.4　对于单个二阶方程的能量积分

在本小节中要对单独一个二阶双曲型方程导出一个能量不等式, 并从中推得唯一性定理. 在 6.3.8 中已经把二阶双曲型方程化为一个对称的一阶双曲型方程组.

所以可由本节及以上几小节的结论推出这样的能量不等式. 然而还是值得对于二阶的情况作一独立的推导 (历史上是先推出了它①), 因为它对于 6.6 的例子提供了一个一般而简单的基础, 同时它也是下节即将概述的高阶情况的一个模型.

同 6.3 中所述, 考虑一个形式如下的二阶方程：

$$L[u]=u_{tt}-\sum a^{ij}u_{ij}+\cdots=0. \tag{16}$$

假定这个方程是双曲型的并且超平面 $t=$常数是类空间的. 据 6.3 知, 当且仅当二次型 $a^{ij}$ 为正定时才是这样. 将 $u_tL[u]$ 表示为一个散度②：

$$2u_tL[u]=(u_t^2)_t-2\sum(a^{ij}u_iu_t)_j+\sum(a^{ij}u_iu_j)_t+Q,$$

$Q$ 表示至多是二次的项, 它不包含二阶导数. 若为简单计而假定算子 $L$ 不包含零阶项, 则 $Q$ 是 $u$ 的一阶偏导数的二次型.

现在把这个恒等式在以曲面 $S_0$ 和 $S_1$ 为界的一个透镜 $D$ 上积分. 如果 $u$ 是 $L[u]=0$ 的一个解, 由 Gauss 公式得到

$$\int_{S_1}q\mathrm{d}S-\int_{S_0}q\mathrm{d}S=\int_D Q\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{17}$$

其中

$$q=\tau u_t^2-2\sum a^{ij}u_iu_t\xi_j+\sum a^{ij}u_iu_j\tau.$$

这里 $\tau$ 和 $\xi_j$ 表示沿 $t$ 轴的正方向所作 $S_0$ 和 $S_1$ 的法矢量的 $t$ 支量和 $x_j$ 支量.

现在把 $S_0$ 取为初始超平面 $t=0$ 被过点 $P$ 的后向射线劈锥面 $\varGamma$ 所割出的区域 $R(0)$, 并设 $S_1$ 是由超平面 $t=h$ 被这射线劈锥面割出的区域 $R(h)$ 和劈锥的介于超平面 $t=0$ 和 $t=h$ 之间的罩子组成的. 于是可以把积分关系 (17) 写为

$$\int_{R(h)}q\mathrm{d}S+\int_{M(h)}q\mathrm{d}S-\int_{R(0)}q\mathrm{d}S=\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

在 6.3 中已经陈述, 量 $q$ 作为 $u_t$ 和 $u_x$ 的二次型在 $R(h),R(0)$ 和 $M(h)$ 上是非负的. 于是, 用 $E(h)$ 表示 $R(h)$ 上的积分, 则得能量不等式：

$$E(h)\leqslant E(0)+\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中

$$E(h)=\int_{R(h)}q\mathrm{d}S=\int\left\{u_t^2+\sum a_{ij}u_iu_j\right\}\mathrm{d}x.$$

① 参考 6.6.1 节.

② 在本小节和 6.9 中, $Q$ 的意义当然不是特征形.

二次型 $Q$ 受 $q$ 的充分大的倍数的限制：

$$Q \leqslant Cq.$$

把这个不等式代入上述能量不等式, 得到

$$E(h) \leqslant E(0) + C\int_0^h E(t)\mathrm{d}t.$$

由这个积分不等式容易推出

$$E(h) \leqslant E(0)\mathrm{e}^{Ch},$$

这就是所需要的能量不等式的最后的形式.

将 (16) 微分之后, 可仿上推出关于高级能量积分的类似的不等式.

## 6.9　高阶方程的能量估计

### 6.9.1　引言

6.8 中关于对称的一阶方程组的结果足以概括物理学中出现的大多数波的传播问题. 但仍然希望发展其他双曲型问题的理论. 对于这些问题已经在苛刻的条件下发展了一套令人满足的理论①, 条件是一切特征保持互异, 因而法锥面的诸叶可以被另一锥面的诸叶分离开.

对于单个 $m$ 阶的方程, 扼要给出 Leray 的方法②. 无需任何修正, 此法可用于具有相同主部的弱耦合双曲型方程组. 由于 (参考第 1 章 1.2.2) 任一具有互异特征的双曲型方程组可以化为一个弱耦合的方程组, 所以 Leray 的方法实际上概括了这种双曲型方程组.

论证唯一性定理 (6.8) 和存在性定理 (6.10) 的关键是能量不等式. 因此限于指出如何不依赖对称性的假定而得到能量估计.

### 6.9.2　关于高阶双曲型算子的解的能量恒等式和不等式. Leray 与 Gårding 的方法

在 6.8 中对于二阶的情况所用的方法是用 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 乘方程 $L[u]=0$, 在一个透镜形的区域上积分这个二次式, 并且用分部积分法把它化为 $u$ 的一阶导数的二次型在一个区域上的积分和边界上的积分的和. 最后一步证明边界上的积分是正定的. 要把这方案推广到高阶方程, 必须选择一个适当的乘式, 用分部积分法进行约化, 确定边界上的积分确实是正定的.

① 此种一般理论源于 I. G. Petrovskii[5] 与 [4].

② 参考 J. Leray[2]. 此处所给 Leray 的妙论系按 L. Gårding[3] 的讲法.

设 $L$ 为一个 $m$ 阶的双曲型算子. 乘式的形式取为 $Nu$, 这里 $N$ 是一个 $m-1$ 阶的算子. 在具体选定 $N$ 之前, 把乘积 $Nu\ Lu$ 表示为一个散度与低于 $m$ 阶的导数的一个二次型之和. 这个形式上的恒等式是与 $L$ 的双曲性无关的. 为了推导它, 可以只注意 $N$ 的 $m-1$ 阶项和 $L$ 的 $m$ 阶项, 因为可以把低阶项的乘积归并到下边引入的式子 $Q$ 里去.

设 $G$ 是一个区域, $B$ 是它的边界, $\gamma_m$ 是 $B$ 的单位法矢量的支量. 于是有 $u$ 的 $m-1$ 阶和更低阶的偏导数的两个二次型 $q(u)$ 和 $Q(u)$, 它们适合

$$\iint\limits_G NuLu\mathrm{d}x = \int_R q(u)\mathrm{d}S + \iint\limits_G Q(u)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $B$ 上的面元, $\mathrm{d}x$ 是 $G$ 的体元. 只需对于 $N$ 与 $L$ 均为单项式的情况来证明 (1) 就够了, 即当 $N = aD_1\cdots D_{m-1}, L = bD_m\cdots D_{2m-1}$, 这里的符号 $D_j, j=1,\cdots,2m-1$ 表示对自变量的求导 (不同的 $j$ 不一定要表示对不同的自变量求导), 并且 $a$ 和 $b$ 都只是 $x$ 的函数. 关于 $D_m$ 分部积分, 得到

$$\begin{aligned}&\iint\limits_G ab\{D_1\cdots D_{m-1}u\}\{D_m\cdots D_{2m-1}u\}\mathrm{d}x\\ =&-\iint\limits_G ab\{D_1\cdots D_m u\}\{D_{m+1}\cdots D_{2m-1}u\}\mathrm{d}x + OO,\end{aligned}$$

其中 $OO$ 表示应归并到 $Q$ 或 $q$ 中的项, 因为已经假定它们是二次型的积分, 具体写出来就是

$$\begin{aligned}&-\iint\limits_G D_m\{ab\}\{D_1\cdots D_{m-1}u\}\{D_{m+1}\cdots D_{2m-1}u\}\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_B ab\{D_1\cdots D_{m-1}u\}\{D_{m+1}\cdots D_{2m-1}u\}\gamma_m\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

接连对 $D_1,\cdots$ 分部积分, 又可以改变第一项, 这样接连交换第一个括号和第二个括号之间的 $D_i$ 求导次序. 经过奇数 $2m-1$ 次此种运算之后, 算子 $N$ 和 $L$ 被变换了, 结果得到如下的一个恒等式:

$$\iint\limits_G N[u]L[u]\mathrm{d}V = -\iint\limits_G L[u]N[u]\mathrm{d}V + 2\int_B q(u)\mathrm{d}S + 2\iint\limits_G Q(u)\mathrm{d}V,$$

其中 $q$ 和 $Q$ 是 $u$ 的 $m-1$ 阶偏导数的二次型. 这就给出所要的恒等式 (1). 注意当 $L$ 和 $N$ 的系数都是常数并且 $L$ 和 $N$ 都不包括低阶项时 $Q\equiv 0$.

当 $L$ 为高于二阶的算子且自变量多于两个时, 附属于算子 $L$ 和 $N$ 以及曲面 $B$ 二次型 $q(u)$ 不是唯一确定的. 但任何两个此种二次型只相差一个曲面散度, 即

$\int_B q(u)\mathrm{d}S$ 的值和 $q$ 的具体选择无关.

设 $L$ 是双曲型的, $G$ 是由具有公共边界的两个类空间的超曲面 $S_1$ 和 $S_2$ 围成的一个透镜形状的区域, 试图选取 $N$, 使得 (1) 中边界上的积分 $\int q\mathrm{d}S$ 在 $S_1$ 上是正定的而在 $S_2$ 上是负定的. 如果照着 Leray 那样选取 $N$ 使得它的特征法锥面的各叶按下述意义能把 $L$ 的特征法锥面的各叶隔离开, 那么就能够作到这一步.

令 $L(\xi)$ 和 $N(\xi)$ 表示 $L$ 和 $N$ 的特征形. 如果对于不平行于方向 $\zeta$ 的每一个方向 $\theta$ 来说, 有 $m$ 个不同的实数 $\lambda$ 使特征形 $L(\lambda\zeta+\theta)$ 等于零, 则称方向 $\zeta$ 对于算子 $L$ 来说是类空间的. 如果还有 $m-1$ 个不同的实数 $\lambda$ 使 $N(\lambda\zeta+\theta)$ 等于零并且恰将 $L=0$ 的那些根一一隔离①, 则称 $N$ 的特征隔离 $L$ 的特征.

对于一个给定的双曲型算子 $L$, 可以构造出一个低一阶的算子 $N$, 它的特征隔离 $L$ 的特征. 例如, 可以取

$$N(\xi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}L(\xi+\lambda\zeta)|_{\lambda=0},$$

于是由古典定理 —— 多项式的根被其导数的根分离, 立即得知 $N$ 是一个隔离算子.

现在要对 (1) 中的边界上的积分的正定性质给出更确切的断言. 考虑最简单的情况：设 $S_1$ 和 $S_2$ 是两个超平面 $t=0$ 和 $t=T$, 并设 $L$ 和 $N$ 的系数都是常数. 还假定当空间变量 (超平面内的变量) 充分大时所考察的解 $u$ 恒等于零. 在这些前提下, 断言：

如果算子 $L$ 是双曲型的, 其特征被 $N$ 的特征隔离, 且超平面 $t=$常数是类空间的, 那么伴随于 $N,L$ 和超平面 $t=$常数的二次泛函 $\int q(u)\mathrm{d}x$ 必是正定的, 即对于一切当 $|x|$ 充分大时恒等于零的光滑函数有

$$\int q(u)\mathrm{d}x\geqslant \text{常数}\cdot\int\sum|D^\alpha u|^2\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中右端的和式取遍 $u$ 的一切不超过 $m-1$ 阶的偏导数.

在相当于二阶算子的情况下, 通过证明被积分式 $q(u)$ 是 $u$ 的一阶偏导数的一个正定二次型而证明了伴随的二次泛函 $\int q\mathrm{d}x$ 的正定性质. 在一般的情况下, 这不一定成立, 所以不可能作出这样的证明. 因此, 应用 Gårding 所给的一个正定性判断法②.

① 不难证明, 如果算子 $N$ 对于一个类空间方向 $\zeta$ 具有这种隔离性质, 那么它对于一切类空间方向也具有这种性质.

② 参考 L. Gårding[3].

用 $U_\nu(\xi)$ 表示 $\partial^\nu u/\partial t^\nu$ 关于空间变量的 Fourier 变式. 令 $D^\alpha u$ 为 $u$ 的任一个 $m-1$ 阶的偏导数, 把它写成 $D_1\cdots D_{m-1-\nu}\partial^\nu u/\partial t^\nu$, 其中 $D_1,\cdots,D_{m-1-\nu}$ 仍表示关于空间变量的偏导数 (按照熟知的法则, $D^\alpha u$ 的 Fourier 变式是 $i^{m-1-\nu}\xi_1\cdots\xi_{m-1-\nu}U_\nu$). 利用 Parseval 公式, 可以把空间积分 $\displaystyle\int q\mathrm{d}x$ 表示成一个伴随 Hermite 形 $h$ 在 $\xi$ 空间上的积分:

$$\int q(u)\mathrm{d}x=\int\sum h_{\nu\mu}(\xi)U_\nu\bar{U}_\mu\mathrm{d}\xi,$$

其中 $h_{\nu\mu}$ 是一个 $2m-2-\nu-\mu$ 次的多项式.

相仿地还有

$$\int\sum|D^\alpha u|^2\mathrm{d}x=\int\sum|\xi|^{2m-2-2\nu}|U_\nu|^2\mathrm{d}\xi,$$

其中 $|\xi|$ 表示 $(\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2)^{1/2}$. 于是所求的不等式 (2) 等价于

$$\int\sum h_{\nu\mu}U_\nu\bar{U}_\mu\mathrm{d}\xi\geqslant\text{常数}\cdot\int\sum|\xi|^{2m-2-2\nu}|U_\nu|^2\mathrm{d}\xi,\tag{3}$$

由于函数 $U_\nu(\nu=0,\cdots,m-1)$ 是相互独立的, 显然可见当且仅当 Hermite形 $h$ 对于一切 $\xi$ 为正定时 这样一个不等式才成立.

这样一来, 为了证明 (2), 所剩下的只是在所述条件下去证明伴随于 $q$ 的 Hermite 形是正定的. 关于这一点, 介绍读者参考上述所引的 Gårding 的论文.

把关于常系数方程的结论概括为一个能量守恒定律.

正定的积分 $\displaystyle\int q(u)\mathrm{d}x$—— 可以把它看成一个 "能量积分", 对于方程 $L[u]=0$ 的一切解都是与 $t$ 无关的.

可以把这个结果推广到变系数方程的解, 这时并不引起本质上的困难. 可以作出一个类似的 "能量积分", 虽然它不再是与 $t$ 无关的了, 但是它的增长率是有界的, 即它在时刻 $t=T$ 的值不超过它在时刻 $t=0$ 的值的 $\mathrm{e}^{CT}$ 倍. 常数 $C$ 的大小取决于 $L$ 的系数和它们的一阶偏导数的大小①.

### 6.9.3 其他方法

应当注意 Galderón 和 Zygmund 所给出的另一个途径. 二者的关于奇异积分方程的研究工作②给本节所讨论的问题和线性偏微分方程的其他问题的探讨提供了一种灵活的工具. 关键是借助于适当的积分算子, 可以把偏微分算子对称化, 从而为推导能量积分提出了不同于 Leray 的方法③.

① 参考 Gårding[3]. 在卷 III 中还将回到 Gårding 的不等式.
② 参考 A. P. Calderón and A. Zygmund[2], [1].
③ 还参考 S. Mizohata 最近的论文 [1] 和 [2].

最后要概述 G. Peyser① 所给出的证明能量不等式的另一个方法, 其基础是第 5 章 5.8.2, 5.8.3 中讨论过的两个自变量 $x$ 和 $t$ 的线性双曲型算子的标准形式.

首先考察一个二元函数 $u(x,t)$ 的形式如下的 $m$ 阶双曲型算子 $L[u]$:

$$L[u] = D_1 D_2 \cdots D_m u + R, \tag{4}$$

其中微分算子 $R$ 仅含低于 $m$ 阶的导数, 并且所有这 $m$ 个特征微分算子 $D_i = \partial/\partial t + \tau^i \partial/\partial x$ 都不相同 (记号和第 5 章 5.8 中所用的略有不同). 引入 $m-1$ 阶的算子 $V_j = (D_1 \cdots D_m)_j$, 其中右端的乘积中去掉了因子 $D_j$. 根据第 5 章 5.8 的结果, 所有 $m-1$ 阶以及更低阶的导数都可以用 $V_j u$ 线性地表达出来. 考虑 $L[u]=0$ 在长条 $\sum : 0 \leqslant t \leqslant T$ 上的一个解 $u$, 并且假定 $u$ 在 $\sum$ 内有 "紧致支集", 即当 $|x|$ 超过一个固定的上界时 $u$ 恒等于零. 现在引入 $m-1$ 阶的算子

$$N[u] = \sum_{j=1}^{m} V_j[u]. \tag{5}$$

它是由算子 $L$ 的主部形式上对符号 $\partial/\partial t$ 微分而得到的. 立即得到基本恒等式

$$N[u]L[u] = \frac{1}{2}\sum_j D_j (V_j u)^2 + Q[u], \tag{6}$$

其中 $Q[u]$ 是低于 $m$ 阶的导数的一个二次型. 在长条上进行积分, 回忆曾经假定 $u$ 有紧致支集并且在 $m$ 个特征的每一个上都把 $t$ 看成曲线参数, 就得到关于正定二次型 $q(u) = (1/2)\sum (V_j u)^2$ 的积分关系

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} N[u]L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&\int (q(u,T) - q(u,0))\mathrm{d}x + \iint Q(u,(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&E(T) - E(0).
\end{aligned}$$

引入 "能量积分"

$$E(t) = \int q(x,t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

并对上述指出的低价导数作估计, 几乎立即可得

$$\iint Q(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 常数 \cdot \int_0^T E(t)\mathrm{d}t.$$

① 参考 G. Peyser[1].

于是对于 $L[u]=0$ 的解 $u$ 建立了关于 $u$ 的 $m-1$ 阶导数的正定二次泛函 $E(t)$ 的一个能量不等式①

$$E(T) \leqslant E(0) + 常数 \cdot \int_0^T E(t)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

下一步是把这个结果推广到 $n$ 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的情况. 为此假定 $L$ 是常系数的. 然后, 简要地说, 第一步是用 Fourier 积分定理把解 $u$ 分解为依赖于 $x$ 空间里的单位矢量 $\alpha$ 的平面波 $v(t, y; \alpha)$ 的组合：$u(x,t)\int_{|\alpha|^2=1} v(t,y;\alpha)\mathrm{d}\alpha, y=(\alpha, x)$, 其中平面波 $v$ 作为 $x$ 和 $t$ 的函数适合方程 $L[v]=0$. $u$ 的支柱的紧致性保证了这种分解和 $L$ 中出现的 $u$ 的各个偏导数的分解的可能性. 于是把前面所得的能量关系用于变量 $y$ 和 $t$ 的二元函数 $v$, 然后对 $\alpha$ 积分, 借助 Parseval 公式即得所求的对于函数 $u(t,x)$ 的能量关系.

# 6.10 存 在 定 理

### 6.10.1 引言

在这一节里, 将利用 6.8, 6.9 中所导出的能量不等式来证明：在任意给定的光滑初始条件下, 对称双曲型方程组

$$L[u] = u_t + M[u] = 0 \tag{1}$$

的解的存在性.

非齐次方程

$$L[u] = f(x,t) \tag{1a}$$

的 Cauchy 问题, 例如以 $u(x,0)=0$ 为初始条件的解是 Duhamel原理的直接推论. 假定 $U(x,t;\tau)$ 是当 $t>\tau$ 时方程 (1) 的适合条件 $U(x,\tau;\tau)=f(x,\tau)$ 的解, 那么公式

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

就给出 $u$. 因此只需证明齐次方程 (1) 的解存在就行了.

为使结论的陈述具有相当大的一般性, 采用下面的 Hilbert 空间的术语是方便的. 考虑在 $x$ 空间里的一个区域 $R$ (可以随着一个参数 $t$ 而变) 和一些在 $R$ 内具有

① 应当注意, 在形式上推导 (1) 时, 曾经通过对变数 $x$ 和 $t$ 逐次分部积分 $N[u]L[u]$ 而得到一个公式

$$\iint N[u]L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int [q(u(x,T)) - q(u(x,0))]\mathrm{d}x + \iint Q(u(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

这样得到的函数 $q(u)$ 和现在的 $q(u)$ 只能相差一个散度型表达式, 所以泛函 $E(t)$ 的值仍然是一样的.

直到 $r$ 阶连续偏导数的 "光滑" 函数 $u$. 区域 $R$(或 $R_t$) 不一定取为某个点 $P$ 的依赖劈锥 $\Gamma_\rho$ 的平截面. 例如, 它们可以是带 $\sum$ (见 6.7) 内的任一平面区域 $t=$常数的依赖区域. 函数 $u$ 也不一定是所论微分方程的解. 现在, 定义 Hilbert 空间 $H_r(t)$ 或 $H_r^*(t)$ 为具有 6.8.2 中所定义的 $r$ 阶范数 $\|u(t)\|_r$ 或 $\|u(t)\|_r^*$ 的光滑函数空间的完备化空间①. 于是 6.8 里的能量不等式就可以叙述为假定初始函数属于空间 $H_r(0)$ 或 $H_r^*(0)$, 那么对于适当小的正数 $t$, (1) 的解 $u$ 就属于相应的 Hilbert 空间 $H_r(t)$ 或 $H_r^*(t)$, 并且只要 $t$ 有界, 它们的范数就是一致有界的. 然后, 对于任意的区域 $R$, 带着适当的常数的能量不等式就可以直接予以证明, 或者把几个上述类型的区域 $R_i$ 合起来而得到证明.

在特殊情况下, 抽象空间 $H_r$ 的元素必须与通常的函数相联系. 这种联系已经在 Sobolev 引理 (见第 3 章附录 I) 中表述过了, 它的含意是对于充分大的 $r$, $H_r$ 的元素是光滑函数. 特别地, 如果 $R$ 是一个光滑的有界区域, 并且 $r \geqslant \dfrac{n}{2}+1$, 那么

$$\operatorname*{Max}_{x\in R}|u(x)| \leqslant 常数 \cdot \|u\|_r,$$

其中常数的值仅取决于 $R$ 和 $r$. 还有当 $r \geqslant \dfrac{n}{2}+s+1$ 时, $H_r$ 的一切元素都是具有直到 $s$ 阶的有界连续偏导数的函数.

除了能量不等式之外, 还需要一个构造元素. 按照 Schauder②的一个想法利用 Cauchy-Kowalewsky 定理③把它提供于下.

将给出关于对称一阶双曲型方程组的详细证明, 并扼要地论述非对称方程组和高阶方程. 还应当指出, 6.4.7 以及 6.15 中的注记导致一种不同的构造解的方法.

### 6.10.2　存在定理

若算子 $L$ 是双曲型的, 并且它的系数和初始函数 $\psi$ 都是充分多次可微的, 则初值问题 $L[u]=0, u(x,0)=\psi(x)$ 在 $R(t)$ 里必有一个光滑解. 若 $u$ 在 $R(0)$ 上属于 $H_r$, 则 $u$ 在依赖劈锥的每个截面 $R(t)$ 上也属于 $H_r$.

---

① 这就是说, 恰像引入实数而将有理数系完备化一样, 若 $u_1, u_2, \cdots, u_j, \cdots$ 为在 $R$ 内且具有直到 $r$ 阶的连续偏导数的函数序列, 并且它们的范数 $\|u_j\|_r$ 一致有界, 函数列 $u_j$ 依 $r$ 阶范数收敛, 即当 $i\to\infty, j\to\infty$ 时, $\|u_i-u_j\|_r\to 0$, 那么就赋予序列 $\{u_j\}$ 一个理想元素 $u$ 作为它的极限. 并定义此极限函数的范数为

$$\|u\|_r = \lim_{j\to\infty}\|u_j\|_r.$$

② 参考 J. Schauder[4].

③ 关于其他构造法, 参考 K. O. Friedrichs[2] (利用有限差分方程) 和 P. D. Lax[6] (利用 Hilbert 空间的正交投影).

至于二阶方程的混合初值及边值问题的存在定理, 参考 M. Krzyżański and J. Schauder[1] 与 O. Ladyzenskaya[1]. K. O. Friedrichs[3]. 还讨论过关于双曲型方程和其他方程的一种广泛类型的混合边值问题, 又见 P. D. Lax and R. S. Phillips[1].

还应当指出；如果 $\psi$ 仅只是连续的或者不能充分多次地微分从而不足以保证 $u$ 的光滑性, 那么仍然可用闭包将广义解 $u$ 定义为以 $H_r$ 为范数的 Hilbert 空间里的一个元素 $u=\lim u_n$.

证明分为三个步骤：首先, 就 $L$ 的系数和初始数据 $\psi$ 都是解析函数的情况构造出一个解; 然后, 过渡到初始数据属于 Hilbert 空间 $H_r$ 的情况; 最后, 再去掉 $L$ 的系数的解析性的限制.

1) 设 $\psi$ 为 $H_r$ 里的任一个函数. 用一个解析函数序列, 例如多项式 $\psi_l(l=1,2,\cdots)$, 按 $r$ 阶范数逼近 $\psi$. 由解析的 $L[u]$ 与解析的 (多项式) 初始值 $\psi_l$ 所构成的初值问题已经在第 1 章 1.7 中用 Cauchy-Kowalewsky 的幂级数法解决过了. 在一个适当窄的带 $\sum: 0\leqslant t\leqslant T$ 内构造出的解析解 $u_l$, 按唯一性定理知道, 它是仅有的一个解. 这个带的宽度 $T$ 虽然取决于方程的系数的解析结构, 但与多项式 $\psi_l$ 的特殊选择无关[①].

2) 由于初始值的序列 $\psi_l$ 按 $r$ 阶范数在 $R(0)$ 上收敛于 $\psi$, 对 $u_l-u_m$ 作能量估计可知, 相应的解 $u_l$ 的一切阶数不超过 $r$ 的偏导数在 $t\leqslant T$ 的带 $\sum_T$ 内的任一截面 $R(t)$ 上按 $r$ 阶范数收敛. 显然, 当 $R$ 被扩展到水平截面 $t=$常数在 $\sum$ 内的有限部分时, 能量估计仍然成立, 收敛也是真实的.

由此据 Sobolev 引理可知, 函数序列 $u_n$ 和它们的一切阶数低于 $r-\dfrac{n}{2}$ 的导数在带 $\sum_T$ 内是一致收敛的. 如果 $r$ 大于 $\dfrac{n}{2}+1$, 那么极限函数 $u$ 就有连续的一阶偏导数并且适合方程 (1). 再者, 因为 $H_r$ 是完备的, 所以这样得到的解 $u(x,t)$ 当 $t\leqslant T$ 时在 $R(t)$ 上也属于 $H_r$.

现在可以重复这个步骤：在带 $0\leqslant t\leqslant T$ 内给定一个解 $u$, 它在 $R(t)$ 上属于 $H_r$, 在 $T\leqslant t\leqslant 2T$ 段[②]内构造出一个解 $u$, 它在 $R(T)$ 上取给定的值, 等等. 于是可以在带 $\sum$ 内造出具有给定的初始值的一个解. 显然, 如果代替点 $P$ 而选取一个点 $P'$, 后者的依赖劈锥 $\Gamma_{P'}$ 包含 $\Gamma_P$, 还能够把 $u$ 扩展到一个比 $\Gamma_P$ 更广的区域上去.

3) 对于 (1) 的系数 $A^i$ 与 $B$ 不是解析的而仅只是充分光滑的情况. 例如, 它们仅具有直到 $r+1$ 阶的连续导数的情况, 再次利用能量估计就可以很容易地把证明推广. 于此只需指出要点：假定 $r>\dfrac{n}{2}+1$ 并且在带 $\sum$ 内用解析函数 $A_n^i$ 与 $B_n(n=1,2,\cdots)$ 和它们的导数一致地逼近 $L$ 的系数和它们的导数. 于是, 用解析的近似算子 $L_n$ 代替了算子 $L$. 对于算子 $L_n$, 在 $\sum$ 内的初值问题已经由一个函数 $u_n$ 解决了, $u_n$ 适合 $L_n[u_n]=0$ 和 $u_n(x,0)=\psi(x)$.

先假定 $\psi$ 属于 $H_{r+1}$. 于是根据能量不等式可知 $u_n(t)$ 也属于 $H_{r+1}$, 并且 $\|u_n(t)\|_{r+1}\leqslant$常数$\cdot\|\psi\|_{r+1}$, 其中常数的值与 $n$ 无关. 显然, 差 $u_n-u_m$ 适合非齐次

① 参考第 1 章 1.7.

② 由 Cauchy-Kowalewsky 定理知道有解析解的带的宽度的均匀性.

方程

$$L_n(u_n - u_m) = (L_m - L_n)u_m = f_{nm}.$$

因为 $L_n$ 的系数及其直到 $r$ 阶的一切偏导数一致地逼近 $L$ 的相应的系数和它们的各阶偏导数, 所以 $\|f_{nm}\|_r \leqslant \epsilon_{nm}\|u_m\|_{r+1}$, 其中 $\epsilon_{nm}$ 当 $n$ 与 $m$ 无限增大时趋于零. 已经证明过 $\|u_m\|_{r+1}$ 是一致有界的. 所以 $\|f_{nm}\|_r$ 趋于零, 从而由能量不等式知道 $\|u_n - u_m\|_r$ 也趋于零.

根据 Sobolev 引理, 函数序列 $u_n$ 及其一阶偏导数也一致收敛. $u_n$ 的极限 $u(t)$ 当 $t$ 取任一值时皆属于 $H_r$. 再者, 因为函数 $u_n$ 适合能量不等式

$$\|u_n(t)\|_r \leqslant \text{常数} \cdot \|\psi\|_r,$$

其中的常数与 $n$ 无关, 所以极限函数 $u$ 也适合这个不等式.

至今一直假定了 $\psi$ 属于 $H_{r+1}$. 要对 $H_r$ 里的任一个 $\psi$ 构造出解, 再用 $H_{r+1}$ 里的一个序列 $\psi_n$ 逼近 $\psi$. 按照前面的结论, 这些初值问题各有其属于 $H_r$ 的唯一的解 $u_n$, 而且对 $u_n - u_m$ 能量不等式也成立：

$$\|u_n - u_m\|_r \leqslant \text{常数} \cdot \|\psi_n - \psi_m\|_r.$$

这就证明了序列 $u_n$ 按 $r$ 阶范数收敛于一个极限 $u$, 而它就是所求的解.

### 6.10.3　关于初始值性质的持久性和关于相应的半群的一些注记. Huygens 小原理

设在整个超平面 $t=0$ 上给定了初始值 $\psi(x) = u(x,0)$. 按照 6.10.2 中的存在定理, 对于后来的一切 $t>0$, (1) 的解就唯一地被确定了. 再者, 如果 $\psi(x)$ 在整个 $x$ 空间上是属于 $H_r$ 的, 那么解 $u(x,t)$ 在后来的任何时刻都属于 $H_r(t)$. 这个结果可以陈述如下：

$L[u]=0$ 的解在时刻 $t>0$ 的值与它们在 $t=0$ 时的值之间的关系是函数空间 $H_r$ 到它自身的一个映射. 特别地, 如果当 $t=t_0$ 时 $u$ 的初始值是 $\psi$, 那么, 初值问题就由一个依从于 $t$ 的线性算子 $T$ 来解决, 并可将 $u$ 表示为

$$u(x,t) = T(t,t_0)\psi.$$

显然, 该式表明了代替一步跨进, 例如由 $t=t_0=0$ 时的初始值跨到某一时刻 $t$ 的 $u$ 值, 可以先插入中间的值 $t_1$, 求出 $u(x,t_1)$, 然后以 $u(x,t_1)$ 代替 $u(x,t_0)=\psi(x)$ 作为初始值, 再解初值问题. 于是, 解就由一个线性算子

$$u(x,t) = T(t,t_1)u(x,t_1)$$

给出. 从而也由这两个算子的合成

$$u(x,t) = T(t,t_1)T(t_1,t_0)\psi.$$

给出. 所以, 根据唯一性定理, 算子 $T$ 必须遵从合成法则:

$$T(t,t_0)=T(t,t_1)T(t_1,t_0),\quad \text{当 } t>t_1>t_0. \tag{2}$$

如果假定 $L$ 的系数与 $t$ 无关, 那么算子 $T(t,t_0)$ 仅依从于差 $t-t_0$, 而 (2) 的形式将是

$$T(t-t_0)=T(t-t_1)T(t_1-t_0),\quad \text{当 } t>t_1>t_0. \tag{2a}$$

这显然是一个群的关系. 因为这里约定它仅对于 $t>t_1>t_0$ 成立, 所以称算子 $T$ 构成一个 "半群"①.

Hadamard 曾经注意到关系 (2) 或 (2a), 并称此基本事实为 "Huygens 小原理". 凡当算子 $T$ 可以明显地表示为一个积分算子时, 关系 (2) 皆导致关于这些算子的核的有趣的恒等式. 当用 Green 函数表示椭圆型方程或抛物型方程的边值问题的解时, 在有些情况下此结论也成立②.

如果只要初始函数 $\psi$ 具有某种性质 $P$, 相应的解 $u(x,t)$ 在任何其他时刻的值就也有这个性质 $P$, 那么就称初值函数的这个性质 $P$ 是持久的. 用这个说法可以将前面的结论重新叙述为具有有限的 $r$ 阶范数这个性质是持久的.③

通过下一小节的例子将看到, $\psi(x)$ 的导数的存在性与连续性不是持久的, 这些可微性之中有一些在经过运算 $T$ 之后可能丧失了. 因为 Huygens 小原理显然是物

① 考虑 "后向"Cauchy 问题, 算子 $T$ 有唯一的逆算子 $T(t_0,t_1)=T(t_1,t_0)^{-1}$. 因此这个半群实际上被扩张成真正的群.

② 在这些情况中, 边值问题只是在半空间例如 $t\geqslant 0$ 中有解, 并且相应的解算子仅构成半群.

③ 对于非对称形方程组, 这个性质不一定是持久的. 例如, 考察方程组

$$u_t-v_x=0,\quad v=0$$

与 Cauchy 条件

$$u(0,x)=0, v(0,x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

这个问题当 $x>0$ 时的解是

$$u(t,x)=\frac{t}{2\sqrt{x}},\quad v(t,x)=\sqrt{x}.$$

显然, 初始值在任何有限区间上的积分的值都是有限的:

$$\int(u^2+v^2)\mathrm{d}x|_{t=0}<\infty,$$

但是当 $t>0$ 时, $\int(u^2+v^2)\mathrm{d}x$ 未必存在.

另一个例子是同一方程组而以

$$u(0,x)=0,\quad v(0,x)=\sqrt{|x|}\mathrm{e}^{-x}$$

为初始条件的 Cauchy 问题. 这时

$$u(t,x)=t\left(\frac{1}{2}\frac{x}{|x|\sqrt{|x|}}\sqrt{|x|}\right)\mathrm{e}^{-x},$$
$$v(t,x)=\sqrt{|x|}\mathrm{e}^{-x}.$$

理上一个合理的假说, 所以, 把这个与物理相契合的持久状况归结于能量范数的存在性而不是某些可微性, 这的确是一个深刻的认识①.

### 6.10.4　聚焦. 可微性非持久的例子

通常在数学物理中微分方程 $L[u]=0$ 有完全正则的系数, 例如常系数, 并且初始条件同样也是正则的, 例如除了在一个初始流形 $\phi(x_1,\cdots,x_{n-2})=0$ 上可以任意多次地微分, 在这流形上 $u$ 或者它的导数有 6.4.3 中里所说的不连续性. 按照 6.4, 这些不连续性沿着特征而传播. 虽然那里仅仅在 “小范围” 内, 即在 $\lambda$ 充分小的带 $0\leqslant x_n<\lambda$ 内造出了解, 不过仍可将它一直拓展到从 $S_0$ 发出的射线所构成的特征曲面 $C$ 尚且光滑的地方. 但是如果在 $C$ 上这些射线有一个包络 —— 一个 “焦散流形”, 它可以是 $C$ 的一个脊线, 那么初始的奇异性就可能在这个焦散流形上增强了. 但是, 称为焦散的这个过程并不妨碍可以把解拓展到焦散流形的另一边去②, 它只不过局部地降低解的可微性或连续性罢了.

下面的例子就可以按这个意义去解释, 虽然其中的焦散流形只是一个点. 考虑三维空间里的波动方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0,$$

以条件

$$u(0,x,y,z)=0,$$

$$u_t(0,x,y,z)=\begin{cases}(1-r^2)^{3/2}, & \text{当 } r^2<1,\\ 0, & \text{当 } r^2\geqslant 1\end{cases}$$

为初始条件的初值问题. 这里 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 这些初始函数具有直到二阶的连续导函数. 这个初值问题的解沿 $t$ 轴的值的明显表达式③:

$$u_t(t,0,0,0)=\begin{cases}t(1-t^2)^{3/2}, & \text{当 } t\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } t>1.\end{cases}$$

当 $t>1$ 时得到 $u_t=0, u_{tt}=0$, 而当 $t<1$ 时

$$u_t=(1-t^2)^{3/2}-3t^2(1-t^2)^{1/2},$$

$$u_{tt}=-3(1-t^2)^{1/2}-6t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+3t^2(1-t^2)^{-1/2}.$$

① 这个事实是首先在 K. O. Friedrichs and H. Lewy[1] 中被认识到.

② 详细的情况及证明见 D. Ludwig[1].

③ 第 3 章 3.3 中的公式表明, 波动方程的球对称解的形式是

$$u(r,t)=[f(t+r)-f(t-r)]/r.$$

由这个公式可以直接看出 $u(0,t)$ 的可微性较 $f$ 的可微性低一阶.

显然, 当 $t=1$ 时 $u_t$ 是连续的而 $u_{tt}$ 则否①.

### 6.10.5 关于拟线性方程组的注记②

应当扼要指出, 可以用迭代法把这个理论推广到非线性方程组. 如果方程组 (1) 是拟线性的, 即如果系数矩阵依赖于未知函数 $u$, 那么可以把第 5 章 5.7 中的迭代法推广到 $n$ 个变量的情况. 于是得到解 $u$ 的唯一性和存在性的证明, 其中 $u=\lim\limits_{n\to\infty} u^n$, 而 $u^{n+1}$ 是下列线性问题的解:

$$u_t^{n+1}+\sum_{\nu=1}^{m} A^\nu(x,u^n)u_{x_\nu}^{n+1}+B(x,u^n)u^{n+1}=0.$$

这里所有函数 $u^n$ 的初始值都是已知函数 $\psi(x)$.

### 6.10.6 关于高阶方程或非对称方程组的注记

前面已经着重指出过, 数学物理学中大多数的双曲型问题都归结到对称方程组, 对于其 Cauchy 问题前面的理论是完美的. 然而对于单个的高阶方程或非对称的一阶方程组的问题在数学上仍然有很大的兴趣. 值得注意的是借助前述的那些能量估计可以把证明推广到这些问题上.

6.8.4 中的能量估计立即引出任一单个二阶双曲型方程的 Cauchy 问题的解 (这个问题的另一解决办法是把它化为一个对称双曲型方程组, 在 6.3.8 中已经这样作过了).

为了解决单个的 $m$ 阶双曲型方程的 Cauchy 问题或者具有相同主要部分的这种方程组的 Cauchy 问题, 可以应用 6.9 中所给的一般的能量估计. 然后按照 6.10 前几小节的路线证明存在性.

6.9 中的那些估值以及从它们引出的结论同样可用于任一具有互异特征的一阶双曲型方程, 因为直接由消元法 (见第 1 章 1.2.2) 可以把这样的任一方程组化为由 $k$ 个具有相同主部的 $m$ 阶方程构成的方程组, 即这 $k$ 个方程中每一个的最高阶项

① 在本节中考虑了单个的高阶方程. 如果令 $w=u_t+u_\tau, v^1=-u_y, v^2=-u_z$, 那么 $w, v^1$ 与 $v^2$ 适合方程组

$$w_t-w_x+v_y^1+v_z^2=0,\quad v_t^1+v_x^1+w_y=0,\quad v_t^2+v_x^2+w_z=0$$

与初始条件

$$w(0,x,y)=\begin{cases}(1-r^2)^{3/2}, & (r^2\leqslant 1),\\ 0, & (r^2>1),\end{cases}$$
$$v^1(0,x,y)=0,$$
$$v^2(0,x,y)=0.$$

这里当 $t=1$ 时 $w$ 是连续的而 $w_t$ 则否. 所以初始数据中一阶导数的连续性并不能保证解的一阶导数的连续性.

② 对于二阶的拟线性方程组, 这个步骤已经在 J. Schauder[4] 中实现了. 进一步的贡献是在 F. Frankl[1] 中给出的. J. Leray[2] 中曾经研究过任意阶的非线性双曲型方程的 Cauchy 问题.

的形式相同, 并且每一个方程的主部都只包含未知函数 $u^1, u^2, \cdots, u^k$ 之中的一个. 这些方程的耦合仅仅是通过低阶项而发生的. 像在第 5 章那样, 对于此种方程组几乎可以和对单个的 $k$ 阶方程作同样的处理.

还应当指出, 在所阐明的方法中假定了严格的双曲性, 即特征法锥面的各叶是相互分离的 (因而射线锥面的各叶也是这样). 以上理论皆未涉及具有重特征的一般方程的情况, 这还是一个尚未解决的问题①.

## 第二部分　解 的 表 示

# 6.11　引　　言

### 6.11.1　概述. 记号

对于线性双曲型微分方程来说, 特别是对于那些常系数的方程, Cauchy 问题的解是可以用公式表示出来的, 其明显的程度各有不同② (参看第 3 章 3.5 和第 5 章.) 这些表示作为数据的线性泛函不仅导致许多引人入胜的形式关系③, 而且更重要的是它们使我们有可能去研究某些具体的性质. 这些表示的基础是把解和与其有关的一些别的函数分解为平面波 (参考第 3 章 3.3), 有时候是分解为球面波. 一个平面波的定义是微分方程的仅依赖于时间 $t$ 和一个平面空间坐标的一个解. 一个球面波是关于空间某个点成球对称的一个解.

在函数的 Fourier 分解中所用的振荡的平面波并不一定是最简单的工具. 有时候可能有更直截了当一些的方法. 但利用平面波总是不能清楚地表明依赖区域, 也不能揭露特征的作用. 不过, 明显结果的优美性弥补了这个缺点.

在 6.12 和 6.13 中, 将考虑单个的二阶方程; 在 6.3′ 中, 作为一个例子, 将插入弹性波方程的积分. 在 6.14 中, 将讨论具有常系数的任意阶方程的问题; 在 6.15 中, 将把解的表示推广到系数不限于常数的任意的双曲型问题. 将依靠本章第一部分中所证明的存在性和唯一性定理, 并假设数据都适合 6.10 中所提出的连续性条件. 然而, 可以声明, 第二部分中的那些解的明显表达式不仅可以用作解的表示, 而且通过直接验证还可以作为解的存在性的构造式的证明.

在 6.16, 6.17 中, 将讨论 "超双曲型" 微分方程, 并且讨论双曲型方程的 "不适定的" 问题. 最后一节将总结受双曲型问题控制的信号传送的某些特点.

同前所述, 选定时间变量 $t = x_0$ 并且把空间变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 合并为一个矢

① 参考 6.4 和 6.15 中有关的注记和 D. Ludwig[3].

② 别的文献中特别值得参考的是 F. John[4] 所写的一本内容丰富的专论.

③ 涉及这个论题的文献所包罗的范围极为广泛. 限于介绍那些在本书总的系统之内在一定程度上被主观地感兴趣的方面.

量 $x$, 其绝对值是

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

用 $\omega_n$ 或 $\omega$ 表示单位球, 其面元为 $\mathrm{d}\omega_n$ 或 $\mathrm{d}\omega$, 其表面积[1]记为

$$\omega_n = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2).$$

半径为 $r$ 的球叫做 $\Omega_r$ 或 $\Omega$, 其面元为 $\mathrm{d}\Omega = r^{n-1}\mathrm{d}\omega$. 体元则为 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = |x|^{n-1}\mathrm{d}\omega_n\mathrm{d}|x| = |r|^{n-1}\mathrm{d}\omega_n\mathrm{d}r$. 单位矢量记为 $\alpha, \beta$. 有时候把单位球的面元简记为 $\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta$ 以代替 $\mathrm{d}\omega$. 方便时, 间或还使用特定的记号.

### 6.11.2　一些积分公式. 函数的平面波分解式

为了后面内容中应用的方便, 把主要关于 $n$ 维空间中球上的几个积分公式汇集于下.

首先考虑函数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在球 $|x| \leqslant r$ 内的积分, $r$ 为固定的. 利用记号 $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \rho^2 = r^2 - p^2, x_n = p$, 记

$$K(r) = \iint\limits_{|x|\leqslant r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \mathrm{d}p \int_{p^2 \leqslant r^2 - p^2} f(x_1, \cdots, x_{n-1}, p)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}. \tag{1}$$

球 $\Omega_r$ ($|x| = r$) 的表面上的积分表达为

$$\iint\limits_{|x|=r} f\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{|x|=r} fr^{n-1}\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}K(r). \tag{2}$$

若 $f$ 不依赖于 $x_n = p$, 则有

$$\iint\limits_{|x|=r} f\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{p\leqslant r} rf(x_1, \cdots, x_{n-1})\frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \tag{3}$$

更重要的情况是 $f$ 仅依赖于单个线性变量 $x_1$ 或者更一般地依赖于 $x$ 和一个单位矢量 $\beta$ 的内积：

$$(x, \beta) = (x\beta) = p|x|.$$

因为这些积分具有旋转对称性, 可以选定 $p = x_n$. 于是当 $r = 1$ 时 (1) 和 (2) 给出重要的公式 (把 $\mathrm{d}\omega_n$ 改写为 $\mathrm{d}\beta$)：

$$\iint\limits_{\beta^2=1} f(x\beta)\mathrm{d}\beta = \omega_{n-1}\int_{-1}^{1} f(p|x|)(1 - p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p. \tag{4}$$

① 比较第 4 章, 4.1.1.

的确如此, 考虑球 $|x| \leqslant r$ 与平面 $x_n = p$ 的交集, 引入极坐标, 并假设 $f = f(p)$, 其中 $p = (x\beta)$, 例如 $p = x_n$. 于是在这个交集上, $\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} = \rho^{n-2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega_{n-1}$. $f$ 在这个交集上的积分是 $[1/(n-1)](r^2 - p^2)^{(n-1)/2}\omega_{n-1}f(p)$, 从而推出 (4).

应注意这个事实, 即 (4) 对于奇的 $n$ 和偶的 $n$ 显示出不同的性质, 因为被积分式中的因子 $(1-p^2)^{(n-3)/2}$ 当 $n$ 为奇数时是 $p$ 的有理式而当 $n$ 为偶数时它是 $p$ 的无理式.

注意以下几个特殊情况：

$f = 1$ 给出

$$\omega_n = \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\omega_{n-1}.$$

$f = \log(|\beta x|)$ 给出

$$\iint \log|x\beta|\mathrm{d}\beta = \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}\log(p|x|)(1-p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p$$

或者经过简单的计算而得

$$\iint \log|x\beta|\mathrm{d}\beta = 2\pi^{n/2}\frac{\omega_n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\log|x| + c \tag{4a}$$

其中 $c$ 为一常数.

$f = |x\beta|$ 时得到

$$\iint |x\beta|\mathrm{d}\beta = 2\omega_{n-1}\int_{0}^{1}|x|p(1-p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p$$

从而有

$$\iint\limits_{\beta^2=1} |x\beta|\mathrm{d}\beta = \frac{2\omega_{n-1}}{n-1}|x|. \tag{4b}$$

这些公式把 $|x|$ 和 $\log|x|$ 表示为平面波的叠加.

公式 (4a) 和 (4b) 与位势理论的一个基本公式一起给出任意一个函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的平面波分解式, 即仅依赖于空间变量 $x_1, \cdots, x_n$ 和一个单位矢量 $\alpha$ 的一个线性组合 $(\alpha x)$ 的函数.

这个分解式可表达如下：

当 $n$ 为奇数时

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}f(z) = \Delta_s^{(n+1)/2}\iint f(x)|((x-z)\alpha)|\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x, \tag{5}$$

当 $n$ 为偶数时

$$(2\pi)^n(-1)^{(n-2)/2}f(z) = \Delta_z^{n/2}\iint f(x)\log|((x-z)\alpha)|\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x, \tag{5a}$$

其中 $\Delta_z^\nu$ 表示关于变量 $z$ 的 $\nu$ 重 Laplace 算子, 积分的区域是单位球 $\alpha^2=1$ 和整个 $x$ 空间. 可以假定当 $|x|$ 很大时函数 $f(x)$ 的值为零, 所以不会由 $|x|\to\infty$ 引起收敛问题的困难.

公式 (5) 确实把 $f(x)$ 分解为仅依赖于 $(x-z,\alpha)$ 的平面波.

为了证实这个论断, 回忆一下位势理论 (第 4 章 4.2) 中的 Poisson 定理. 函数

$$w(z) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x)|z-x|^{2-n}\mathrm{d}x \quad (n>2), \tag{6}$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(z)\log|z-x|\mathrm{d}x \quad (n=2), \tag{6a}$$

给出了 Poisson 方程 $\Delta_z w = f(z)$ 的解. 此处 $\Delta_z$ 表示以 $z$ 为自变量的 Laplace 算子.

于是, 简短的初等演算给出

$$\Delta^{(n-1)/2}|x| = (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)!}{2-n}|x|^{2-n} \quad (n \text{ 为奇数}), \tag{7}$$

$$\Delta^{(n-2)/2}\log|x| = \frac{2^{n-2}(-1)^{(n-2)/2}}{2-n}\left(\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right)^2|x|^{2-n} \quad (n \text{ 为偶数}), \tag{7a}$$

这些公式和 (4a)、(4b) 一起, 经过适当的合并常数因子, 立即导出表示式 (5)、(5a). 只需把 (7)、(7a) 中的 $|x|$ 换为 $|z-x|$, 然后代入 Poisson 公式并把叠 Laplace 算子写到积分号的前边.

利用广义函数的语言, 可以把上面证明了的关系化为非常简洁的形式, 将它放到这里以便在 6.15 中应用.

先注意 (6) 和 (6a) 可以写成

$$\delta(x) = \begin{cases} \Delta\dfrac{1}{(2-n)\omega_n} - \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{当 } n>2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\Delta\log x, & \text{当 } n=2, \end{cases} \tag{6b}$$

其中 $\delta(x)=\delta(x_1,\cdots,x_n)$ 表示 $n$ 维的 $\delta$ 函数, 于是 (7) 和 (7a) 蕴含着

$$\begin{aligned}\delta(x_1,\cdots,x_n) &= \delta(x) \\ &= \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\alpha^2=1}\delta^{(n-1)}(x,\alpha)\mathrm{d}\alpha, \quad \text{当 } n \text{ 为奇数},\end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&\delta(x_1,\cdots,x_n)=\delta(x)\\
&\qquad=\frac{(-1)^{(n+2)/2}}{(2\pi)^n}\int_{\alpha^2=1}\log^{(n)}|x,\alpha|\mathrm{d}\alpha,\quad \text{当 } n \text{ 为偶数.}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

此处 $\delta(x\alpha)$ 是单独一个变量 $(x,\alpha)$ 的 $\delta$ 函数, $\delta^{(n-1)}$ 是它的 $(n-1)$ 阶导函数, 且

$$
\log^{(n)}|z|=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\log|z| \tag{10}
$$

应解释为一个分布.

下面的巧妙办法应归功于 F. John[1] 和 I. M. Gelfand 以及 G. Shilov[2], 它把当 $n$ 为奇数时的表达式和 $n$ 为偶数时的表达式合并成一个表达式. 考虑 $\log z=\log|z|+\mathrm{i}\pi(1-\eta(z))$ 当 $z$ 取实数值时的主值, 其中 $\eta$ 表示 Heaviside 函数. 那么, 它的各阶导函数, 看成以 $z=0$ 为奇异点的分布, 可写作

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\log z}{\mathrm{d}z}=\log^{(1)}(z)=\frac{1}{z}-\pi\mathrm{i}\delta(z),\\
&\frac{\mathrm{d}^2\log z}{\mathrm{d}z^2}=\log^{(2)}(z)=\frac{-1}{z^2}-\pi\mathrm{i}\delta'(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

利用这种记写法, 可以把表示式 (8) 和 (9) 合并成一个公式

$$
\delta(x_1,\cdots,x_n)=\delta(x)=\frac{-1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\alpha|=1}\log^{(n)}(x,\alpha)\mathrm{d}\alpha, \tag{11}
$$

其对任意的 $n$ 都成立[3]. 它是一个非常有趣而且有用的化 $\delta$ 函数为平面波的分解式.

证明仅仅在于给前述结论一个适当的解释：Poisson 公式用 $\Delta|x|^{2-n}$ 表达了 $\delta(x)$. 因此把 Laplace 算子重复用于 (7) 和 (7a) 的左端, 也就是重复用于 (4a) 和 (4b) 的左端, 就得到了 $\delta(x)$. 按照分布的法则, 可以把这些算子移到积分号内. 同时要注意, 对于任一单个变量 $(\alpha x)$ 的函数或广义函数 $f$, 下列等式成立：

$$
\Delta f(\alpha x)=f''(\alpha x).
$$

直接进行微分即可得到这个结果, 因为 $\alpha^2=1$. 于是, 适当地计算各种常数系数, 最后就得到 (8) 和 (9).

① 参考 F. John[4].
② 参考 I. M. Gelfand 与 G. Shilov[1].
③ 由于积分区域的对称性而知虚部等于零.

# 6.12 常系数二阶方程

## 6.12.1 Cauchy 问题

按第 3 章 3.3, 一切常系数二阶双曲型微分方程的 Cauchy 问题[①]统统可以化为特殊的微分方程

$$u_{tt} - \Delta u - cu = 0 \tag{1}$$

和初始条件

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1a}$$

其中 $\psi(x)$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个函数, 当 $n$ 为奇数时它至少具有直到 $(n+1)/2$ 阶的连续导函数, 当 $n$ 为偶数时它至少具有直到 $(n+2)/2$ 阶的连续导函数 (关于这个假设的启发, 参考 6.8 和下面的明显表达式).

如前所述, 假定 $u$ 是这个初值问题的解, 那么, $v = u_t$ 就是一个相应的以 $v(x,0) = \psi(x)$ 和 $v_t(x,0) = 0$ 为初始条件的初值问题的解. 因此, 为了求解具有任意的初始值 $u$ 与 $u_t$ 的初值问题, 按叠加原理, 只需找出以 (1a) 为初始条件的初值问题的解就行了.

在这一节里, 将利用 Fourier 积分去找到 Cauchy 问题的解的形式结构, 并略去由形式地运用 Fourier 积分所得结果的证实, 因为在后面几节里还要用不同的方法以各种方式去推导这个结果.

首先集中考虑波动方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$, 其初始条件为 $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x)$.

本小节中要获得的显式解是

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^1 (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} r Q(x,r) \mathrm{d}r, \tag{2}$$

其中

$$Q(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int \int_{\beta^2 = 1} \psi(x + \beta r) \mathrm{d}\beta. \tag{3}$$

不论空间的维数 $n$ 是偶数或是奇数, 它的形式都是一样的. 但是解的下列表示却表明了当 $n$ 为偶数和为奇数时解的不同性质:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-3)/2} (t^{n-2} Q), \quad \text{当 } n \text{ 为奇数}, \tag{4}$$

$$u(x,t) = \frac{t}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-2)/2} (t^{n-3} H), \quad \text{当 } n \text{ 为偶数}, \tag{5}$$

① 参考第 3 章 3.4.2 与 3.4.3 节. —— 译者注.

其中

$$H(x,t)=\int_0^t \frac{rQ(x,r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^2}=\frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}.$$

如果希望把 (4) 和 (5) 统一到一个表达式里, 那么就需要引用分数阶微分的概念. 那样, (4) 就概括了两种情况 (6.13.2).

### 6.12.2　波动方程的解的构造

与第 3 章 3.5 一致, 暂且把所求的解写成下面的形式

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int A(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\sin\rho t\mathrm{d}a, \tag{7}$$

其中 $a$ 表示矢量 $a_1,\cdots,a_n$,

$$\rho=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=|a|,$$

且 $(a,x)$ 是 $a$ 与 $x$ 的内积, $\mathrm{d}a=\mathrm{d}a_1\cdots\mathrm{d}a_n$. 由 $t=0$ 时的初始条件, 在积分号下求导, 求得

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \rho A(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\mathrm{d}a.$$

这里以及后边的运算符号交换次序的合理性可由直接检验结果的正确性而得到证实[①]. Fourier 反演公式立即给出

$$\rho A=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \psi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{8}$$

把 $A$ 的这个表达式代入等式 (7) 并交换积分的次序, 则形式上导出

$$u=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a(x-\xi))}\frac{\sin\rho t}{\rho}\mathrm{d}a.$$

然而, 当 $n>2$ 时, 这个式子中的积分是发散的, 因为在极坐标系中 $\mathrm{d}a=\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_n=\rho^{n-1}\mathrm{d}\omega_n\mathrm{d}\rho$. 用下边的方案去避开这个形式上的困难[②]：当 $n$ 为奇数且 $n\geqslant 3$ 时, 考虑表达式

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \frac{A(a)}{\rho^{n-2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\cos\rho t\mathrm{d}a; \tag{9}$$

当 $n$ 为偶数且 $n\geqslant 2$ 时考虑

$$w(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \frac{A(a)}{\rho^{n-2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax)}\sin\rho t\mathrm{d}a \tag{9a}$$

---

① 也可以引用这里和本章其他地方引用了的分布概念, 但它对当前的目的不是必要的.

② 本质上在前边引用 $\delta$ 函数和其他符号函数皆源于这一类方案.

形式上求导, 则 $n$ 为奇数且 $n \geqslant 3$ 时

$$u(x,t) = (-1)^{(n-1)/2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}v(x,t), \tag{9b}$$

当 $n$ 为偶数且 $n \geqslant 2$ 时

$$u(x,t) = (-1)^{(n-2)/2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}w(x,t). \tag{9c}$$

把 $A(a)$ 的表达式 (8) 代入 (9) 与 (9a) 之后, 可以交换对 $\xi$ 和对 $a$ 积分的次序. 结果, 得到

$$u = \frac{\partial^{N-2}}{\partial t^{n-2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \psi(x+\xi)K_n(r,t)\mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

$$(\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n)$$

其中 $r = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}$, 且

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{\pi\omega_{n-1}}{(2\pi)^n}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{t^2}{r^2}-1\right)^{(n-3)/2}, & \text{当 } r < t, \\ 0, & \text{当 } r > t. \end{cases}$$

为了证明这个结论, 仅计算当 $n$ 为奇数时的内积分 (当 $n$ 为偶数时, 步骤是相仿的; 而且 $n$ 为偶数时的结果很容易从 $n$ 为奇数时的结果推出来). 首先, 代替 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 引入极坐标 $\rho = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 和 $n$ 维单位矢量 $\beta$, 其支量为 $\beta_i = \rho^{-1}a_i$, 所以 $\mathrm{d}a = \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\beta$. 将 (8) 代入 (9) 并交换积分的次序, 则 (9) 的内积分化为

$$S_n(r,t) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^{\infty} M(\rho r)\cos\rho t\mathrm{d}\rho, \tag{11}$$

其中 $M(r)$ 是平均值:

$$M(r) = \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta\xi)}\mathrm{d}\omega_n. \tag{12}$$

利用 6.11 的等式 (4), 得到①

$$M(r) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}(1-\lambda_1^2)^{(n-3)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 r}\mathrm{d}\lambda_1. \tag{13}$$

现在在 (11) 中令 $\rho r = s$, 则得

$$S_n(r,t) = \frac{\omega_n}{r(2\pi)^n}\int_0^{\infty} M(s)\cos s\frac{t}{r}\mathrm{d}s$$

---

① 由卷 I, 附带地得到

$$M(r) = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{(n-2)/2}(r)}{r^{(n-2)/2}}.$$

$$= \frac{\omega_n}{2r(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} M(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st/r}\mathrm{d}s,$$

利用 (13), 经过一个简单的变换之后, 此式化为

$$S_n(r,t) = \frac{\omega_{n-1}}{r(2\pi)^n}\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}(1-\lambda_1^2)^{(n-3)/2}\cdot\frac{\sin N\left(\lambda_1+\dfrac{t}{r}\right)}{\lambda_1+\dfrac{t}{r}}\mathrm{d}\lambda_1.$$

由右端的"Dirichlet 积分"的熟知的性质 (参考卷 I), 得到

$$S_n(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\pi\omega_{n-1}}{r(2\pi)^n}\left(1-\dfrac{t^2}{r^2}\right)^{(n-3)/2}, & \text{当 } r>t, \\ 0, & \text{当 } r<t. \end{cases} \tag{14}$$

但 $v$ 已由表达式

$$v = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \psi(x+\xi)S_n(r,t)\mathrm{d}\xi$$

给出. 引用极坐标

$$r = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2},\quad a_1,a_2,\cdots,a_n,$$

并引入函数 $\psi$ 在半径为 $r$ 且中心在 $x$ 的球上的平均值

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n;r) = \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_n}\psi(x+\alpha r)\mathrm{d}a, \tag{15}$$

则由 (14) 得到

$$\begin{aligned} v &= \omega_n\int_0^{\infty} Q(x,r)r^{n-1}S_n(r,t)\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi\omega_{n-1}\omega_n}{(2^n\pi)^n}\int_0^{\infty}(r^2-t^2)^{(n-3)/2}rQ(x,r)\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

当 $n$ 为奇数且 $\geqslant 3$ 时, 利用恒等式

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{\infty}(r^2-t^2)^{(n-3)/2}rQ(x,r)\mathrm{d}r = 0. \tag{15a}$$

因为被积分式是 $t$ 的 $n-3$ 次多项式, 它的关于 $t$ 的 $n-2$ 阶导数是零. 由 $\dfrac{\partial^{n-2}v}{\partial t^{n-2}}$ 减去 (15a), 得到 $u = (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{\partial^{n-2}v}{\partial t^{n-2}}$ 的表示:

$$u(x,t) = C_n\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{1}(t^2-r^2)^{(n-3)/2}rQ(x,r)\mathrm{d}r,$$

它和 (10) 是等价的. 可以由上面的公式或者直接考虑当 $Q = 1$ 时的特殊情况 $\psi = 1$, $u = 1$ 而找出常数 $C_n$. 得到 $C_n = 1/(n-2)!$. 于是, 下列公式给出了初值问题的解：

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} rQ(x,r)\mathrm{d}r. \tag{16}$$

这个公式当 $n$ 为偶数时也是对的, 并且可以由 (9a) 出发得到. 不过, 在这个情况下, 计算比较烦杂些. 因此, 趋向于用 6.12.3 中所述的直接步骤把 (16) 推广到维数为偶数的情况.

### 6.12.3 降维法

降维法[1]的基础是看出了由问题在 $n$ 个独立空间变量情况下的解通过特殊化可以得到在 $n-1$ 个或者更少的空间变量情况下的解. 在这样作的时候, 由“高维”的问题“下降”到“低维”的问题.

借助于唯一性定理, 并利用这样一个假定 —— 初始函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $x_n$ 无关, 就由 $n$ 个空间变量的公式得到 $n-1$ 个空间变量的公式. 于是, 解 $u$ 也与 $x_n$ 无关, 因而解决了 $n-1$ 个空间变量的初值问题. 相仿地, 可以在公式中引入假定 ——$\psi$ 仅依赖于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}$. 从而由 $n$ 个空间变量降到 $n-2$ 个空间变量, 等等.

现在假定公式 (16) 对于奇的维数成立, 利用降维步骤推导偶的维数的相应的公式.

由 $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的空间开始. 在这个空间里, 考虑仅依赖于 $n$ 个变量的一个函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在半径为 $r$ 的一个球 $\Omega_{n+1}$ 上的平均值：

$$Q_{n+1}(x;r) = \frac{1}{\omega_{n+1}}\int\cdots\int_{\Omega_{n+1}} \psi(x+\alpha r)\mathrm{d}\omega_{n+1},$$

其中 $\alpha$ 是一个单位矢量. 由于 $\psi$ 不依赖于第 $n+1$ 个变量, 按照 6.11, 这个曲面积分可以由一个 $n$ 维球上的积分给出. 现在

$$Q_{n+1}(x,r) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1} r^{n-1}}\int_0^r \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \int \frac{\psi(x+\rho\alpha)}{\omega_n\sqrt{r^2-\rho^2}}\mathrm{d}\omega_n.$$

因为 $\omega_n = 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(n/2)$, 所以

$$Q_{n+1}(x,r) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r \frac{\rho^{n-1}Q_n(x,\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho, \tag{17}$$

---

[1] 参考 J. Hadamard [2]. 又参考第 3 章 3.4.4.

其中

$$Q_n(x,\rho)=\frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int\psi(x+\alpha\rho)\mathrm{d}\omega_n$$

表示 $\psi$ 在 $n$ 维球上相应的平均值.

现在下降一维, 经过下面的简短计算就导出所需的结果. 在 (16) 中以 $n+1$ 代替 $n$ 并将 $Q_{n+1}(x,r)$ 的表达式 (17) 代入它, 交换积分与求导的次序之后, 就得到

$$u=C\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\left[t\int_0^t\rho^{n-1}Q_n(x,\rho)\mathrm{d}\rho\int_\varrho^t\frac{(t^2-r^2)^{(n-4)/2}}{r^{n-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}\mathrm{d}r\right],$$

其中 $C$ 为一个常数. 按关系 $1-\rho^2/r^2=(1-\rho^2/t^2)z$, 引入一个新的积分变量 $z$, 则容易得到

$$\int_0^t\frac{(t^2-r^2)^{(n-4)/2}}{r^{n-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}\mathrm{d}r=\frac{(t^2-\rho^2)^{(n-3)/2}}{2^t\rho^{n-2}}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{(n-4)/2}\mathrm{d}z. \tag{18}$$

于是

$$u=C_n\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t(t^2-\rho^2)^{(n-3)/2}\rho Q_n(x,\rho)\mathrm{d}\rho.$$

仍由取特殊情况而找出常数 $C_n$:

$$C_n=1/(n-2)!$$

可见, 当下降到较低的维数 $n$ 时, 解的公式保留它原来的形式. 因为可以由较大的奇数下降到偶数, 所以只需要推导当 $n$ 为奇数时的公式 (16) 就够了.

### 6.12.4　解的进一步的讨论. Huygens 原理

可以把解 (16) 简括地化为不同的形式 (4), (5), 它们显示出了有关 Huygens 原理的重要事实①.

用 $G(t)$ 记 $t$ 的任一 $\lambda$ 次连续可微函数. 考虑函数

$$U_\lambda(t)=\frac{1}{(2\lambda+1)!}\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}}\int_0^t(t^2-r^2)^\lambda rG(r)\mathrm{d}r \tag{19}$$

$$(\lambda=0,1,\cdots).$$

容易证明 (19) 适合递推关系

$$U_\lambda(t)=\frac{1}{2\lambda+1}(tU'_{\lambda-1}+2\lambda U_{\lambda-1}). \tag{20}$$

$U_0=tG(\lambda)$ 蕴含着

① 参考 3.4.6.

$$U_\lambda = t\sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\nu} t^\nu G^{(\nu)}(t), \tag{21}$$

其中 $a_{\lambda,\nu}$ 都是常数. 若令 $P_\lambda(t)$ 表示多项式

$$P_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\nu} t^\nu,$$

则有符号形式上的关系

$$U_\lambda(t) = tP_\lambda(tG), \tag{22}$$

其中 $G$ 的各次幂应代以相应的导数. 于是, 初值问题的解 (16) 现在可以对于奇的 $n = 2\lambda + 3$ 写成

$$u = tP_{(n-3)/2}(tQ), \tag{23}$$

其中 $G(t) = Q(t) = Q(x, t)$ 已经由 (15) 定义过了.

由奇的维数 $n + 1$ 下降到 $n$, 由这个结果又得到当空间的维数为偶数时解的一个表示, 易得

$$u = tP_{(n-2)/2}(tG), \tag{23a}$$

其中 $G = \dfrac{1}{\omega_{n+1}}\displaystyle\int\cdots\int \psi(x + \beta t)\mathrm{d}\omega_{n+1}$, 即 (按 6.12.3)

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\frac{1}{t^{n-1}}\int_0^t \frac{r^{n-1}Q(x,r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\mathrm{d}r. \tag{23b}$$

因此, 用 $G(x, t)$ 这个函数关于 $t$ 的直到 $(n-2)/2$ 阶的导函数表示了初值问题的解.

与奇维数情况的讨论相仿, 也不难给出用下式

$$H(x, t) = \int_0^r \frac{rQ(x,r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\mathrm{d}r \tag{24}$$

(这个 $H(x, t)$ 本身适合 $n = 2$ 时的波动方程) 的各阶导数表达的稍微不同的表示. 令

$$U_{\lambda-1/2} = Z_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!}\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial t^{2\lambda}}\int_0^t (t^2 - r^2)^{\lambda-1/2} rQ(r)\mathrm{d}r. \tag{25}$$

则得到关于 $Z$ 的递推公式

$$\left.\begin{aligned} &Z_\lambda = \frac{1}{2\lambda}[(2\lambda - 1)Z_{\lambda-1} + tZ'_{\lambda-1}] \quad (\lambda = 1, 2\cdots), \\ &Z_0 = U_{\lambda-1/2} = H. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由此可推出形式如下的一个公式：

$$Z_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} b_{\lambda,\nu} t^\nu H^{(\nu)}(t), \tag{27}$$

其中 $b_{\lambda,\nu}$ 为常数. 利用多项式

$$\Pi_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} b_{\lambda,\nu} t^\nu,$$

可以在形式上把 (27) 写成

$$Z_\lambda = \Pi_\lambda(tH). \tag{28}$$

所以当维数为偶数时初值问题的解是

$$u = \Pi_{(n-2)/2}(tH), \tag{29}$$

其中

$$H(x,t) = \int_0^t \frac{rQ(x,r)}{\sqrt{t^2-r^2}} \mathrm{d}r.$$

公式 (23) 和 (29) 表明, 如果初始函数 $\psi$ 当 $n$ 为偶数时具有直到 $(n-2)/2$ 阶的连续导数或当 $n$ 为奇数时具有直到 $(n-3)/2$ 阶的连续导数, 则 $u$ 是连续的. 为了保证 $u$ 可以多微分两次, 正如微分方程 (1) 所需要的, 那么假定当 $n$ 为奇数时 $\psi$ 具有直到 $(n+1)/2$ 阶的连续导数, 当 $n$ 为偶数时 $\psi$ 具有直到 $(n+2)/2$ 阶的连续导数①.

由前面的表示推知有关 Huygens 原理的一些事实. Huygens 原理断言：波动方程的初值问题的解的值仅依赖于在平面 $t=0$ 上依赖区域的边界, 即它仅依赖于 $u$ 及其导数在特征锥的基底 $r=t$ 的边界上的初始值, 而与这个基底的内部的初始值无关. Huygens 原理仅对三维空间里的波动方程成立而对二维空间里的波动方程是不成立的②. 目前的公式表明了此结论是下述一般规律的一个特例：当空间的维数 $n$ 为奇数时Huygens原理成立, 而当 $n$ 为偶数时不成立③.

最后, 递推公式 (20) 和 (26) 显然导致表示 (4) 和 (5). 如果代替 $U$ 或 $Z$ 引入相应的函数 $R_\lambda = (2/\sqrt{\pi})\Gamma(2\lambda+3/2)U_\lambda$ 或 $S_\lambda = (1/t)\lambda! Z_\lambda$, 就得到一组简化的递推关系：

$$R_\lambda = \lambda R_{\lambda-1} + t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2} R_{\lambda-1}, \quad R_0 = tQ(x,t);$$

$$S_\lambda = \lambda S_{\lambda-1} + t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2} S_{\lambda-1}, \quad S_0 = \frac{1}{t} H(x,t),$$

① 在 6.10 中曾经证明这样的条件对于初值问题是适当的, 那时并未依靠解的表示公式.

② 参考第 3 章 3.4 和第 6 章 6.2.

③ 显然 Vito Volterra [1] 和 O. Tedone [1] 首先看清了这个规律.

其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 这个递推问题立即得到解

$$R_\lambda = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1}Q)$$

和

$$S_\lambda = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda-1}H),$$

它蕴含着表示 (4) 和 (5).

### 6.12.5 非齐次方程. Duhamel 积分

为了解具有初始条件

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \tag{30a}$$

和已知 $f(x,t)$ 的非齐次方程

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t), \tag{30}$$

再次援引参数变易法 或第 3 章 3.4.3 中论述的"Duhamel 积分". 仍旧假定函数 $f$ 相应地具有直到 $(n+1)/2$ 或 $(n+2)/2$ 阶的连续导数. 设依赖于参数 $\tau$ 的函数 $v(x,t;\tau)$ 为齐次微分方程

$$v_{tt} - \Delta v = 0$$

的适合条件

$$v(x,0;\tau) = 0, v_t(x,0;\tau) = f(x,\tau)$$

的一个解. 于是

$$u = \int_0^t v(x, t-\tau; \tau)\mathrm{d}\tau. \tag{31}$$

由这个"Duhamel 积分"立即得到带着初始条件 (30a) 的非齐次方程 (30) 的初值问题的解. 利用平均值

$$Q(x,r;\tau) = \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int f(x+\beta r,\tau)\mathrm{d}\omega_n,$$

得到

$$v(x,t;\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2-r^2)^{(n-3)/2} rQ(x,r;\tau)\mathrm{d}r,$$

并从而可知

$$u(x,t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^{t-\tau}[(t-\tau)^2 - r^2]^{(n-3)/2} rQ(x,r;\tau)\mathrm{d}r.$$

再经过一个容易证明的求导与积分次序的交换步骤, 最后就得到

$$u(x,t)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^\tau(\tau^2-r^2)^{(n-3)/2}rQ(x,r;t-\tau)\mathrm{d}r. \tag{32}$$

当 $n=2$ 和 $n=3$ 时得到表达式

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\mathrm{d}\tau\iint_{\rho\leqslant\tau}\frac{f(\xi,\eta;t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\quad(\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2) \tag{33}$$

和

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\rho\leqslant t}\frac{1}{\rho}f(\xi,\eta,\zeta;t-\rho)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi,\quad(\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2). \tag{34}$$

它们和第 3 章中的结果是一致的.

### 6.12.6 一般二阶线性方程的 Cauchy 问题

在 6.12.5 的基础上, 现在不难借助降维法来解决一般二阶双曲型微分方程的初值问题. 为此只需先考虑微分方程

$$\Delta u+c^2u=u_{tt} \tag{35}$$

和初始条件

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{35a}$$

就够了. 按照第 3 章 3.3, 一般的情况可以化为这个问题.

借助降维法又可以得到明显的解. 为此, 人为地把“空间”变量的个数增至 $n+1$, 令 $x_{n+1}=z$, 并考虑 $v(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1},t)$ 的微分方程

$$\Delta v=v_{tt} \tag{36}$$

和初始条件

$$\left.\begin{aligned}&v(x,0)=0,\\&v_t(x,0)=\psi(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{e}^{cx_{n+1}}=\psi(x)\mathrm{e}^{cz}.\end{aligned}\right\} \tag{36a}$$

引入

$$v=\mathrm{e}^{cz}u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t), \tag{37}$$

则得到 $u$ 作为初值问题 (35) 的解. 的确, 前面的表示 (16) 表明初值问题 (36) 的解 $v$ 的形式是 $\mathrm{e}^{cz}u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 但是, 如果把函数 $v$ 代入方程 (36), 就立即得到原来的关于 $u$ 的初值问题 (35), (35a). 据 6.8 中所证的唯一性定理, 仅能有一个解 $u$ 存在, 所以 $u=v\mathrm{e}^{-cz}$.

现在可以用 6.12.4 中的表达式来表示 $v$ 并从而也可以表示 $u$. 于是当 $n$ 为偶数时, 亦即 $n+1$ 为奇数时, 得到

$$v = tP_{(n-2)/2}(tG^*),$$

其中

$$G^*(t) = \frac{\mathrm{e}^{cz}}{\omega_{n+1}} \int \cdots \int_{\Omega_{n+1}} \psi(x+\beta t)\mathrm{e}^{ct\beta_{n+1}} \mathrm{d}\omega_{n+1}.$$

因此 $u = tP_{(n-2)/2}(tG)$, 其中

$$G(t) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \int \cdots \int_{\Omega_{n+1}} \psi(x+\beta t)\mathrm{e}^{ct\beta_{n+1}} \mathrm{d}\omega_{n+1}.$$

同前所述, $\mathrm{d}\omega_{n+1}$ 表示 $n+1$ 维单位球上的面元. 由于函数 $\psi$ 不依赖于最后一个自变量 $z = x_{n+1}$, 且

$$\begin{aligned} t^{n-1}\mathrm{d}\omega_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \cdots \mathrm{d}\xi_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \rho^{n-1} \mathrm{d}\omega_n \mathrm{d}\rho, \end{aligned}$$

得到关系

$$G(x,t) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{-t}^{t} \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \mathrm{e}^{c\sqrt{t^2-\rho^2}} Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho,$$

即

$$G(x,t) = \frac{2\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \cosh c\sqrt{t^2-\rho^2} Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho, \tag{38}$$

其中

$$Q(x,\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int_{\Omega_n} \psi(x+\beta\rho)\mathrm{d}\omega_n.$$

相仿地, 当 $n$ 为奇数时, 得到解

$$u = \Pi_{(n-1)/2}(tH), \tag{39}$$

其中

$$H(x,t) = \frac{n}{t^n} \int_0^t \rho^{n-1} J_0(\mathrm{i}c\sqrt{t^2-\rho^2}) Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho, \tag{40}$$

这里 $J_0$ 是零级的 Bessel 函数. 的确, 在这种情况下,

$$v = \Pi_{(n-1)/2}(tH^*),$$

其中

$$H^*(x,t) = \frac{2\mathrm{e}^{cz}}{\omega_{n+2}t^n} \int \cdots \int_{\rho^2+\xi_{n+1}^2 \leqslant t^2} \frac{\psi(x+\xi)}{\sqrt{t^2-\rho^2-\xi_{n+1}^2}} \mathrm{e}^{c\xi_{n+1}} \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_{n+1}.$$

其中, 对于 $\xi_{n+1}$ 由 $-\sqrt{t^2-\rho^2}$ 积分到 $\sqrt{t^2-\rho^2}$ 给出表达式

$$\pi J_0(\mathrm{i}c\sqrt{t^2-\rho^2}),$$

所以由 (40) 知

$$\begin{aligned}H(x,t)&=H^*(x,t)\mathrm{e}^{-cz}\\&=\frac{2\pi}{\omega_{n+2}}\frac{1}{t^n}\int\cdots\int_{\rho\leqslant t}\psi(x+\xi)J_0(\mathrm{i}c\sqrt{t^2-\rho^2})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.\end{aligned}$$

把这结果应用于初始条件为 $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ 的电报方程

$$\Delta u=u_{tt}+u_t, \tag{41}$$

令 $u=v\mathrm{e}^{-t/4}$ 而得到关于 $v$ 的微分方程

$$v_{tt}=\Delta v+\frac{v}{4}, \tag{42}$$

它即是当 $c=\dfrac{1}{2}$ 时的方程 (35).

例如, 当 $n=1,2,3$ 时, 电报方程的解分别是

$$\left.\begin{aligned}&u=\mathrm{e}^{-t/2}\int_0^t J_0\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho,\\&\qquad Q(x,\rho)=\frac{1}{2}[\psi(x+\rho)+\psi(x-\rho)],\quad 当\ n=1,\\&u=\mathrm{e}^{-t/2}\int_0^t\rho\frac{\cosh\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho,\\&\qquad Q(x,\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_2}\psi(x_1+\rho\beta_1,x_2+\rho\beta_2)\mathrm{d}\omega_2,\quad 当\ n=2,\\&u=\mathrm{e}^{-t/2}\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\rho^2J_0\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{t^2-\rho^2}\right)Q(x,\rho)\mathrm{d}\rho,\\&\qquad Q(x,\rho)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega_3}\psi(x_1+\rho\beta_1,x_2+\rho\beta_2,x_3+\rho\beta_3)\mathrm{d}\omega_3,\quad 当\ n=3.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

### 6.12.7 辐射问题[①]

通过一个简单的极限步骤, 由 6.12.5 的结果可以导出 $n$ 维空间里一般波动方程辐射问题的解[②]. 对这个辐射问题的提法如此: 求齐次波动方程 $u_{tt}-\Delta u=0$在 $t>0$ 上的一个解, 要求它和它的导数$u_t$, 当 $t=0$ 时除了在 $x$ 空间的原点以外处处为零, 且在 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=0$ 上, 即在"时间坐标轴"上有如下的奇异性:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\cdots\int\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}s=-g(t). \tag{44}$$

① 有关的论述可参考 A. Weinstein [2].

② 关于更一般而系统的讨论见 6.15.

这里积分是展布在时刻为 $t$ 的以 $x$ 空间原点为中心的一个球 $K_\in$ 上的. $\partial/\partial\nu$ 表示沿球的法线求导, $\mathrm{d}s$ 为面元, 且球的半径 $\varepsilon$ 趋于零. 时间 $t$ 的函数 $g(t)$ 是指定的辐射强度.

还可以把辐射问题更简明地说成是非齐次“微分方程”①

$$u_{tt} - \Delta u = g(t)\delta(x,y,z) \tag{44a}$$

与齐次的初始条件 (30a) 所构成的问题, 这里 $\delta(x,y,z)$ 是前面引进的三维的 $\delta$ 函数.

试图由非齐次方程的解用极限步骤去构造所求的解. 具体地说, 设 $u=u_h$ 为方程 (30) 当 $f(x,t)=\psi(x)g(t)$ 时的解, 其中

$$\begin{cases} \psi = 0, & 当\ r > h, \\ \psi \geqslant 0, & 当\ r < h, \end{cases}$$

且

$$\int\cdots\int_{r\leqslant h}\psi\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = 1.$$

这里 $r^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$. 所需要的辐射函数就是解 $u_h$ 当 $h\to 0$ 时的极限. 具体地说

$$u_h = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^\tau(\tau^2-s^2)^{(n-3)/2}sQ(x,s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$Q(x,s) = \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_n}\psi(x+\beta s)\mathrm{d}\omega_n.$$

如果把其中的积分写成

$$\int_0^\tau(\tau^2-s^2)^{(n-3)/2}sQ(x,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{s\leqslant 7}\frac{(\tau^2-s^2)^{(n-3)/2}}{s^{n-2}}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$(s^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2),$$

取 $h\to 0$ 时的极限, 则得

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\tau(\tau^2-s^2)^{(n-3)/2}sQ(x,s)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & 当\ r\geqslant\tau, \\ \dfrac{(\tau^2-r^2)^{(n-3)/2}}{\omega_n r^{n-2}}, & 当\ r<\tau. \end{cases}$$

所以所求的辐射问题的解是当 $r\geqslant t$ 时

① 以后 (参考 6.14 和 6.15) 将系统地使用 $\delta$ 函数, 但是在这里提出稍微较常见的办法.

$$u = 0,$$

当 $r < t$ 时

$$u = \frac{1}{\omega_n (n-2)!} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_r^t g(t-\tau)(\tau^2 - r^2)^{(n-3)/2} \mathrm{d}\tau$$

或

$$u = \frac{1}{\omega_n (n-2)!} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{t-r} g(\tau)[(t-\tau)^2 - r^2]^{(n-3)/2} \mathrm{d}\tau. \tag{45}$$

当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时 (见第 3 章 3.4) 又相应地找到

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \mathrm{d}\tau \tag{46}$$

和

$$u = \frac{1}{4\pi r} g(t-r). \tag{47}$$

在 $n = 5$ 的情况, 找到

$$u = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^3} [g(t-r) + r g'(t-r)].$$

在 $n = 4$ 的情况, 则是

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_r^t \frac{g(t-r)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \mathrm{d}\tau.$$

按照与 6.12.4 中非常相仿的步骤, 还可以把辐射问题的解写成更简明的形式①

$$u(x,t) = \frac{(-1)^{(n-3)/2}}{4\pi^{(n-1)/2}} \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{g(t-r)}{r}, \quad \text{当 } n \text{ 为奇数}, \tag{48}$$

$$u(x,t) = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2\pi^{n/2}} \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^2} \right)^{(n-2)/2} H(t-r), \quad \text{当 } n \text{ 为偶数}, \tag{49}$$

其中

$$H(t-r) = \int_r^t [g(t-\tau)/\sqrt{\tau^2 - r^2}] \mathrm{d}\tau.$$

应当指出, 如果把 $t - r$ 换为 $t + r$, 那么这一小节中的结论对于内向辐射仍旧成立. 还应当注意, 可以把辐射问题的解表达为和式的形式:

$$u = \frac{r^{2-n}}{4\pi^{(n-1)/2}} \sum_{\nu=1}^{(n-3)/2} a_{\nu,n} (2r)^\nu g^\nu (t-r), \quad \text{当 } n \text{ 为奇数}, \tag{50}$$

① 详细的讨论见 6.18.3. 还指出, 利用广义函数和分数阶的导函数, 可以把公式 (48) 和 (49) 合并到一起.

$$u = \frac{r^{2-n}}{2^{n-1}\pi^{n/2}} \sum_{\nu=1}^{(n-2)/2} b_{\nu,n}(2r)^{\nu} H^{\nu}(r,t), \quad \text{当 } n \text{ 为偶数}, \tag{51}$$

其中 $a_{\nu,n}$ 与 $b_{\nu,n}$ 都是常数.

形式如 (50) 的表达式叫做次数为 $(n-3)/2$ 的高次前进波 (见 6.4 和 6.18).

再一点, 观察上述表达式就能断定这个值得注意的事实：Huygens 原理对于奇数维空间的辐射问题成立[①]. 由原点辐射出来的扰动在点 $x$ 处于时刻 $t$ 产生的作用仅取决于这个扰动在先前某一个瞬间 —— 时间 $t-r$ 的性态. 这个扰动由原点出发以单位速度前进, 恰在时刻 $t$ 达到点 $x$. 因而, 发生在原点的时限分明的脉冲, 即由仅在一段短暂的时间内不等于零的函数 $g(t)$ 所代表的脉冲, 于距离为 $r$ 的任一点处仅在相应始于 $r$ 个时间单位之后的一段短暂的时间内被察觉到.

然而, Huygens 原理对于偶数维空间的辐射问题不成立. 由 (49) 的形式立知这是很明显的. 在这种情况中下述事实也是对的, 即发生在原点的时限分明的脉冲在与原点的距离为 $r$ 的任一点处在迟于 $r$ 个时间单位之前不能被察觉到. 但是, 在过了这个瞬间之后, 在这个点处的影响却永远持续下去. 换句话说, 当 $t > r$ 时, 解将要一般地保持异于零. 所以, 在一个偶数维空间里, 要想清晰地接收到按波动方程传送的信号是不可能的. 相反, 接收到的信号总是一片模糊. 这个事实和进一步的探究 (参考 6.18) 证明, 生存所在的三维空间的特殊处, 就在于信号可以被清晰地传送而不发生畸变.

## 6.13 球面平均法. 波动方程与 Darboux 方程

现在要用 Cauchy 问题的另一种解法[②]给 6.12 中的结论打下一个牢固的基础.

### 6.13.1 关于平均值的 Darboux 微分方程

对于 $n$ 个自变量 $x_i$ 的两次连续可微函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x)$, 考虑它在以 $x$ 为中心而半径为 $r$ 的球面 $\Omega_r$ 上的平均值

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, \cdots, x_n, r) &= v(x, r) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int \psi(x + \beta r) \mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{1}$$

在这个积分中, $\beta$ 表示以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为支量的矢量, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_n = \mathrm{d}\beta$ 是单位球的面元, $\mathrm{d}\Omega = r^{n-1}\mathrm{d}\omega$ 是中心在 $x$ 而半径为 $r$ 的球的面元. 于是平均值函数 $v$ 适合

① 当然, Huygens 原理对于 Cauchy 问题的陈述和对于辐射问题的陈述是等价的.

② 参考 F. John [4].

Darboux 微分方程[①](比较 6.6.2)

$$v_{rr}+\frac{n-1}{r}v_r-\Delta v=0 \tag{2}$$

和初始条件

$$v(x,0)=\psi(x), v_r(x,0)=0. \tag{2a}$$

因此, 利用定义

$$v(-r)=v(r)$$

可以把 $v$ 唯一地延拓为此微分方程在 $r<0$ 上的连续可微的解. 把这个事实表达为如下的论断：$v$ 是 Darboux 方程的关于变量 $r$ 为偶函数的解.

证明时, 利用 Gauss 积分定理

$$\begin{aligned} v_r(x,r) &= \frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_n}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\cdots\int\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\mathrm{d}\Omega_r \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\iint_{G_r}\cdots\int\Delta\psi\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $G_r$ 是球 $\Omega_r$ 的内部, $\mathrm{d}x$ 是体元 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n, \partial/\partial\nu=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\partial/\partial x_i)$ 表示沿球面 $\Omega_r$ 的外法线方向求导. 对 $r$ 再求导一次则得

$$\begin{aligned} v_{rr} &= -\frac{n-1}{\omega_n r^n}\int\cdots\int_{Gr}\Delta\psi\mathrm{d}x+\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\cdots\int_{\Omega}\Delta\psi\mathrm{d}\Omega \\ &= -\frac{n-1}{r}v_r+\Delta v, \end{aligned}$$

由此得到断言.

如果假定函数

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi(x_1)$$

仅依赖于单独一个变量 $x=x_1$ 并且它是对 $x$ 可微分两次的, 那么, 据 6.11.2, 平均值可以写成下面的形式

$$v(x,r)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\phi(x+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

并且适合微分方程

$$v_{rr}+\frac{n-1}{r}v_r-v_{xx}=0. \tag{4}$$

由 6.6.2 推知：公式 (1) 和 (3) 相应地给出了 Darboux 方程 (2) 和 (4) 在初始条件 (2a) 下的解.

① 关于在 Darboux 方程中把 $n-1$ 换为任意参数 $\lambda$ 的理论的推广, 参考 A. Weinstein [2].

### 6.13.2 与波动方程的联系

在 Darboux 方程的解与波动方程的解之间有着一一对应的关系：把公式 (3) 对 $x$ 求导两次, 则得

$$v_{xx} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\phi''(x+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu.$$

所以由 Darboux 方程可知

$$\frac{n-1}{r}v_r + v_{rr} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\phi''(x+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu.$$

在这个公式里, 加到 $r\mu$ 上的参数 $x$ 并无重要的作用. 因此,

如果函数 $v(r)$ 与 $\phi(r)$ 是由积分变换

$$v(r) = \int_{-1}^{1}\phi(r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu \tag{5}$$

联系着的, 那么

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = \int_{-1}^{1}\phi''(r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

于是, 施于 $\phi(r)$ 的运算 $\phi''(r)$ 对应于施于 $v(r)$ 的运算 $v''+(n-1)v'/r$.

可以把 (6) 应用到 $\phi(s)$ 不仅依赖于单独一个参数 $x$ 而且依赖于 $n$ 个参数 $x_1,\cdots,x_n$ 的情况, 这时考虑函数

$$v(r,x_1,\cdots,x_n) = \int_{-1}^{1}\phi(x_1,\cdots,x_n,r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu.$$

现在来推求波动方程和 Darboux 方程之间的联系如下. 设 $u(x_1,\cdots,x_n,t)$ 是波动方程的一个两次连续可微的解, 且适合条件 $u_t(x,0)=0$, 即这解是“$t$ 的偶函数”. 那么, 用 $r$ 代换 $t$ 则得偶函数解

$$\begin{aligned} v(x,r) &= v(x_1,\cdots,x_n,r) \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u(x_1,\cdots,x_n,r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

它适合条件

$$v(x,0)=u(x,0)=\psi(x), \quad v_r(x,0)=0.$$

如果应用上面的结论, 则得微分方程

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\Delta u(x,r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u_{tt}(x,r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

$$= v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r,$$

并且由于 $v$ 的定义是一个球面平均函数而适合初始条件 $v(x,0) = \psi, v_r(x,0) = 0$.

按 6.13.1, Darboux 方程的这个初值问题的解是

$$v(x_1, \cdots, x_n, r) = \frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int_{\Omega_n} \psi(x + r\beta) \mathrm{d}\omega.$$

所以波动方程的解 $u$(已假定它是 $t$ 的偶函数) 必须适合下列关系

$$\begin{aligned} &\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^1 u(x_1, \cdots, x_n, r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2} \mathrm{d}\mu \\ =&\frac{1}{\omega_n} \int \cdots \int_{\Omega_n} \psi(x + r\beta) \mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{7}$$

反之, 从这个关系又能唯一地得到波动方程的解. 问题等于说要反演函数方程 (5), 在 (5) 中作代换 $r = \sqrt{s}$, $r\mu = \sqrt{\sigma}$, 则得

$$v(\sqrt{s}) s^{(n-2)/2} = \int_0^s \frac{\phi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} (s-\sigma)^{(n-3)/2} \mathrm{d}\sigma.$$

采用缩写 $w(s) = v(\sqrt{s}) s^{(n-2)/2}$, $\chi(\sigma) = \dfrac{\phi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}$, 则简化为

$$w(s) = \int_0^s \chi(\sigma)(s-\sigma)^{(n-3)/2} \mathrm{d}\sigma. \tag{8}$$

若 $n$ 为奇数, 则解由

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)! \chi(s) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{(n-1)/2} w(s) \tag{9}$$

唯一地给出. 所以

$$\phi(r) = \frac{1}{\left(\dfrac{n-3}{2}\right)!} r \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^2}\right)^{(n-1)/2} (r^{n-2} v(r)). \tag{10}$$

若 $n$为偶数, 则反演时要用阶数为 $(n-1)/2$ 的“分数阶”微分. 得到

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{n/2} \int_0^s \frac{\omega(\sigma)}{\sqrt{s-\sigma}} \mathrm{d}\sigma. \tag{11}$$

所以

$$\phi(r) = \frac{2r}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r^2}\right)^{n/2} \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} (\rho^{n-2} v(\rho)) \mathrm{d}\rho. \tag{12}$$

再令 $\phi(r)=u(x,r)\omega_{n-1}/\omega_n$, 便得到波动方程 $\Delta u-u_{tt}=0$ 的初值问题的公式如下：当 $n$ 为偶数时

$$u(x,t)=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}\right)^{n/2}\int_0^t\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}(r^{n-2}Q(x,r))\mathrm{d}r, \tag{13}$$

其中

$$Q(x,r)=\frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int\psi(x+r\beta)\mathrm{d}\omega, \tag{14}$$

当 $n$ 为奇数时

$$u(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}t\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{(n-1)/2}(t^{n-2}Q(x,t)). \tag{15}$$

于是给波动方程的解找到了新的明显表示. 如果考虑到修改了的初始条件, 那么就不难把它们和 6.12 的表达式等同起来. 所以, 6.12.1 中的各个公式, 它们都归结到本节的方程 (10), 现在得到了证实. 附带指出, 其实只要对于奇数的 $n$ 证明 (15) 就够了.

### 6.13.3 波动方程的辐射问题

由 6.13.2 中推得的结果, 还能够得到波动方程的与辐射现象相应的那些解的一个有趣的推导. 首先, 寻求波动方程的仅依赖于 $r^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$ 和时间 $t$ 的解. 这些解 $u(r,t)$ 必须是 $r$ 的偶函数并且适合微分方程 (见第 3 章 3.3)

$$u_{tt}-\frac{n-1}{r}u_r-u_{rr}=0, \tag{16}$$

这正是把空间变量 $x$ 与时间变量 $t$ 交换后的 Darboux 方程 (2). 根据 6.13.1, 它的解是

$$u(r,t)=\int_{-1}^1\phi(t+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\mu, \tag{17}$$

其中 $\phi$ 是任意的. 当 $n$ 为奇数时, 利用二项式定理展开积分号内的幂式则得

$$u(r,t)=\frac{1}{r^{n-2}}\sum_{\nu=0}^{(n-3)/2}c_\nu r^{n-3-2\nu}(-1)^\nu\int_{-r}^r\phi(t+\rho)\rho^{2\nu}\mathrm{d}\rho, \tag{18}$$

其中 $c_\nu$ 是二项式系数. 假定 $g$ 是适合

$$\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}g(x)=\phi(x)$$

的任一函数, 那么可以进行分部积分而得

$$u(r,t)=\frac{1}{r^{n-2}}\sum_{\nu=0}^{(n-3)/2}A_\nu r^\nu[(-1)^\nu g^{(\nu)}(t+r)-g^{(\nu)}(t-r)], \tag{19}$$

其中 $g^{(\nu)}$ 表示 $g$ 的 $\nu$ 阶导函数, 且系数 $A_\nu$ 可以将 (19) 代入 (16) 而予以确定①. 再者, 由于 $g$ 在点 $t+r$ 的值和它在 $t-r$ 的值彼此独立 (除了在点 $r=0$), 所以,

$$\frac{1}{r^{n-1}}\sum(-1)^\nu A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t+r) \text{ 和 } \frac{1}{r^{n-2}}\sum A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t-r)$$

分别适合波动方程.

### 6.13.4 广义前进球面波

对于三维空间里形式为 $u=\phi(t-r)/r$ 的球面前进波在任何奇数维空间里都有和它极其相似的东西②. 用符号 $\Box$ 表示波动算子 $(\partial^2/\partial t^2)-\Delta$, 断言：对于任何奇数 $n$ 和任意的波形函数 $\phi$, 函数

$$u=\Box^{(n-1)/2}\phi(t-r)$$

都是波动方程

$$\Box u=0$$

的解. 当 $n=1,3,5$ 时, 找到解 $\phi(t-r), 2(\phi'(t-r)/r)=f(t-r)/r$(这里 $f=2\phi'$) 和 $(8/r^3)\phi'(t-r)+(8/r^2)\phi''(t-r)$. 最后这个解并非简单地是一个相对无畸变前进波, 而是两个这样的波的叠加.

由恒等式③

$$\Box^{(n+1)/2}\phi(t-r)\equiv 0$$

立即可得到这个论断. 可以直接证实这个恒等式, 但更好的是由关于算子

$$L_n[u(r,t)]=u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r-u_{tt} \tag{20}$$

的一个更一般的恒等式去推出它. 当 $n$ 为奇数且 $g$ 为任意的函数时, 函数 $g(t+r)$ 和函数 $g(t-r)$ 都适合 $(n+1)/2$ 重的叠 Darboux 方程

$$L_n^{(n+1)/2}[u]=0. \tag{21}$$

---

① 得到 (比较 6.12.7)

$$A_\nu\begin{pmatrix}\dfrac{n-3}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\frac{2^\nu}{\nu!}\Big/\begin{pmatrix}n-3\\ \nu\end{pmatrix}.$$

② 这个有趣的察见归功于 K. O. Friedrichs.

③ A. Weinstein 曾在各种不同情况下指出这个恒等式的推广. 例如见于他的文章 [3].

为了证明这个论断, 先来证明对于任意的 $\phi$ 和任一整数 $\nu \geqslant 0$ 都成立的关系①:

$$\begin{aligned}&L_n \int_{-1}^{1} \phi(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu} \mathrm{d}\mu \\ =&d_{n,\nu} \int_{-1}^{1} \phi''(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu+1} \mathrm{d}\mu,\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $(\nu+1)d_{n,\nu} = (n-3)/2-\nu$. 如果用 $w(r,x)$ 记右端的积分, 那么由 6.13.1 可知

$$L_{2\nu+3}[w] = 0,$$

并因为 $L_n = L_{2\nu+3} + [n-(2\nu+3)/r](\mathrm{d}/\mathrm{d}r)$ 而有

$$L_n[w] = \frac{n-(2\nu+3)}{r} w_r = \frac{n-(2\nu+3)}{r} \int_{-1}^{1} \phi'(t+r\mu)(1-\mu^2)^{\nu} \mu \mathrm{d}\mu.$$

进行分部积分, 即得所需的右端的形式.

重复应用公式 (22), 就得到

$$\begin{aligned}&L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \phi(t+r\mu) \mathrm{d}\mu \\ =&d_{n,0} d_{n,1} \cdots d_{n,(n-3)/2} \int_{-1}^{1} \phi^{n-1}(t+r\mu)(1-\mu^2)^{(n-1)/2} \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

这里, 由于 $d_{n,(n-3)/2} = 0$, 所以右端等于零. 因此, 对于任何具有直到 $n-1$ 阶边续导数的 $\phi$ 皆有

$$L_n^{(n-1)/2} \int_{-1}^{1} \phi(t+r\mu) \mathrm{d}\mu = 0. \tag{23}$$

当 $\phi = g''$ 时, 得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \phi(t+r\mu) \mathrm{d}\mu &= \frac{g'(t+r)-g'(t-r)}{r} \\ &= \frac{1}{n-1} L_n[g(t+r)+g(t-r)].\end{aligned}$$

于是, 由 (23) 得出论断 (21).

因为在旋转对称的情况 Darboux 算子恒等于 □, 所以原来的断言得证.

① 6.13.1 中的结果可以作为 $\nu = (n-3)/2$ 时的特例而得之.

## 6.13′ 用球面平均法解弹性波的初值问题

三维空间里的球面平均法 (见 6.13) 对于各向同性弹性介质中波动的四阶初值问题给出一个巧妙的解[①].

无限介质中点 $x$ 到点 $\xi$ 的微小弹性变形可表示为

$$\xi_i = x_i + u^i(x_1, x_2, x_3, t),$$

或用矢量写成

$$\xi = x + u(x, t).$$

关于应力张量 $t^{ij}$ 的应力应变关系 (见卷 I 第 4 章) 是

$$t^{ij} = \lambda\delta^{ij}\theta + \mu(u^i_{x_i} + u^j_{x_i}),$$

其中 $\lambda, \mu$ 是弹性常数.

$\delta^{ij}$ 是 Kronecker 符号, 而

$$\theta = \mathrm{div} u = \sum_i u^i_{x_i}.$$

运动方程是

$$\sum_j t^{ij}_{x_i} = \mu\Delta u^i + (\lambda + \mu)\theta_{x_i} = \rho u^i_{tt} \tag{1}$$

或

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\theta = \rho u_{tt}, \tag{2}$$

其中 $\rho$ 是密度, 引入由

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

定义的速度 $c_1$, $c_2$, 并引入二阶算子

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta,$$

不难肯定关于 $\theta$ 有

$$L_1[\theta] = 0.$$

关于矢量 $u$, 得到四阶微分方程

$$L_1 L_2[u] = 0. \tag{3}$$

于是关于应力张量, 得到方程

① 在这一节里采用特定的记号以便和弹性力学方面的著作相参照.

$$L_1L_2[t^{ij}]=0 \quad (i,j=1,2,3).$$

顺便提到在条件

$$t^{ij}=0, \quad \text{当 } i\neq j \text{ 时}$$

之下 (3) 的特解. 这时对于

$$\sum_i t^{ii}=p=(3\lambda+2\mu)\theta$$

找到

$$L_1[\theta]=L_1[p]=0.$$

这些解表示有纯粹正压力 $p$ 而无剪力的压缩波.

另一方面,

$$\theta=0, \quad L_2[u]=0$$

即

$$L_2[t^{ik}]=0$$

的解表示无压缩的剪切波. 由于 $L_1$ 和 $L_2$ 都是波动算子, 所以 (3) 的特征射线锥面是由两个同轴的圆锥构成的. 值得注意的是, 方程 (3) 带着给定的初始矢量

$$u(x,0)=F_0(x), \quad u_t(x,0)=F_1(x) \tag{4}$$

的初值问题可以像三维波动方程的情况一样用球面平均法予以解决和分析如下：

首先, 在方程

$$u_{tt}=c_2^2\Delta u+(c_1^2-c_2^2)\text{grad div } u$$

中和在对其微分而得到的方程中直接令 $t=0$, 就可由 (2) 和 (4) 得出 $u_{tt}$ 和 $u_{ttt}$ 的初始值：

$$\left.\begin{aligned}u_{tt}(x,0)&=c_2^2\Delta F_0+(c_1^2-c_2^2)\text{grad div } F_0=F_2(x),\\ u_{ttt}(x,0)&=c_2^2\Delta F_1+(c_1^2-c_2^2)\text{grad div } F_1=F_3(x).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

现在引入半径为 $r$ 中心为点 $x$ 的球面上的平均值如下：

$$I(x,r,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}u(x+r\xi,t)\mathrm{d}w_\xi, \tag{6}$$

$$\phi_i(x,r)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}F_i(x+r\xi)\mathrm{d}\omega_\xi \quad (i=0,1,2,3). \tag{7}$$

$I$ 和 $\phi$ 被认为是 $r$ 的偶函数. 有

$$I(x,0,t)=u(x,t),\quad \phi_i(x,0)=F_i(x).$$

由前面的计算 (6.13.1) 得到

$$\Delta(rI)=(rI)_{rr},\quad \Delta(r\phi_i)=(r\phi_i)_{rr}.$$

此外, 还有当 $t=0$ 时的初始值

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}I=\phi_i\quad (i=0,1,2,3).$$

在 (3) 中取平均值, 立即得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(rI)=0. \tag{3a}$$

现在可以明显地求出 (3a) 在初始条件 (7) 之下的积分. 的确, 对于每个固定的 $x$ 值, 函数 $rI(r,t)$ 可以表示成如下的形式

$$rI(r,t)=G_1(r+c_1t)+G_2(r-c_1t)+G_3(r+c_2t)+G_4(r-c_2t),$$

而且根据前面的理论可知这是唯一地确定了的.

用 $t=0$ 时的初始条件可以确定这四个球面波 $G$:

$$\begin{aligned}
&G_1+G_2+G_3+G_4=r\phi_0,\\
&c_1G_1'-c_1G_2'+c_2G_3'-c_2G_4'=r\phi_1,\\
&c_1^2G_1''+c_1^2G_2''+c_2^2G_3''+c_2^2G_4''=r\phi_2,\\
&c_1^3G_1'''-c_1^3G_2'''+c_2^3G_3'''-c_2^3G_4'''=r\phi_3.
\end{aligned}$$

先考虑特殊情况:

$$F_0=F_1=F_2=0,\quad F_3=F,$$

这时

$$\phi_0=\phi_1=\phi_2=0,\quad \phi_3=\phi.$$

对于 $G_1$ 找到偶函数

$$G_1(r)=\frac{1}{4c_1(c_1^2-c_2^2)}\int_0^r(r-s)^2s\phi(s)\mathrm{d}s,$$

而

$$G_2(r)=-G_1(r),\quad G_3(r)=-\frac{c_1}{c_2}G_1(r),\quad G_4(r)=\frac{c_1}{c_2}G_1(r).$$

用 $U(F)$ 表示以 $0,0,0,F$ 为初始数据的解, 则得

$$\begin{aligned}
U(F)=U(x,t)&=I(x,0,t)\\
&=2G_1'(c_1t)-\frac{2c_1}{c_2}G_1'(c_2t).
\end{aligned}$$

因此

$$U[F]=V[F]-W[F],$$

其中

$$V[F]=\frac{1}{c_1(c_1^2-c_2^2)}\int_0^{c_1t}(c_1t-s)s\phi(s)\mathrm{d}s,$$

$$W[F]=\frac{1}{c_2(c_1^2-c_2^2)}\int_0^{c_2t}(c_2t-s)s\phi(s)\mathrm{d}s.$$

这里 $V$ 和 $W$ 分别适合

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}V[F]=c_1^2\Delta V[F]=V[c_1^2\Delta F],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}W[F]=c_2^2\Delta W[F]=W[c_2^2\Delta F].$$

这相当于把波分解为一个无旋的即膨胀的部分 ($\mathrm{curl}U=0$) 和一个等容的部分 ($\mathrm{div}U=0$), 它们分别按速度 $c_1$ 和 $c_2$ 传播.

此外, 还可以写下

$$U[F]=\frac{1}{c_1(c_1^2-c_2^2)}\left[\int_0^{c_2t}\phi(s)\frac{c_1-c_2}{c_2}s^2\mathrm{d}s+\int_{c_2t}^{c_1t}\phi(s)(c_1st-s^2)\mathrm{d}s\right].$$

所以

$$4\pi c_1(c_1^2-c_2^2)U[F]=\iiint_{|\xi|<c_2t}\frac{c_1-c_2}{c_2}F(x+\xi)\mathrm{d}\xi+\iiint_{c_2t<|\xi|<c_1t}\frac{c_1t-|\xi|}{|\xi|}F(x+\xi)\mathrm{d}\xi.$$

相应于一般初始数据 $F_0,F_1,F_2,F_3$ 的解 $u$ 是

$$U[F_3-(c_1^2+c_2^2)\Delta F_1]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U[F_2-(c_1^2+c_2^2)\Delta F_0]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U[F_1]+\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}U[F_0].$$

从而由 (5) 知

$$\begin{aligned}u=&U[-c_1^2\Delta F_1+(c_1^2-c_2^2)\mathrm{grad\ div}\ F_1]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U[-c_1^2\Delta F_0+(c_1^2-c_2^2)\mathrm{grad\ div}\ F_0]\\&+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U[F_1]+\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}U[F_0].\end{aligned}$$

立即可以看出下面值得注意的事实: 由于表达式 $-c_1^2\Delta F_1+(c_1^2-c_2^2)\mathrm{grad\ div}\ F_1$ 是一个散度, 半径为 $c_2t$ 的球的内部的数据对于解的值无所关联. 因此, 严格地讲, 依赖区域不包括以 $x$ 为中心而以 $c_2t$ 为半径的球的内部. 事实上, 它是介于这个球面和另一个半径为 $c_1t$ 的较大的同心球面之间的球壳 (参考 6.15.4).

## 6.14　平面平均值法. 对于一般常系数双曲型方程的应用

在本节里, 转到一个处理任意常系数线性双曲型方程或方程组的方法. 如 6.11.1 中的引注所说, 借助于平面波的叠加形成的解的表示①, 可以获得 Cauchy 问题的解, 而且避免了交换运算次序所引起的困难, 下一节里更深入的分析将进一步去掉常系数这个假设②.

### 6.14.1　一般方法

设 $L[u]$ 为关于函数 $u = u(x_1, \cdots, x_n, t) = u(x, t)$ 的任一 $k$ 阶的线性双曲型算子. 考虑在形式

$$L[u] = g(x_1, \cdots, x_n, t) \tag{1}$$

下的 Cauchy 问题, 其中 $g$ 至少可微分 $k/2$ 次. 给定了函数 $u$ 和它的前 $k-1$ 阶导数的初始值:

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = u_t^{(i)}(x_1, \cdots, x_n, 0) = h_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 0, 1, \cdots, k-1), \tag{2}$$

其中函数 $h_i$ 在 $x$ 空间里是光滑的. 由于 $L[u]$ 是双曲型的, 所以任一定点 $(x_1, \cdots, x_n, t)$ 的依赖区域是有界的. 因此, 不失一般性, 可以假定函数 $g$, $h_i$ 和 $u$ 在 $x$ 空间里某个大球以外恒等于零.

可以把关于 (1) 的问题化为仅具有两个自变量的双曲型方程的问题. 这样一种约化本于对 $x$ 变量中的 $n-1$ 个 (如 $x_2, \cdots, x_n$) 进行积分, 于是, 在上述假定之下, 所有包含对这些变量中任一个的导数的项都消失了. 因此, 剩下的是关于两个自变量的函数

$$U(x_1, t) = \int \cdots \int u \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

的一个微分方程.

更一般的做法是, 选取任一单位矢量

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

并引入一个新的正交坐标系 $y_1, \cdots, y_n$ 来代替 $x_1, \cdots, x_n$, 其中

$$y_1 = (\alpha x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu = p, \tag{3}$$

① 参考 R. Courant and A. Lax [1], 第 501 页.

② 虽然 6.15 里的讨论比这里所给出的更具有普遍性, 但这种方法在这里的解释是较好的, 因为它比较直截了当.

而 $y_2, \cdots, y_n$ 是 $x_\nu$ 的与 $y_1$ 的这个选取相容的其他线性组合. 然后考虑函数 $u$(或别的函数) 在以 $\alpha$ 为法线方向的平面 $p=$常数上的积分. 把这些积分记为

$$I(p,t,\alpha)=I(p,t,\alpha,u)=\iint_{(x\alpha)=p}u(x,t)\mathrm{d}S_\alpha, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{d}S_\alpha$ 是平面的面元. 也可以写

$$I(p,t,\alpha)=\frac{\partial}{\partial p}\iiint_{(x\alpha)\geqslant p}u(x,t)\mathrm{d}x, \tag{4a}$$

其中积分是展布在半空间 $(x\alpha)\geqslant 0$ 上, 或者采用 Dirac 的 $\delta$ 函数而有

$$I(p,t,\alpha)=\iiint u(x,t)\delta((x\alpha)-p)\mathrm{d}x, \tag{4b}$$

其中积分在形式上是展布到整个 $x$ 空间上的. 如果这超平面包含着一个定点 $z$, 则 $p=(z,\alpha)$ 而

$$I(p,t,\alpha)=\iint_{(x-z,\alpha)=0}u\mathrm{d}S_a=\iiint u(x,t)\delta((x-z)\alpha)\mathrm{d}x. \tag{4c}$$

现在, 当 (1) 对 $y_2,\cdots,y_n$ 积分之后, 所有对空间变量的导数除了对 $p$ 的以外都去掉了, 因为 $u$ 和它的导数在无穷远处为零. 这样一来, 就得到关于仅有两个自变量 $p,t$($\alpha$ 是一个参数) 的新的函数 $I(p,t,\alpha)$ 的一个微分方程：

$$L^\alpha[I(p,t,\alpha)]=g(p,t,\alpha). \tag{5}$$

(5) 的右端是

$$g(p,t,\alpha)=I(p,t,\alpha,g(x,t)), \tag{6}$$

而 $t=0$ 时的初始值是

$$\left.\begin{aligned}&I(p,\alpha)=I(p,0,\alpha,h(x)),\\&\cdots\cdots\\&\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}I(p,t,\alpha)=I(p,0,\alpha,h_{k-1}(x)).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

在第 3、5、6 章所给的双曲性的定义的基础上, 容易看出约化的方程 (5) 对于 $\alpha$ 的每一种选择都是双曲型的. 因此, 对于每一个 $\alpha$ 值, (5) 和 (7) 都构成关于未知函数 $I(p,t,\alpha)$ 的一个可解的两个自变量的 Cauchy 问题. 所以, 可以用第 5 章的方法去构造出这些解函数. 假定对于每一个单位矢量 $\alpha$ 都已经完成了这项工作, 并且进一步假定所得的函数 $I(p,t,\alpha)$ 连续地依赖于 $\alpha$[①].

① 后面这个假定是重要的, 有不符合这个假定的情况存在. 然而应当着重指出, 如果预先假定解 $u$ 存在且是连续的而仅着眼于一个表示, 那么这个假定就必然成立而无需说了.

这样, 剩下的问题就是, 如果已经知道了一个函数 $u(x,t)$ 的平面积分 $I^\alpha$, 那么, 如何恢复这个函数的原形[①]. 于此, 进行如下：对于过一定点 $O$ 而以 $z_1,\cdots,z_n$ 为坐标的一切平面 $x\alpha=z\alpha=p$, 作平面积分 $I((z\alpha),t)$, 其中 $(z\alpha)=p$; 然后在单位球 $\alpha^2=1$ 上进行积分. 于是得到一个函数

$$V(z,t)=V(z_1,\cdots,z_n,t)=\iint_{\alpha^2=1} I^\alpha(z\alpha,t)\mathrm{d}\alpha, \tag{8}$$

其中平面积分 $I^\alpha$ 是指平面 $(x\alpha)=(z\alpha)=p$ 上的积分.

于是, $V$ 显然可以表示为 $u$ 的一个加权的空间平均值, 权 $w$ 仅依赖于 $x$ 和 $z$ 之间的距离：$|x-z|=[(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2]^{1/2}=r$,

$$V(z,t)=\iint_{-\infty}^{\infty}\cdots\int u(x_1,\cdots,x_n,t)w(|x-z|)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \tag{9}$$

其中 $w=w(r)$ 是一个正函数. 确切地说,

$$V(z,t)=\omega_{n-1}\int\cdots\int\frac{u(x,t)}{|x-z|}\mathrm{d}x, \tag{10}$$

其中积分是展布在整个空间上的.

为了证明 (10)(又见 6.15.2), 用任一个函数 $f(r)$ 代替 (4) 中的 $u$, 则得

$$I^\alpha=\omega_{n-1}\int_0^\infty r^{n-2}f(r)\mathrm{d}r,$$

其中 $\omega_{n-1}$ 是 $n-1$ 维的单位球的表面积. 再对 $\alpha$ 积分, 则据 (8) 可得

$$V=\omega_n\omega_{n-1}\int_0^\infty r^{n-2}f(r)\mathrm{d}r.$$

另一方面, 由 (9) 知

$$V=\omega_n\int_0^\infty f(r)r^{n-1}w(r)\mathrm{d}r.$$

因为 $f(r)$ 是任意的, 从而推出 $w(r)=\omega_{n-1}\dfrac{1}{r}$.

现在假设空间的维数是奇数. 于是, 把一个叠 Laplace 算子用到 (10) 的两端就不难求得解 $u$, 注意任一个乘幂 $|z-x|^k$ 的 Laplace 式 (对 $z$ 的或者对 $x$ 的) 都只是一个常数 (取决于 $n$ 和 $k$) 与 $|z-x|^{k-2}$ 的乘积, 就得到

$$\Delta^{(n-3)/2}V(x,t)=b_n\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\frac{u(z_1,\cdots,z_n,t)}{|z-x|^{n-2}}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n, \tag{11}$$

其中 $b_n$ 仅取决于 $n$. 第 4 章 4.2 中的 Poisson 积分公式表明, 右端的 Laplace 式是

① 参考 F. John [4], 第 7-13 页.

$$\Delta_x \iint_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{u(z_1, \cdots, z_n, t)}{|z-x|^{n-2}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n = a_n u(z_1, \cdots, z_n, t), \tag{12}$$

其中 $a_n$ 是另一个取决于 $n$ 的常数, 而 $\Delta_x$ 的意思是对 $x$ 取 Laplace 式. 代入 (11) 然后合并常数, 就找到原来的 Gauchy 问题的解的明显表达式如下：

$$u(z,t) = C_n \Delta_z^{(n-1)/2} V(z,t). \tag{13}$$

不难确定因子 $C_n$：

$$C_n = \frac{1}{2(2\pi \mathrm{i})^{n-1}} = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}(-1)^{(n-1)/2}. \tag{13a}$$

(13) 的形式提示, 如果适当地定义 Laplace 算子的分数次幂, 那么它当 $n$ 为偶数时可能也成立. 将不在这个论题上花工夫, 因为总可以由奇的 $n$ 下降到偶的 $n$; 而且在 6.15 中还要给出关于 $x$ 的维数为奇与为偶的更一般的讨论.

最后应当着重指出, 这一节里的方法和结论同样可以适用于双曲型微分方程组：如果 $L[u]$ 是作用在矢量 $u$ 上的一个常系数微分矢算子, 同样 $g$ 也是一个矢量, 那么, 结论在字句上仍然是一样的. 特别地, $L[u]=g$ 可以是一个一阶的或二阶的方程组. 当然. 初始数据必须和 $L[u]$ 的阶数相适应.

### 6.14.2 在解波动方程上的应用

6.14.1 中的方法, 现在将通过重新构造原来在 6.12 中考虑过的波动方程

$$L[u] \equiv \Delta u - u_{tt} = 0 \tag{14}$$

在初始条件

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=\psi(x) \tag{15}$$

下的解而受到检验. 如同在 6.14.1 中指出过的, 无损于一般性, 可以假定 $\phi(x)$ 在 $x$ 空间里某个固定的大球 $S$ 之外恒等于零.

在所说的一切变换后的坐标系 (见 6.14.1) 里, 函数

$$I(p,t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \cdots \int u(p, y_2, \cdots, y_n, t) \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n$$

皆适合同一个微分方程

$$L^{\alpha}[I_{\alpha}] \equiv I_{pp} - I_{tt} = 0 \tag{16}$$

和初始条件

$$I^{\alpha}(p,0)=0, \quad I_t^{\alpha}(p,0) = \chi^{\alpha}(p), \tag{17}$$

其中

$$\chi^{\alpha}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \psi(p, y_2, \cdots, y_n) \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n. \tag{18}$$

(16) 的解是 (见第 1 章 1.7)

$$I^{\alpha}(p,t)=\frac{1}{2}\int_{p-t}^{p+t}\chi(\eta)\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2}\underset{p-t\leqslant\eta\leqslant p+t}{\int\cdots\int}\psi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n. \tag{19}$$

由于 $\psi$ 在 $S$ 外恒等于零, 如果 $\psi$ 是分块光滑的, 那么这个解必连续地依赖于 $\alpha$, 因此可以构成曲面积分

$$V(x_1,\cdots,x_n,t)=\iint\limits_{|\alpha|=1}I^{\alpha}(\alpha\cdot x,t)\mathrm{d}\alpha, \tag{20}$$

并应用叠 Laplace 算子而得到解 $u(x,t)$

$$u(x,t)=C_n\cdot\Delta^{(n-1)/2}V(x,t), \tag{21}$$

其中 $C_n=\dfrac{1}{2(2\pi\mathrm{i})^{n-1}}$.

仅对于奇数的 $n$ 详细说明这一点, 至于 $n$ 为偶数的情况, 可用 J. Hadamard 的降维法予以处理①. 由 (19), (20) 和 (21) 得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=C_n\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\iint\limits_{|\alpha|=1}I^{\alpha}(\alpha x,t)\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{C_n}{2}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\iint\limits_{|\alpha|=1}\mathrm{d}\alpha\iint\limits_{|\alpha\xi|\leqslant t}\psi(x+\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{C_n}{2}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\iint_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\psi(x+\xi)K(\xi,t)\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $K(\xi,t)$ 是由下列曲面积分定义的:

$$K(\xi,t)=\underset{\substack{|\alpha|=1\\|\alpha\xi|\leqslant t}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}\alpha, \tag{23}$$

它的几何意义是 $n$ 维单位球上高为 $2t/|\xi|$ 的球带的表面积.

容易计算, 这个曲面积分的值为

$$K(\xi,t)=\chi\left(\frac{t}{|\xi|}\right), \tag{24}$$

这里函数 $\chi(s)$ 是由下列公式给出的:

$$\chi(s)=\begin{cases}2\omega_{n-1}\displaystyle\int_0^1(1-\lambda^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\lambda=\text{常数}, & \text{当 } |s|>1,\\2\omega_{n-1}\displaystyle\int_0^{|s|}(1-\lambda^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}\lambda, & \text{当 } |s|<1.\end{cases} \tag{25}$$

① 并参考 6.15 中的处理, 它和本节的方法是有关的.

把 (24) 代入 (22), 并把 $\psi$ 在以点 $x$ 为中心而半径为 $r$ 的球面上的平均值写成

$$Q(x,r)=\frac{1}{\omega_n}\iint\limits_{|\xi|=1}\psi(x+r\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{26}$$

则得形式如下的解：

$$u(x,t)=\omega_n\frac{C_n}{2}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int_0^\infty Q(x,r)\chi\left(\frac{t}{r}\right)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

显然完成一次求导后则得

$$u(x,t)=\omega_n\frac{C_n}{2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^\infty Q(x,r)\chi'\left(\frac{t}{r}\right)r^{n-2}\mathrm{d}r,$$

或由 (25) 而得

$$u(x,t)=A_n\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_t^\infty Q(x,r)(r^2-t^2)^{(n-3)/2}r\mathrm{d}r, \tag{27}$$

其中 $A_n=\omega_{n-1}\omega_nC_n$ 仍是一个仅取决于 $n$ 的常数. 与 6.12.2 中一样, (27) 还可以写成

$$u(x,t)=(-1)^{(n-1)/2}A_n\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t Q(x,r)(t^2-r^2)^{(n-3)/2}r\mathrm{d}r. \tag{28}$$

这两个表达式都只通过 $Q$ 和它对 $r$ 的前 $(n-3)/2$ 阶导函数当 $r=t$ 时的值而包含初始函数 $\psi$, 这是与 Huygens 原理一致的.

同 6.12.2 中所述, 由特殊情况 $\psi=1,\ Q=1, u=t$ 决定了常数因子. 于是, 当 $n$ 为奇数时, 得到解

$$u(x,t)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t Q(x,r)(t^2-r^2)^{(n-3)/2}r\mathrm{d}r, \tag{29}$$

正和 6.12.2 中的结果 (16) 一样. 在 6.12,3 中曾经证明过, 这个公式当 $n$ 为偶数时也是对的.

## 6.14′ 在晶体光学方程和其他四阶方程上的应用①

### 6.14′.1 Cauchy 问题的解

依 6.13′, 晶体光学微分方程组的 Cauchy 问题②(见 6.3.3) 容易化为电矢量或磁矢量的每个支量都适合的同一个四阶微分方程的 Cauchy 问题. 这个方程的形式是

$$\tau^2P(\xi,\tau)w(x,t)=0, \tag{1}$$

① 作为对于 G. Herglotz 的原著的一个简要介绍, 可参考 F. John [4].

② 在这一小节里又要采用特定的符号.

其中 $P$ 是符号 $\partial/\partial x_i = \xi_i$ 和 $\partial/\partial t = \tau$ 的一个四次的齐次多项式且 $P(0,\tau) = \tau^4$. 于是 $\tau^2 P = Q$, 这里 $Q$ 是原方程组的特征形, 由方程 (1) 的解恒导出方程

$$P(\xi,\tau)u = 0 \tag{1a}$$

的解, 其中 $u = \tau^2 w$.

在这一小节里, 将解一个颇为一般的 Cauchy 问题, 方程是 (1a), 它是一个四阶方程而不必一定是晶体光学的方程, 初始条件是

$$\tau^\kappa u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \kappa = 0,1,2, \\ f(x), & \text{当 } \kappa = 3, \end{cases} \tag{2}$$

它们是对形式为 (1a) 的任何双曲型方程提出的[1]. 容易看出, (1a) 的具有任意初始数据的 Cauchy 问题和原来的方程组的 Cauchy 问题可以用这些解和它们的导数的适当的组合解决 (参看 6.3′,5).

考虑一个矢量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 和一个标量 $\lambda$, 与 (1) 相应的特征方程是

$$P(\xi,\lambda) = 0. \tag{3}$$

如果 (1) 是双曲型的, 那么对于每一个实的 $\xi$, 方程 (3) 必须有四个实根 $\lambda$. 为简单计, 限于考虑这些根都不相等的情况, 但是允许在有限个单位矢量 $\xi$ 上例外, 不过, 即使在这些例外的 $\xi$ 上也不允许特征根的重数高于 2[2]. 这样, 就能够求出 Cauchy 问题的解的明显表达式来. 反映着晶体光学的特例:

$$P(\xi,\tau) = F(\xi,\tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \rho^2\Phi(\xi), \tag{4}$$

正是适合这些条件的 (见 6.3′.3).

同前所述, 假定 $f(x)$ 在某个球外恒等于零. 变换到变量 $y, y_1 = (\alpha x)$, 发现平面积分

$$I^\alpha(y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int u(y,y_2,y_3,t)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 \tag{5}$$

适合方程

$$P(\alpha\eta,\tau)I^\alpha(y,t) = 0, \tag{6}$$

其中

$$\eta = \partial/\partial y.$$

此外, $I^\alpha$ 还适合初始条件

① 读者会发现, 仿照后面 6.15 中的步骤用 $\delta$ 函数去表达出这些演算, 可能是有用的. 也可以直接用 Fourier 积分的方法去解决这个问题 (参考第 3 章 3.5 和本章 6.12).

② F. John [4] 第二章里曾经证明, 这些限制并不是必须遵守的. 然而, 应当再次指出, 多重特征元素的情况中出现的困难至今尚未完全克服, 所以只好满足于分析问题的一些较特殊的情况.

$$\tau^\kappa I^\alpha(y,0)=\begin{cases}0, & 当\ \kappa=0,1,2,\\ f^\alpha(y), & 当\ \kappa=3,\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$f^\alpha(y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(y,y_2,y_3)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3. \tag{8}$$

把方程 $P(\alpha,\lambda)=0$ 的四个根记为 $\lambda_j=\lambda_j(\alpha)$, 其中 $j=1,\cdots,4$. 由 $P$ 的齐次性容易看出形式如下的任一线性组合

$$I^\alpha(y,t)=\sum_{j=1}^{4}w_j(y+\lambda_j t) \tag{9}$$

(其中 $w_j$ 是任意函数) 皆适合方程 (6). 为了适合 (7), 首先考虑那些使四个根 $\lambda_j$ 彼此都不相等的 $\alpha$. 对于最高次项系数为 1 而有四个不同的根的 $\lambda$ 的任一个四次多项式, 由 Newton 恒等式

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{(\lambda_j)^\kappa}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}=\begin{cases}0, & 当\ \kappa=0,1,2,\\ 1, & 当\ \kappa=3,\end{cases} \tag{10}$$

应该选取

$$w_j=\frac{g^\alpha(y)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}, \tag{11}$$

其中 $g^\alpha(y)$ 是适合

$$\eta^3 g^\alpha(y)=f^\alpha(y) \tag{12}$$

的任一函数. 所以, 在四个根 $\lambda_j$ 都不相等的情形下, (6) 和 (7) 的解是

$$I^\alpha(y,t)=\sum_{j=1}^{4}\frac{g^\alpha(y+\lambda_j t)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}. \tag{13}$$

由 (13), 似乎这个解 $I^\alpha$ 依赖于函数 $g^\alpha$ 的特殊选择. 其实并非如此, 因为 (12) 仅仅允许在 $g^\alpha$ 上加一个 $y$ 的二次函数项, 而 (10) 又保证了当 $g^\alpha$ 增减一个二次函数项时由 (13) 给出的 $I^\alpha$ 的值不受影响.

再者, 定义 (8) 蕴含着对于大的 $|y|$ 值 $f^\alpha(y)$ 关于 $\alpha$ 一致地等于零. 所以, 存在着 (12) 的解 $g^\alpha(y)$ 它们当 $y$ 取大的正值时恒等于零, 并且存在着另一些解, 当 $-y$ 取大的正值时恒等于零. 由于 $I^\alpha$ 不依赖于 $g^\alpha$ 的特殊选取, 所以, 对于任一固定的 $t$ 值和一切 $\alpha$ 值, 当 $|y|$ 充分大时 $I^\alpha(y,t)$ 恒等于零. 由相仿的推理可知, 只要 $\lambda_j$ 保持彼此互不相等, 那么 $I^\alpha$ 就是 $\alpha$ 的一个连续函数.

利用这个连续性, 现在可以对那些相应于重根 $\lambda_j$ 的孤立的 $\alpha$ 值找出 $I^\alpha$. 例如, 假定当 $\alpha$ 取某个特殊的值 $\alpha^*$ 时根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 相等. 那么, 当 $\alpha$ 接近 $\alpha^*$ 时,

$P_\lambda(\alpha,\lambda)=0$ 就有介于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 之间的一个根 $\lambda'$. 因此可以把 (13) 的前两项改写成

$$\frac{g^\alpha(y+\lambda_1 t)-g^\alpha(y+\lambda' t)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_1)}+\frac{g^\alpha(y+\lambda_2 t)-g^\alpha(y+\lambda' t)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_2)} + g^\alpha(y+\lambda' t)\left[\frac{1}{P_\lambda(\alpha,\lambda_1)}+\frac{1}{P_\lambda(\alpha,\lambda_2)}\right].$$

如果对于每一个接近于 $\alpha^*$ 的 $\alpha$ 都这样作, 并且取 $\alpha\to\alpha^*$ 时的极限, 就得到相应于 $\alpha$ 这个特异的值 $\alpha^*$ 的下列函数 $I^\alpha$:

$$I^\alpha(y,t)=\frac{2t\mathrm{h}^\alpha(y+\lambda_1 t)}{P_{\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)}-\frac{2g^\alpha(y+\lambda_1 t)P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)}{3P_{\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)^2}+\sum_{j=3}^{4}\frac{g^\alpha(y+\lambda_j t)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}, \tag{14}$$

其中 $h^\alpha(y)=\eta g^\alpha(y)$.

还须证实这个函数 $I^\alpha$ 适合微分方程 (6) 和初始条件 (7). 直接代入即可证实它适合 (6). 至于 $I^\alpha$ 之所以还适合 (7) 且与 $g^\alpha$ 的选取无关, 则是得自 Newton 恒等式当 $\lambda_2=\lambda_1$ 的极限形式

$$\frac{2\kappa(\lambda_1)^{k-1}}{P_{\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)}-\frac{2(\lambda_1)^k P_{\lambda\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)}{3P_{\lambda\lambda}(\alpha,\lambda_1)^2}+\sum_{j=3}^{4}\frac{(\lambda_j)^k}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}=\begin{cases}0, & \text{当 } \kappa=0,1,2,\\ 1, & \text{当 } \kappa=3.\end{cases} \tag{15}$$

因为按其构造, (14) 连续地接合到 (13) 上, 为保证 6.14.1 的方法合理而需要的一切条件都符合了①.

把 6.14.1 的方法应用于 (10) 并记住 $n=3$, 则得

$$u(x,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\Delta\iint\limits_{|\alpha|=1}I^d(\alpha x,t)\mathrm{d}\alpha=\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_{|\alpha|=1}\left(\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta g^\alpha(\alpha x+\lambda_j t)}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j)}\right)\mathrm{d}\alpha. \tag{16}$$

与 (12) 一致, 如果选取

$$g^\alpha(y)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y}(y-q)^2 f^\alpha(q)\mathrm{d}q, \tag{17}$$

则对于 $|\alpha|=1$ 和任一 $p$ 值皆有

$$\Delta g^\alpha(\alpha x+p)=\int_{-\infty}^{\alpha x+p}f^\alpha(q)\mathrm{d}q, \tag{18}$$

鉴于 (18), 这也就是

① 如果 $\lambda_3$ 重合于 $\lambda_4$, 应该如何修改 (14) 也是显而易见的. 晶体光学方程表现出了这种性状 —— 重根的成双出现.

$$\Delta g^{\alpha}(\alpha x+p)=\iiint\limits_{az\leqslant p} f(x+z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3. \tag{19}$$

把这个表达式代入 (16), 则得

$$u(x,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x+z)K(z,t)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3, \tag{20}$$

其中核函数

$$K(z,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{4}\iint\limits_{\substack{|\alpha|=1\\ az\leqslant\lambda_j(\alpha)t}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha))}. \tag{21}$$

在晶体光学以及更一般地的情况, 只要对于一切实的 $\xi\neq 0$ 皆有 $P(\xi,0)\neq 0$, 则当 $\alpha$ 取任何值时根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 都是正的而 $\lambda_3$ 和 $\lambda_4$ 都是负的. 在任何这种情况下, 相应于微分方程 (1) 的法曲面 $N$, 即曲面

$$P(\xi,1)=0, \tag{22}$$

被发自原点的每一条射线穿过两个 (可能是相重合的) 点. 所以 $N$ 是由两叶 $N_1$ 和 $N_2$ 组成的. 这些曲面叶可以相应地由参数方程给出: $\xi=\alpha/\lambda_1(\alpha)$ 和 $\xi=\alpha/\lambda_2(\alpha)$, 其中参数 $\alpha$ 跑遍单位球面. 按假定, 内叶 $N_1$ 和外叶 $N_2$ 是彼此分离的而仅能有有限个公共点.

考察这个核的某些性质. 首先, 由 (10) 直接推出

$$K(z,0)=0. \tag{23}$$

其次, 如果按递减次序排列根 $\lambda_j(\alpha)$:

$$\lambda_1(\alpha)\geqslant\lambda_2(\alpha)\geqslant\lambda_3(\alpha)\geqslant\lambda_4(\alpha)$$

并注意

$$\lambda_3(\alpha)=-\lambda_2(-\alpha),\quad \lambda_4(\alpha)=-\lambda_1(-\alpha), \tag{24}$$

则不难把 $K$ 化为仅含 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的形式, 即

$$K(z,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\left[\iint\limits_{\substack{|\alpha|=1\\ az\leqslant\lambda_j(\alpha)t}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha))}-\iint\limits_{\substack{|\alpha|=1\\ az\geqslant\lambda_j(\alpha)t}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha))}\right]. \tag{25}$$

### 6.14′.2 解的进一步的讨论. 依赖区域. 隙窝[①]

现在把由 (25) 给定的“基本解”$K$ 由单位球的一部上的积分变换为 $N$ 上的积

① 在 I. G. Petrovskii [3] 里给出了依赖区域内隙窝存在的一般条件.

分. 令 $\mathrm{d}N$ 表示 $N$ 上的面元, 并用 grad $P$ 记其第 $i$ 个支量为 $P_{\xi_i}(\xi,1)$ 的矢量. 由从原点的投影显然可知

$$\mathrm{d}N=|\xi|^2\frac{|\mathrm{grad}P|}{|\alpha\mathrm{grad}P|}\mathrm{d}\alpha. \tag{26}$$

但是由 $P$ 的齐次性质又知对于 $N$ 上的 $\xi$ 有

$$\sum_{i=1}^{3}\xi_iP_{\xi_i}(\xi,1)+P_\lambda(\xi,1)=4P(\xi,1)=0, \tag{27}$$

所以, 对于 $N_j$ 上的 $\xi$ 有

$$\begin{aligned}|\alpha\ \mathrm{grad}P|&=\left|\sum_{i=1}^{3}\alpha_iP_{\xi_i}(\xi,1)\right|=|\xi|^{-1}\left|\sum_{i=1}^{3}\xi_iP_{\xi_i}(\xi,1)\right|\\&=|\xi|^{-1}|P_\lambda(\xi,1)|=|\xi|^2\left|P_\lambda\left(\alpha,\frac{1}{|\xi|}\right)\right|\\&=|\xi|^2P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha))|=\varepsilon|\xi|^2P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha)),\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{当 } \xi \text{ 在 } N_1 \text{ 上},\\ -1, & \text{当 } \xi \text{ 在 } N_2 \text{ 上}.\end{cases}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{P_\lambda(\alpha,\lambda_j(\alpha))}=\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P|}. \tag{29}$$

再者, 当 $j=1$ 或 2 时, 量 $(\lambda_jt-\alpha z)$ 和 $(t-\xi z)$ 的正负相同. 于是 (25) 化为[①]

$$K(z,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_N\frac{\varepsilon\mathrm{sgn}(t-\xi z)\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|}. \tag{30}$$

如果对于 $N$ 上的一切 $\xi$ 皆有 $\xi z\leqslant t$, 那么 $K(z,t)$ 恒等于常数

$$\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_N\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|}. \tag{30a}$$

这个结果发生在当平面 $z\xi=t$ 不与外叶 $N_2$ 相交的时候, 亦即 $z/t$ 位于曲面 $S_2$ 以内的时候. $S_2$ 是 $N_2$ 的凸壳关于单位球的配极对射.

反之, 如果平面 $z\xi=t$ 与内叶 $N_1$ 相交, 那么核 $K(z,t)$ 为零. 为了证明这个结论, 取 $\xi_0$ 为这个平面上落在 $N_1$ 以内的任一矢量. 在 (30) 中令 $\xi=\xi'+\xi_0$. 于是 $K$ 的积分就取在由

$$P(\xi'+\xi_0,1)=0 \tag{31}$$

① 在假定下, 被积分式的奇点是分母的仅只一阶的零点. 所以这个积分收敛.

所给出的 $N'$ 上. 这个曲面是由 $N$ 经过平移而得到的, 所以在相应点上的梯度和面元是相同的, 因而

$$K(z,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_{N}\frac{\varepsilon\mathrm{sgn}(-\xi' z)\mathrm{d}N'}{|\mathrm{grad}P(\xi'+\xi_0,1)|}. \tag{32}$$

但最后这个积分恰好是 $\bar{K}(z,0)$, 这里 $\bar{K}$ 是当把原微分方程 (1) 的多项式 $P(\xi,\lambda)$ 换成

$$\bar{P}(\xi,\lambda)=P(\xi+\xi_0,\lambda) \tag{33}$$

时 (21) 给出的核. 由于 $\xi_0$ 在 $N_1$ 以内, 通过 $N_1$ 的任一直线与 $N$ 相交于四个点. 所以, 对于每个 $\xi$ 值, $\bar{P}$ 都有四个实根. 因此关系 (23) 可以用于 $\bar{K}$. 于是论点得到证明.

由于 $N$ 是一个四次曲面并且任何与 $N_1$ 相交的直线必须与 $N_2$ 至少相交于两点, 所以, 不可能有和 $N_1$ 相交于三点的直线. 因此可知 $N_1$ 是凸的①. 于是可以把前面的结果陈述为如下的形式：若 $z/t$ 落在 $N_1$ 关于单位球的极对射 $S_1$ 以外, 则 $K(z,t)=0$.

回到原来的解 $u(x,t)$, 把点 $(x,t)$ 取为顶点并作轴线指向 $t$ 的后退方向的两叶锥面 $C_1$ 和 $C_2$. 锥 $C_j$ 是由这样一个性质确定的, 即它在距离其顶点为单位远处的截口和 $S_j$ 重合. 显然, $C_2$ 被包含在 $C_1$ 以内. 现在, 从 (20) 可以得到结论：点 $(x,t)$ 的依赖区域正是 $C_1$ 和初始平面的交集的内部. 而且这个区域的属于 $C_2$ 的子集具有这样一个值得注意的性质, 即它的每一个点都对解起同样的作用 (30a).

如果法曲面 $N$ 是对称于原点的 (如同晶体光学方程的情况那样), 那么, 上述结论发生实质上的简化. 在这种情况下,

$$\iint\limits_{\substack{N\\ \xi z\geqslant t}}\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|}=\iint\limits_{\substack{N\\ -\xi z\geqslant t}}\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|}=\iint\limits_{\substack{N\\ \xi z\leqslant -t}}\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|},$$

于是 (30) 导出

$$K(z,t)=\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_{\substack{N\\ |\xi z|\leqslant t}}\mathrm{d}^*N\xi, \tag{34}$$

其中

$$\mathrm{d}^*N=\frac{\varepsilon\mathrm{d}N}{|\mathrm{grad}P(\xi,1)|}$$

叫做法曲面的"准面积"元. 所以"基本解" $K$ 在几何上被解释为 $N$ 的介于两个平行平面 $z\xi=\pm t$ 之间的部分的"准面积"②. 参考图 6-14.

① 这个议论是 6.3 的一点重复.

② 这个名字是 Herglotz 起的, 参考 F. John [4] 第 23 页.

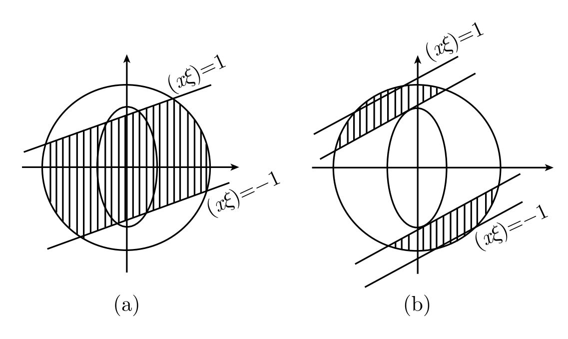



图 6-14

最后提醒注意一个事实：必须把晶体光学四阶微分方程对 $t$ 求导两次, 才能得出六阶微分方程 (1), 它是由 6.3′ 中原方程组 (7) 消去除了电磁矢量的一个支量以外其他一切支量所得的完全的结果. 采取 6.3′ 的方程组 (7a) 的形式去考察时, 不难用施于四阶方程 (1) 的解的微分算子去表出关于这个矢量的 Cauchy 问题的解. 从而可以看到：

射线锥面的内叶 (对应于法锥面的外叶) 对于四阶方程的 Cauchy 问题的解在空间的每一点处提供一个不随时间而变的值.

晶体光学的 Cauchy 问题的在任一点 $x$ 处的解矢量与依赖锥的内叶以内的初始值无关, 内部是一个隙窝[1]. 这个结论是自然的, 其说明了这样一个事实：$x$ 空间里一点 $O$ 处的局部扰动的作用按较快的传播速度到达点 $x$ 而在相当于较慢的特征传播速度的一个时刻终止, 较慢的波前经过之后, 没有任何效应遗留下来.

另一方面, 由前面的演算还不难得出下面的结论：在后向射线锥面的凸壳以内但不在其内核以内的每一个点都给解贡献一份随时间而变的值. 这就是说介于射线锥面的凸壳 $\Gamma$ 和内核之间的整个地区确实构成解及其对时间的导函数的严格的依赖区域.

## 6.15 Cauchy 问题的解作为数据的线性泛函. 基本解

### 6.15.1 说明. 记号

在前几节里和前面第 5 章 5.5 中, Cauchy 问题的解 —— 数据的一个线性泛函, 被表示为一个乘积的积分; 因子之一是由依赖区域里的数据给定的, 另一个因子 ——“核”, 仅依赖于微分算子. 本节要论述的是这种明显的“Riemann 表示”的广泛的推广, 包括任意个自变量和任意阶的线性双曲型初值问题, 且不假定其系数

① 参考 6.15.4.

为常数①. 如果微分方程的阶相对于自变量的个数 (如在晶体光学中或磁流体动力学中) 来说是足够高的, 那么, "核" 是一个普通的函数. 不然的话, 它必须表达为一个分布, 即它是用微分步骤由连续函数得到的②.

着眼于这个 Riemann 核的构造与分析. 如同在第 5 章中一样, 这种表示揭露了 Cauchy 问题的解的精细结构, 这是它的主要意义. 在本节里假定了 Cauchy 问题的解的存在性和唯一性③, 其基础是 6.4, 6.8~6.10, 这几节曾经构造出沿特征曲面具有奇异性的解.

具体地说, 仍旧考虑关于一个函数矢量 $u: u^1, \cdots, u^k$ 的一个 $t \geqslant 0$ 时的一阶双曲型方程组, 其形式为

$$L[u] = u_t + A^l u_i + Bu = f(x,t) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{1}$$

初始条件是 $u(0,x) = \psi(x)$, 其中系数矩阵 $A^l, B$ 和数据 $\psi$ 与 $f$ 都是充分光滑的 (以后将相仿地处理高阶方程组). 可以假定矢量 $\psi$ 和 $f$ 当它们的宗量取大的值时恒等于零. 于是由唯一性定理可知当 $t$ 一定而空间变量 $x$ 取充分大的值时 $u$ 也恒等于零.

出发点是恒等式

$$vL[u] - L^*[v]u = \sum_{i=1} \frac{\partial}{\partial x^i}(vA^i u) + \frac{\partial}{\partial t}(vu). \tag{2}$$

和前边一样, $L^*$ 是 $L$ 的伴随算子. 在长条域 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 上积分 (2), 得到

$$\iint_{0 \leqslant t \leqslant \tau} (vL[u] - L^*[v]u) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t=T} vu\mathrm{d}x - \int_{t=0} vu\mathrm{d}x. \tag{3}$$

只要 $u$ 或 $v$ 或两者当 $|x|$ 值大时恒等于零, 那么这个结果就成立. 如果用 $L^*[v] = 0$ 的一个解代替 $v$, 且 $L[u] = f$, 那么 (3) 就化为

$$\int_{t=\tau} vu\mathrm{d}x = \int_{t=0} vu\mathrm{d}x + \iint_{0 \leqslant t \leqslant \tau} vf\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3a}$$

为了启发起见, 即使被积分式是分布, 也应用 (3). 以后将证明对于本节中所考虑的分布, 这个步骤是正确的④. 特别地, 对于 $\tau$ 下边的带域, 取 $v$ 为适合

$$L^*[R] = 0, \quad 当\ t < \tau \tag{4}$$

① 对于单个的二阶方程的这种表示是 Hadamard 的著名理论的主题 (见 6.15.6). P. D. Lax 首先注意到一般情况. 见 R. Courant and P. D. Lax [2].

② 前边三维空间波动方程的沿着射线锥面具有奇异性的解 $\delta(t-r)/r$(见 6.12) 表明了分布在多于两个自变量的情况里的作用.

应当指出, 分布的应用虽然方便而巧妙, 但是也可以避而不用它, 例如在 6.12, 6.13, 6.14 中和在 R. Courant and P. D. Lax [2] 中.

③ 但应参考 6.15.7 末的注记.

④ 顺便指出, 可以把 (3a) 作为广义解的一个抽象定义.

的一个矩阵 $R(x,t;\xi,\tau)$, 它在 $t=\tau$ 上取得“终端值”

$$R(x,\tau;\xi,\tau)=\delta(x-\xi)I. \tag{4a}$$

这里 $\delta$ 是 $n$ 维的 $\delta$ 函数, $I$ 是单位矩阵. 这样选取 $v$ 之后, (3a) 就化为

$$u(\xi,\tau)=\int R(x,0;\xi,\tau)\psi(x)\mathrm{d}x+\iint_{0\leqslant t\leqslant\tau}R(x,t;\xi,\tau)f(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中 $\psi(x)$ 是 $u(x,t)$ 的初始值.

对于齐次方程, 即当 $f=0$ 时, 以 $\psi(\tau_0,x)=\psi(x)$ 为初始值则得

$$u(\xi,\tau)=\int R(x,\tau_0;\xi,\tau)\psi(x)\mathrm{d}x, \tag{5a}$$

利用 Duhamel 原理 5a 又可以复原出 (5).

相仿地, 也可以引入一个矩阵 $S(x,t;\xi_1,\tau_1)$ 去代替 $u(x,t)$, 这个矩阵在 $t=\tau_1$ 以上的带域上适合方程

$$L[S]=0\quad(t>\tau_1) \tag{6}$$

和 $t=\tau_1$ 时的初始条件

$$S(x,\tau_1;\xi_1,\tau_1)=\delta(x-\xi_1)I. \tag{6a}$$

在长条域 $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau$ 上积分 (2), 则形式上得到

$$\int R(x,\tau;\xi,\tau)S(x,\tau;\xi_1,\tau_1)\mathrm{d}x-\int R(x,\tau_1;\xi,\tau)S(x,\tau_1;\xi_1,\tau_1)\mathrm{d}x=0.$$

利用 (4a) 和 (6a), 得到**对称律**

$$S(\xi,\tau;\xi_1,\tau_1)=R(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau). \tag{7}$$

表示式 (5) 蕴含着 $R$ 作为 $\xi$ 与 $\tau$ 的函数是相应于微分算子 $L$ 的一个基本解:

$$L_{\xi,\tau}[R(x,t;\xi,\tau)]=\delta(x-\xi,t-\tau). \tag{8}$$

相仿地有

$$L^*_{\xi_1,\tau_1}[S(x,t;\xi_1,\tau_1)]=\delta(x-\xi_1,t-\tau_1). \tag{9}$$

这里右端是 $n+1$ 维的 $\delta$ 函数. 于是, $R(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)$ 表示由位于 $(\xi,\tau)$ 的点源产生的后向辐射在 $(\xi_1,\tau_1)$ 处的效应, 而 $S(\xi,\tau;\xi_1,\tau_1)$ 表示由位于 $(\xi_1,\tau_1)$ 的点源产生的前向辐射在 $(\xi,\tau)$ 处的效应. 对称律断定, 如果前向辐射受算子 $L$ 的支配而后向辐射受算子 $L^*$ 的支配, 那么这两个效应是相等的.

在 6.15.2 中将构造出 $R$ 来并且证明相应的方法. 此外, 还将证明 $R$ 的两个重要性质: 第一, $R(x,t;\xi,\tau)$ 除了沿着由 $(\xi,\tau)$ 发出的双特征射线以外是正则的; 第二,

$R(x,t;\xi,\tau)$ 在 $(\xi,\tau)$ 的依赖劈锥外部恒等于零. 因此, 在 $L[u]=f$ 和 $u(0,x)=\psi(x)$ 的解的表达式 (5) 中的积分不需要扩展到由 $P(\xi,\tau)$ 向后发出的依赖劈锥 $\Gamma_P$ 的外边去.

对高阶 ($m$ 阶) 的微分算子 $L[u]$, 情况是很相仿的. 照旧, Riemann 的辐射核 $R$ 或 $S$ 都可以由相当于 (4a) 或 (6a) 的简单的初始条件表征出来, 其中仅包含着空间变量的 $\delta$ 函数[①]. 例如 $m=2$ 时,

$$\left.\begin{aligned}&L^*[R]=0, && &&\text{当 } t<\tau,\\ &R=0, && R_t=\delta(x-\xi), &&\text{当 } t=\tau;\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&L[S]=0, && &&\text{当 } t>\tau,\\ &S=0, && S_t=\delta(x-\xi), &&\text{当 } t=\tau.\end{aligned}\right\}\tag{10a}$$

于是 (5) 表示相应于初始值

$$u(0,x)=0,\quad u_t(0,x)=\psi(x)$$

的解. 如果 Cauchy 数据 $u,u_t,\cdots$ 是任意给定的, 那么, 应用 Green 公式同样不难表示出相应于初始值的解. 对于任意的 $m$ 无需再加说明了.

### 6.15.2 借助于 $\delta$ 函数的分解来构造辐射函数

代替 6.15.1 中的启发性的议论, 现在来直接构造出 Riemann 矩阵 $R$(或者 $S$ 也是一样). 基本想法是把 $R$ 的点奇异性化为比较容易处理的展布在特征曲面上的奇异性, 然后应用在 6.4 中关于这种奇异性所阐述的 Cauchy 问题的理论.

设 $\alpha$ 为 $n$ 维空间里的任一单位矢量, $\delta$ 是一维的 $\delta$ 函数. 来解决 $t<\tau$ 时的向后的 Cauchy 问题:

$$L^*[V(x,t;\xi,\tau;\alpha)]=0,$$

终端条件是

$$V(x,\tau;\xi,\tau;\alpha)=\delta((x-\xi)\cdot\alpha)I.$$

如果

$$L[u]=0\quad(t>0)$$

且 $u(x,0)=\psi(x)$, 那么 (3a) 蕴含着

$$I(\xi,\tau;\alpha;u)=\int u(x,\tau)\delta((x-\xi)\cdot\alpha)\mathrm{d}x=\int V(x,0;\xi,\tau;\alpha)\psi(x)\mathrm{d}x.$$

① 顺便指出, 由唯一性可知, 初始条件或终端条件从一切基本解中唯一地挑选出来辐射函数.

这个公式用 $u$ 的初始值表达出了在 6.14 中定义的平面积分 $l$. 可以从 $u$ 的平面积分按照 6.14 复原出 $u$, 于是也就间接地得到了 $R$ 的表达式.

更好的是一个稍微不同而巧妙的办法, 它概括了 $n$ 值为偶数或奇数两种情况, 其基本想法是用 6.11.1 中的公式 (11) 把 $n$ 维的 $\delta$ 函数 $\delta(x)$ 分解为平面波. 于是可以用适合微分方程 $L^*_{x,t}[U]=0$ 而在 $n$ 维平面 $t=\tau$ 上有较简单的终端条件

$$U(x,\tau;\xi,\tau)=\log^{(n)}((x-\xi),\alpha)I$$

($\alpha$ 是任意的单位矢量) 的函数 $U(x,t;\xi,\tau;\alpha)$ 的叠加来组成函数 $R(x,t;\xi,\tau)$(它是由同一微分方程 $L^*_{x,t}[R]=0$ 和终端条件 $R(x,\tau;\xi,\tau)=\delta(x-\xi)$ 所表征的).

这些函数 $U(x,t;\xi,\tau;\alpha)=U(\alpha)$ 是用 6.4 的方法构造出的. 视 $U(\alpha)$ 为已知函数, 于是立即找到了所求的 $R$ 的表示式

$$R(x,t;\xi,\tau)=\frac{-1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{\alpha^2=1}U(x,t;\xi,\tau;\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{11}$$

当然, 对于伴随 Riemann 矩阵 $S$ 可以写出一个类似的公式. 用 6.4 的方法构造出函数 $V(x,t;\xi,\tau;\beta)$, 其中 $\beta$ 是一个任意的单位矢量, 这个函数当 $t=\tau_0$ 时适合初始条件

$$V(\beta)=V(x,t;\xi,\tau;\beta)=\log^{(n)}(x-\xi,\beta)I$$

且当 $t>\tau_0$ 时适合微分方程 $L_{x,t}[V]=0$. 于是

$$S(x,t;\xi,\tau)=\frac{-1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{\beta^2=1}V(\beta)\mathrm{d}\beta. \tag{11a}$$

公式 (11) 和 (11a) 表达了一般结果. 当然, 追溯导致 6.11.1 的表示式 (11) 的那些步骤, 还可以用符号较少的语言把这个结果写出来. 利用 Laplace 算子, 可以把边界值 $\log^{(n)}(\alpha(x-\xi))$ 表达如下：

$$\log^{(n)}((x-\xi)\cdot\alpha)=\Delta_\xi^{(n+2)/2}\log^{(-2)}((x-\xi)\cdot\alpha) \qquad (n\ 为偶数),$$

$$\log^{(n)}((x-\xi)\cdot\alpha)=\Delta_\xi^{(n+3)/2}\log^{(-3)}((x-\xi)\cdot\alpha) \qquad (n\ 为奇数),$$

其中函数 $\log^{(-2)}$ 和 $\log^{(-3)}$ 都是连续而可微的函数. 于是可以借助作用到连续可微矩阵的积分上的关于 $\xi$ 的叠 Laplace 算子去表示 $U$ 并从而去表示 $R$.

用对连续函数的求导去表达广义函数的表达式还可以用来证明互易关系 (7), 在 (3) 中作代换 $v=V(\beta)$ 和 $u=U(\alpha)$ 并把 $t=0$ 换成 $t=\tau_1$ 就推出这个结果. 由于 $U(\alpha)$ 和 $V(\beta)$ 是关于两个不同变量的分布, 这个代换的确是无可非议的. 然后对 $\alpha$ 和 $\beta$ 积分就立即得出对称律 (7).

应当注意, $L$ 的阶愈高则 $U$ 的初始值的正则性愈高, 因而 Riemann 矩阵本身的正则性也愈高. 由这个道理, 例如, 可以说晶体光学的四阶微分方程的 Riemann 矩阵就是一个普通的函数而无需解释为分布.

最后应当指出, 6.8.9 或第 3 章附录III的唯一性理论蕴含着 Riemann 矩阵在从奇异的终点或始点发出的依赖劈锥之外恒等于零. 的确, 唯一性定理保证了, 例如, 函数 $S$ 在 $xt$ 空间的一切其依赖区域不包含奇异点的那些点上皆等于零.

如果 $L$ 是一组高阶算子, 上述理论也几乎逐字逐句地成立. 例如, 考虑二阶方程组

$$L[u] \equiv u_{tt} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} A^{\nu\mu} u_{\nu\mu} + \sum_{u=0}^{n} A^{\mu} u_{\mu} + Bu.$$

这时辐射矩阵 $R(x,t;\xi,\tau)$ 是由下列条件决定的,

$$L[R] = 0, \quad 当\ t > \tau, \tag{12}$$

$$R(x,\tau;\xi,\tau) = 0, \tag{13}$$

$$R_t(x,\tau;\xi,\tau) = \delta(x-\xi)I, \tag{13a}$$

并且可以按照和一阶方程组的情况完全一样的方法去构造.

### 6.15.3 辐射矩阵的正则性

由前面的那些结论的符号形式, 不难引出一些重要的特殊性质① 和解的具体的表达式. 在这一小节里要证明矩阵 $R$ (并因而 $S$) 是一个分布, 它的奇异性仅仅集中在过顶点 $P$ 的射线劈锥面上, 而在其他地方是一个连续函数并且具有和算子 $L$ 的正则性相应的各阶连续的导函数②.

为简明计, 考虑一阶方程组 (1) 并假定系数 $A$ 和 $B$ 具有所需要的任何阶的连续导函数. 证明: 在不能被发自顶点 $P(\xi,\tau)$ 的任一特征射线达到的一切点 $(x,t)$ 处, 辐射函数 $R$ 和 $S$ 是正则的, 即具有所需的任何阶的连续导函数.

需要讨论形式如下的一个积分

$$R(x,t;\xi,\tau) = \int_{|\alpha|=1} U(x,t;\xi,\tau;\alpha)\mathrm{d}\alpha. \tag{14}$$

$U$ 的奇异部分是由形式为③

① 应注意下述的事实. 如果在射线锥面里有孤立的或多重的射线, 那么 6.15.2 中某些相应的陈述需要修改. 对于多重特征, 辐射矩阵在射线劈锥面以及其壳罩上奇异性的一般分析尚未成功; 人们只好个别地研究特殊类型的例子, 在前边就是默契去那样做的. 至于在这方面最近的进展应参考 D. Ludwig [3] 和 J. Leray [3].

② 稍微修改下面的议论即可证明, 如果方程的系数是解析的, 那么 $R$ 和 $S$ 除了在射线劈锥面上之外也是解析的. 参考 D. Ludwig 的即将发表的论文.

③ 这里, 字母 $S$ 的意义与 6.15.1, 6.15.2 中不同.

$$S_i(\phi(x,t;\xi,\tau;\alpha))g_i(x,t;\xi,\tau;\alpha) \tag{15}$$

的项的和式组成的, 其中 $S=S_i$ 是变元 $\phi$ 的一个广义函数, 它在原点有奇异性, 并且 $g=g_i$ 对于它的一切变元来说都是正则的. 只要检验形式为

$$K=\int_{|\alpha|=1} S(\phi(x,t;\xi,\tau;\alpha))g(x,t;\xi,\tau;\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{16}$$

的一个单项的光滑性就行了.

固定 $(x,t;\xi,\tau)$ 并考虑由球 $|\alpha|=1$ 上适合方程

$$\phi(x,t;\xi,\tau;\alpha)=0$$

的一切点构成的集合 $\Omega$. $\Omega$ 是列紧的, 因而下列两种情况之一必成立：或者 (a)$\phi$ 对于球上的坐标的梯度在 $\Omega$ 的某点 $(x,t)$ 处等于零, 或者 (b)$\phi$ 对于球上的坐标的梯度在 $\Omega$ 的每个点处的模都大于一个正数.

如果情况 (a) 发生了, 那么 $(x,t)$ 是过 $(\xi,\tau)$ 而方程为

$$\phi(x,t;\xi,\tau;\alpha)=0$$

的特征曲面的包络上的一个点. 一阶偏微分方程的理论证明了这个包络必包含通过 $(x,t)$ 的一条射线. 这条射线和平面 $t=\tau$ 相交于一个点 $P$, 在这个点上有

$$\phi(x,\tau;\xi,\tau;\alpha)=(x-\xi)\cdot\alpha.$$

平面族 $(x-\xi)\cdot\alpha=0$ 的包络的仅有的点是 $x=\xi$. 于是 $P=(\xi,t)$, 并且 $(x,t)$ 和 $(\xi,\tau)$ 是在同一条射线上. 得到结论：仅当 $(x,t)$ 和 $(\xi,\tau)$ 处于同一条射线上时才发生情况 (a).

如果情况 (b) 发生了, 那么可以引入 $\phi$ 作为在球上 $\Omega$ 的每个点处的局部坐标. 于是可以把 (3) 中的积分区域分裂为一些子域, 使得在每个子域上或者 $\phi$ 是一个局部坐标, 或者 $|\phi|$ 大于一个正数. 在后一类子域上被积分式是光滑的, 因而在这类子域上的积分也是光滑的. 在前一类子域上, $\phi$ 是局部坐标, 可以对 $\phi$ 实行任意多次的分部积分. 通过重复地分部积分, 可以得到具有任意程度光滑的表达式. 因此, 如果情况 (b) 发生了, $K$ 是 $(x,t)$ 的一个光滑函数.

于是已经证明了如下的两岐命题, 或者 $(x,t)$ 和 $(\xi,\tau)$ 位于同一条射线上, 或者 $R(x,t;\xi,\tau)$ 既是 $x,t$ 的一个光滑函数也是 $(\xi,\tau)$ 的一个光滑函数[①].

### 6.15.3′　广义 Huygens 原理

6.15.3 的结果说明了一个事实, 它对于双曲型方程组作为传播信号的模型的作用是非常重要的 (并参考 6.18). 在各处 (如本章 6.12 和 6.18) 讨论过的古典

① 如果 $L[u]$ 的系数具有各阶导数, 那么 $R$ 也有各阶导数.

的"Huygens 原理"断言清晰的信号经过传播仍是清晰的信号, 即代表在时刻 $t=0$ 发出的信号的传播的微分方程的解仅取决于依赖劈锥的边界上的数据, 而和其内部的数据无关. 这个原理仅在一些很例外的情况下才成立, 主要地是仅对于 3, 5, 7, $\cdots$ 维空间的波动方程成立. 不过, 6.15.3 的结果可以解释为广义的 Huygens 原理[①]. 它声称, 在一种近似的意义上 (就这点而论通常是令人满意的), 任一双曲型方程组的确都保持信号是清晰的, 虽然一般说来多少有些模糊.

首先陈述：如果通过 $P$ 的一切射线与初始流形 $(t=0)$ 相交于一个闭域 $G^*$ 内而在 $G^*$ 上的初始数据是光滑的, 那么, 方程组 (1) 的解 $U(P)$ 在点 $P$ 的邻域上是光滑的.

更确切地说：假定 $L[U]$ 的系数是充分光滑的, 并且初始数据及其直到 $r$ 阶的导数在上述的域 $G^*$ 上是有界的, 那么, 解 $u$ 和它的直到 $r$ 阶的导数在上述点 $P$ 也是有界的, 它的界依赖于 $t$ 的界和初始值的界.

还可以在如下的一般意义[②]上来描述 Huygens 原理：解 $u$ 在点 $P$ 处的奇异性仅依赖于初始数据的奇异性而且仅只是那些出现在以 $P$ 为顶点的射线劈锥面上的数据的奇异性.

如果对于初始数据作一些特殊的假设, 那么还可以把这个原理表达得更明确些. 例如, 假设这些数据除了沿着一条光滑的曲线 $C$ 有跳跃性间断以外是光滑的. 那么, 除了以 $P$ 为顶点的射线劈锥面与 $C$ 相切的那些点 $P$ 外, $u(P)$ 处处都是光滑的. 如果劈锥面与 $C$ 有高度的接触, 那么就发生"焦散", 并且一般地说, 解的光滑程度较初始数据的光滑程度低[③]. 笼统地说, 广义 Huygens 原理断定, 解对于初始间断性 (或者其他不正则性, 例如数值的剧烈变化) 沿着特征射线的传播是特别敏感的[④].

### 6.15.4 例子. 特殊的常系数线性方程组. 隙窝定理

考察一个方程组 (1), 其系数为常数且 $B=0, f=0$. 这时, 由 6.4.6 可以求得解 $U(x,t;\xi,\tau;\alpha)$, 它仅仅是 $k$ 个平面波的叠加, 而这些平面波即简化为前进波展开式：

$$U(\alpha)=\sum_{\kappa=1}^{k}\sigma^{\kappa}r^{\kappa}\log^{(n)}(\lambda^{\kappa}t+\alpha x)$$

的首项 (假定 $\xi=0$), 其中 $\lambda^{\kappa}=\lambda^{\kappa}(\alpha)$ 表示矩阵 $\lambda-\sum A^{\nu}\alpha_{\nu}$ 的本征值 (法速率)(见 6.3), $r^{\kappa}$ 是这个特征矩阵的右本征矢量, 并且标量 $\sigma^{\kappa}$ 是按 6.4.6 确定的. 若 $n$ 为奇

① 被 P. D. Lax 指出, 参考 R. Courant and P. D. Lax [2] 和 P. D. Lax [4].

② 如前所说, 在多重特征元素的情况, 陈述是需要修改的.

③ 参考 D. Ludwig [1].

④ 如果用光滑函数对于一个变量 $\phi$ ($\phi=0$ 是特征劈锥面的外罩) 的导函数表达核 $R$, 那么, $u$ 对于初始值的依赖性是容易分析的. 这时, 重复进行分部积分就去掉了核的奇异性而引入初始值的相应的导数.

数, 则 $U(\alpha)$ 是与

$$\sum_{\kappa}\sigma^{\kappa}r^{\kappa}\delta^{(n-1)}(\lambda^{\kappa}t+\alpha x)$$

成正比的. 对 $\alpha$ 积分就得到 Riemann 的基本解. 现在假定速率 $\lambda^{\kappa}$ 都不等于零并且 $x/t$ 是在射线锥面的内核之中, 那么基本解在这个核内显然恒等于零, 因为函数 $\delta^{(n-1)}(\lambda^{\kappa}t+\alpha x)$ 对于这个核内的每个 $\alpha$ 值都恒等于零.

于是得到值得注意的定理：对于奇数维空间里的常系数方程 (1), 其中 $B=0$ 且具有处处不等于零的传播速度, 射线锥面的内核描绘一个隙窝, 即它在严格的意义上不属于其顶点的依赖区域.

即使速率 $\lambda^{\kappa}$ 之中有的等于零, 只要相应的因子 $\sigma^{\kappa}$ 也等于零, 这个定理的结论仍然成立. 在晶体光学的情况下容易判明 (见 6.14.2), 只要满足散度条件, 这个论断就是正确的.

### 6.15.5　例子. 波动方程

6.15.2 的一般理论包括着像前几节里明显地找到了的那些 Cauchy 问题的解为其特例. 所以不难把 6.14, 6.14′ 的表示和本节的等同起来. 在此仅限于考察不多几个简单的例子. 首先考虑波动方程的问题.

当然, 如果在 6.12 的公式 (48) 和 (49) 中用 Dirac 函数 $\delta(\lambda)$ 代替 $g(\lambda)$, 那么这些公式立即就派生出 $R$ 或 $S$ 的一个明显表达式. 由于波动算子的自伴性质, 这两个函数是相同的.

但是, 要从 6.15.2 的一般表示 (11) 来推出这些表达式或者与其等价的表达式.

设 $S^{(n)}$ 是具有 $n+1$ 个自变量 $x^1,\cdots,x^n,t$ 的波动方程的 Riemann 函数. 分布 $S^{(n)}(x,t;\xi,\tau)$ 适合下列条件：

$$S_{tt}^{(n)}-\sum_{\nu=1}S_{\nu\nu}^{(n)}=0\quad(t>\tau),\tag{17}$$

$$S^{(n)}(x,\tau;\xi,\tau)=0,\tag{18}$$

$$S_t^{(n)}(x,\tau;\xi,\tau)=\delta(x-\xi).\tag{19}$$

由于波动算子是常系数的, 不失一般性, 可以令 $\tau=0,\xi=0$. $S^{(n)}$ 可以表达成下面的形式

$$S^n(x,t)=\frac{-1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\alpha|=1}V^{(n)}(x,t;\alpha)\mathrm{d}\alpha,\tag{20}$$

其中 $V^{(n)}$ 适合下列条件：

$$V_{tt}^{(n)}-\sum_{\nu=1}V_{\nu\nu}^{(n)}=0\quad(t>0),\tag{21}$$

$$V^{(n)}(x,0;\alpha)=0, \tag{22}$$

$$V_t^{(n)}(x,0;\alpha)=\log^{(n)}(x,\alpha). \tag{23}$$

这里 $\log^{(n)}$ 是对数函数的 $n$ 阶导数, 按分布的意义去理解它.

显然,

$$V^n(x,t;\alpha)=\frac{1}{2}[\log^{(n-1)}(t+x\cdot\alpha)-\log^{(n-1)}(-t+x\cdot\alpha)]. \tag{24}$$

于是

$$S^{(n)}(x,t)=\frac{-1}{2(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|\alpha|=1}[\log^{(n-1)}(t+x\cdot\alpha)-\log^{(n-1)}(-t+x\cdot\alpha)]\mathrm{d}\alpha. \tag{25}$$

6.11 的公式 (4) 蕴含着当 $n\geqslant 2$ 时

$$S^{(n)}(x,t)=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{-1}[\log^{(n-1)}(t+rp)-\log^{(n-1)}(-t+rp)](1-p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p, \tag{26}$$

其中 $\omega_{n-1}=\dfrac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$ 且 $r=|x|$. 略微更动记号, 可以把 $S^{(n)}$ 作为 $r$ 和 $t$ 的函数.

微分 (26), 则得

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-\omega_{n-1}}{2(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{-1}^{1}[\log^{(n)}(t+rp)-\log^{(n)}(-t+rp)]p(1-p^2)^{(n-3)/2}\mathrm{d}p. \tag{27}$$

现在可以分部积分之; 由于积分区间的两端对结果无所贡献, 所以

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial r}=\frac{-r\omega_{n-1}}{(n-1)\cdot 2\cdot(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{-1}^{1}[\log^{(n+1)}(t+rp)-\log^{(n+1)}(-t+rp)](1-p^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}p. \tag{28}$$

简单的演算表明①

$$S^{(n+2)}=\frac{-1}{\pi}\frac{\partial S^{(n)}}{\partial(r^2)}. \tag{29}$$

所以, 一旦知道了 $S^{(2)}$ 和 $S^{(3)}$, 就可以递推出 $S^{(n)}$. 由 (25) 知,

$$S^{(2)}=\frac{-1}{2(2\pi\mathrm{i})^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|w|=1}[\log(x\cdot\omega+t)+\log(x\cdot\omega-t)]\mathrm{d}\omega. \tag{30}$$

引入 $\theta$ 作为单位圆上的一个角度坐标, 则

$$S^{(2)}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}[\log|r\cos\theta+t|+\log|r\cos\theta-t|]\mathrm{d}\theta. \tag{31}$$

① 参考 6.12.

由一个熟知的积分公式可找到

$$S^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (t^2 > r^2). \tag{32}$$

可以用 $\delta$ 函数的分数次积分去表达 $S^{(2)}$. 由定义立即得到

$$S^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \delta^{(-1/2)}(t^2 - r^2). \tag{33}$$

由等式 (26) 几乎立即得出 $S^{(3)}$, 其结果是

$$S^{(3)} = \frac{-2\pi}{2(2\pi \mathrm{i})^3} \int_{-1}^{1} [\log^{(2)}(rp + t) - \log^{(2)}(rp - t)] \mathrm{d}p. \tag{34}$$

另一方面, 由定义得知在实轴上

$$Im \log z = \pi(1 - \eta(z)), \tag{35}$$

其中 $\eta$ 是 Heaviside 函数. 所以

$$Im \log^{(2)} z = -\pi \delta'(z), \tag{36}$$

并且

$$S^{(3)} = \frac{-1}{2(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \pi[\delta'(rp + t) - \delta'(rp - t)] \mathrm{d}p. \tag{37}$$

即

$$S^{(3)} = \frac{1}{4\pi r} (\delta(t - r) - \delta(t + r)). \tag{38}$$

由 $\delta$ 函数的定义可知

$$\delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{2r} [\delta(t - r) - \delta(t + r)]. \tag{39}$$

所以

$$S^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \delta(t^2 - r^2). \tag{40}$$

利用 (29), (33) 和 (40), 可得

$$S^{(n)} = \frac{1}{2\pi^{(n-1)/2}} \delta^{(\frac{n-3}{2})}(t^2 - r^2). \tag{41}$$

公式 (41) 对于一切 $n$ 值都表示出了解[①]. 特别是当 $n$ 等于 3 或是大于 3 的奇数时, $S^{(n)}$ 除了在锥面 $t^2 - r^2 = 0$ 上以外恒等于零. 这是 Huygens 原理的严格形式.

① 这个公式是 I. M. Gelfand and G. E. Shilov [1] 中 288 ~ 290 页上推导出来并讨论了的. 自然, 其与 6.12 中的结果是等价的, 特别是和 6.12 里的表达式 (14) 与 (5) 等价.

### 6.15.6 例子. 关于单个二阶方程的 Hadamard 的理论

Cauchy 问题的现代理论大部分是在 Hadamard 的关于二阶双曲型方程的先驱工作①的启发下发展起来的. 虽然本章中由于分布的应用和其他特点能采取更广泛而简捷的讲法, 但是 Hadamard 方法的基本思想仍是本节中许多讨论的基础, 所以在此仍将扼要地予以回顾, 即使是把 6.15.2, 6.15.3 两小节的理论用之于单个的二阶方程的情况也就足以概括 Hadamard 的理论的主要内容了。

Hadamard 的成就首先在于基本解的构造. 他的构造法是直接进行的而并未利用下述的简化, 即在 6.15.2 中所作的先把 $n$ 维的 $\delta$ 函数分解为一些平面波而后在一个单位球上进行积分. 其次, Hadamard 那时尚无广义函数这个工具可用, 其利用了发散积分的“有限部分”去计算诸如 $\int_a^b [A(x)/(b-x)^{3/2}]\mathrm{d}x$ 之类的积分, 其中被积分式不是被解释为理想函数而是通常的函数. 这里将不在“积分的有限部分”这个概念上花工夫 (不过, 可参看附录), 因为, 利用广义函数确实可以免除它. 代替它给出基本解的 Hadamard 构造法的一个修改了的阐述.

在波动方程所得结果 (见 6.15.4) 的导引之下, 考虑一个一般的解析的二阶方程

$$L[u]=\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=0}^{n}b_iu_i+cu=0. \tag{42}$$

来寻求沿着射线劈锥面

$$\varGamma(x,\xi)=0$$

具有奇异性的那些解, $\varGamma(x,\xi)$ 表示在方程所规定的 Riemann 尺度下 $x$ 与 $\xi$ 之间距离的平方, $\varGamma$ 适合方程

$$\sum_{i,k=0}^{n}a_{ik}\varGamma_i\varGamma_k=4\varGamma, \tag{43}$$

因而仅在射线劈锥面上适合特征方程②.

类似于 6.4 的方法, 试求 $L[u]=0$ 的形式为

$$u(x,\xi)\approx\sum_{\nu=0}^{\infty}S_\nu(\varGamma)g^\nu(x,\xi) \tag{44}$$

的一个解, 其中 $S_\nu(\varGamma)$ 对于一切 $\nu$ 值皆适合

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varGamma}S_\nu(\varGamma)=S_{\nu-1}(\varGamma); \tag{45}$$

① 参考 J. Hadamard[2].

② 参考 6.1 和第 2 章 2.9.

分布 $S_0(\Gamma)$ 和函数 $g^\nu(x,\xi)$ 即将予以说明. 应当指出 Hadamard 法与 6.4 的方法之间的几点不同之处. 第一, 由于 $l$ 并非无条件适合特征方程, 所以系数 $g^\nu(x,\xi)$ 将依赖于 $S_0$ 的选取. 第二, 曲面 $\Gamma=0$ 在射线劈锥面 $(x=\xi)$ 的顶点处有奇异性. 这些奇异性在 6.4 中是未予考虑的.

在此, 经过一些计算之后, 顶点处的奇异性引出在 $\Gamma=0$ 上的条件

$$\Gamma S_{-2}(\Gamma)+\left(\frac{n+1}{2}\right)S_{-1}(\Gamma)=0; \tag{46}$$

如果要求 (46) 对于一切 $\Gamma$ 值皆成立, 那也无损于一般性. 于是, 可以用非常相似于 6.4 中的方法把系数 $g^\nu(x,\xi)$ 作为沿着由顶点 $x=\xi$ 发出的测地线的常微分方程的解而求出来. 由 $g^\nu$ 在顶点 $x=\xi$ 处的正则性条件可以确定出函数 $u$, 但是留下一个未定的常数因子.

确定了表达式 (44) 中的一切系数之后, 可以进行并项. 仅利用方程 (45) 和 (46) 就可得到

$$\frac{\mathrm{d}^\nu}{(\mathrm{d}\Gamma)^\nu}(\Gamma S_{\nu-2}(\Gamma))=\Gamma S_{-2}+\nu S_{-1}=\left(\nu-\frac{n+1}{2}\right)S_{-1}. \tag{47}$$

适当地选取积分常数, 则有

$$\Gamma S_{\nu-2}=\left(\nu-\frac{n+1}{2}\right)S_{\nu-1}\quad(\nu=1,\cdots). \tag{48}$$

令 $\mu=(n-1)/2$, 由此可得

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\cdots(\nu-\mu)}S_0(\Gamma), \tag{49}$$

只要其分母不为零. 然而, 若 $n$ 为奇数, 则分母当 $\nu=\mu$ 时为零, 这时引入一个适当的广义函数

$$T(\Gamma)=S_\mu(\Gamma), \tag{50}$$

其意义有待下面进一步说明. 于是, 当 $\nu>\mu$ 时再适当地选取积分常数即得

$$S_\nu(\Gamma)=\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}T(\Gamma). \tag{51}$$

现在能够利用公式 (49) 和 (51) 来合并展开式中的项. 如果 $n$ 是偶数, 则

$$u(x,\xi)=S_0(\Gamma)U(x,\xi), \tag{52}$$

其中

$$U(x,\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma^\nu}{(1-\mu)\cdots(\nu-\mu)}g^\nu(x,\xi). \tag{53}$$

如果 $n$ 是奇数, 则

$$u(x,\xi)=S_0(\Gamma)U(x,\xi)+T(\Gamma)V(x,\xi), \tag{54}$$

其中

$$U(x,\xi)=\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{\Gamma^{\nu}}{(1-\mu)\cdots(\nu-\mu)}g^{\nu}(x,\xi), \tag{55}$$

$$V(x,\xi)=\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\frac{\Gamma^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}g^{\nu}(x,\xi). \tag{56}$$

现在才要来说明 $S_0(\Gamma)$ 和 $T(\Gamma)$. Hadamard 从 (46) 断定, 除了一个常数因子不计外,

$$S_0(\Gamma)=\Gamma^{(1-n)/2}. \tag{57a}$$

然而, 根据 6.15.4 中波动方程的例子, 并且为了满足 6.15.2 的条件 (10), 应该从奇性函数

$$S_0(\Gamma)=\delta^{((n-3)/2)}(\Gamma) \tag{57b}$$

出发. 由于 $\delta(\Gamma)$ 适合方程

$$\Gamma\delta(\Gamma)=0, \tag{58}$$

并且 $\delta^{(-1/2)}(\Gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma}}$ 适合方程

$$\Gamma\frac{\mathrm{d}\delta^{(-1/2)}}{\mathrm{d}\Gamma}(\Gamma)+\frac{1}{2}\delta^{(-1/2)}(\Gamma)=0, \tag{59}$$

实行求导可知不仅 (57a) 而且按 (57b) 选取的 $S_0(\Gamma)$ 也适合 (46)(在确定 $S_0$ 时发生这个模棱两可的情况是由于方程在 $\Gamma=0$ 上是奇异的).

那么在 (57a) 与 (57b) 之间如何取舍? 首先考察当 $n$ 为偶数时的情况. 这时, (57a) 与 (57b) 是恒等的, 只不过在 (57b) 中 $S_0$ 需解释为一个分布. 仅当在包括射线劈锥面 $\Gamma=0$ 的区域上计算这些函数的积分时才出现差异. 在情况 (57a) 中这些积分通常是发散的. 这个困难产生了一个重大的障碍①, 并且使得 Hadamard 发明了此类积分的“有限部分”. 这些“有限部分”究竟不过就是由积分广义函数 (57b) 所得的表达式. 实际上, Hadamard 的关于有限部分的发明可以看成是对现代分布理论的重要启发.

当 $n$ 为奇数时, 情况是相仿的. 这时, Hadamard 需要引入与其解有关的积分的“对数部分”. 这些表达式和利用 $\delta$ 函数所得到的相同.

所以, 不论 $n$ 是偶数或者奇数, 可以把解写成如下的共同形式

$$u(x,\xi)=\delta^{(\frac{n-3}{2})}(\Gamma)U(x,\xi)+\eta(\Gamma)V(x,\xi), \tag{60}$$

① 在 J. Hadamard[3] 中给出了一个有趣的记述.

其中 $\eta(\Gamma)$ 是 Heaviside 函数, 并且 $V$ 当 $n$ 为偶数时恒等于零. 由 $\delta$ 函数及其导函数的性质可知除了在劈锥面 $\Gamma=0$ 上以外, 当且仅当 $n$ 为奇数且 $V(x,\xi)\equiv 0$ 时 $u(x,\xi)$ 恒等于零. 这是 Huygens原理的严格形式.

不难把 (60) 和 Hadamard 的. 表达式, 其中出现的是 $\log\Gamma$ 而不是 $\eta(\Gamma)$ 来加以比较. 可以利用 6.15.2 中的定义证明基本解确实具有 (60) 的形式, 不妨把它留给读者.

### 6.15.7 进一步的例子. 两个自变量. 注记

还应注意, 第 5 章的 Riemann 表示在两个自变量的单个高阶方程或 $k$ 个一阶方程的组的问题上的推广几乎可以说是本节中的一般表示的不足道的特殊情况.

至于退化的方程, 算子 $u_{x_1x_2x_3}$ 的一个典型例子是值得提一提的. 它的 Riemann 函数是

$$\eta(x_1-\xi_1)\eta(x_2-\xi_2)\eta(x_3-\eta_3),$$

其中 $\eta$ 是 Heaviside 函数, 这可以从 6.15.2 中的剖析看得出来的.

一般地说, 在多重特征元素上, 在孤立的射线上, 以及在焦散流形上, Riemann 矩阵的奇异性要比在射线锥面或它的壳罩的其他地方高. 对于这些奇异性的深入研究将会把一般的 Huygens 原理弄得更加透彻①.

最后应当重复前面关于存在性和唯一性的一个注记: 尽管 6.10 中的存在性证明都是建立在能量积分的基础上的, 然而前进波展开式的收敛性定理和本节的构造法一起, 对于解析算子 $L$, 不论它是否对称的, 都独立于能量积分而另行造出了 Riemann 矩阵. 然后 Riemann 矩阵又立即导出 Cauchy 问题的解并且还显示出解的可微性质. 第 3 章附录Ⅱ里的 Holmgren 的定理则保证了解的唯一性. 于是一条不同于 6.8~6.10 的解决 Cauchy 问题的途径被开辟出来了.

## 6.16 超双曲型微分方程和一般常系数二阶方程

### 6.16.1 Asgeirsson 的一般平均值定理②

L. Asgeirsson 利用球面平均法得到了关于任意二阶线性常系数方程的一个简单而强有力的平均值定理. 按照第 3 章 3.3.1, 属于这种类型的齐次微分方程, 如果不是抛物退化的, 恒可借助一个适当的线性坐标变换并且必要时去掉一个指数因子而化为下列形式

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\cdots+u_{y_my_m}-cu.$$

① 关于这方面的进展可参考 D. Ludwig[3].

② 参考 L. Asgeirsson[2] 和 [3].

引入一个虚拟的新自变量 $x_{n+1}$ 并且令 $u = v\mathrm{e}^{\sqrt{c}x_{n+1}}$, 还可以形式上消去系数 $c$(当它是正数时). 于是, 微分方程取得下列形式

$$u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{y_1y_1} + \cdots + u_{y_my_m},$$

其中把 $v$ 仍旧写成了 $u$. 在特殊情况下, 当 $u$ 不依赖于任何 $y$ 变量时得到位势方程. 当 $u$ 依赖于仅只一个 $y$ 变量时得到波动方程.

此外, 假定函数 $u$ 不依赖于变量 $x$ 或 $y$ 中的某些个, 那么, 不失一般性还可以把微分方程写成

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

即

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_1x_1} = \sum_{i=1}^{m} u_{y_1,y_1}, \tag{1a}$$

这里 $x$ 变量的个数与 $y$ 变量的个数都是 $m$, 其中有些是虚拟的. 称这个类型的微分方程为超双曲型的.

现在假定在 $x, y$ 空间里所考虑的整个区域上函数 $u$ 是微分方程 (1) 的一个两次连续可微的解. 对于这样一个解 $u$, 构成下列在单位球 $\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2 = 1$ 上的积分

$$\mu(x,y,r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int u(x+\beta r, y)\mathrm{d}\beta \tag{2}$$

和

$$v(x,y,r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int u(x, y+\beta r)\mathrm{d}\beta, \tag{3}$$

其中 $\omega_m$ 是此单位球的表面积, $\mathrm{d}\omega_m = \mathrm{d}\beta$ 是它的面元. 于是 $\nu(x,y,r)$ 是当 $x$ 的值固定时在以 $y$ 空间里的点 $y$ 为中心而以 $r$ 为半径的球面上函数 $u$ 的平均值. 相仿地, $u(x,y,r)$ 是当 $y$ 固定时在 $x$ 空间里的球面上的平均值. 假定对于负的 $r$ 值函数 $\mu$ 和 $\nu$ 被延拓而成偶函数.

还要作平均值

$$w(x,y,r,s) = \frac{1}{\omega_m^2}\underset{\alpha^i=1}{\int\cdots\int}\underset{\beta^i=1}{\int\cdots\int} u(x+\beta r; y+\alpha s)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha, \tag{4}$$

即同时在 $x$ 空间里半径为 $r$ 的球面上和 $y$ 空间里半径为 $s$ 的球面上的平均值. 显然

$$\mu(x,y,r) = w(x,y;r,0),$$

$$\nu(x,y,r) = w(x,y;0,r).$$

于是下列等式简明地表达了 Asgeirsson 的平均值定理：

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r), \tag{5}$$

或者用文字来叙述时就是当 $x$ 固定时在 $y$ 空间里半径为 $r$ 的球面上的平均值和当 $y$ 固定时在 $x$ 空间里半径为 $r$ 的球面上的平均值是一样的; 即 $\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r)$. 更一般地还有

$$w(x, y; r, s) = w(x, y; s, r); \tag{6}$$

即双重平均值关于半径 $r$ 和 $s$ 是对称的.

先证明特殊情况. 由 6.13, 平均值 $\nu$ 和 $\mu$ 都适合 Darboux 的方程

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x u - \frac{m-1}{r}\mu_r - \mu_{rr} = 0, \\ \Delta_y \nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中在第一个方程中 $y$ 是作为参数出现的, 在第二个方程中 $x$ 是作为参数出现的. 由 (1) 可知 $\Delta_x \mu = \Delta_y \mu$ 且 $\Delta_x \nu = \Delta_y \nu$. 所以

$$\Delta_x \nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0.$$

再者, 由定义知

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \mu_r(x, y, 0) = 0,$$

$$\nu(x, y, 0) = u(x, y), \quad \nu_r(x, y, 0) = 0.$$

于是, $\mu$ 和 $\nu$ 作为 $x$ 和 $r$ 的函数而带有参数 $y$, 它们都是 Darboux 的方程在同一个初始条件下的解. 因而由 6.6.2 的唯一性定理可知它们是恒等的.

相仿地, 如下可得一般关系 (6), 双重平均值适合 $\Delta_x w = \Delta_y w$, 也适合 Darboux 的方程

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr},$$

$$\Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss},$$

所以

$$\frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}. \tag{8}$$

当 $s = 0$ 时, 认为 $w(x, y; r, 0)$ 是已知的, 还知道 $w_s(x, y; r, 0) = 0$. 从 6.6.2 的论证可知这些条件唯一地确定了 $w(x, y; r, s)$.

假定 $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ 且 $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, 那么, 函数 $u$ 和 $v$ 适合同一个微分方程 (8) 和初始条件 $u(r, 0) = w(r, 0)$, $u_s(r, 0) = 0$ 和 $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. 由特殊情况的平均值定理知道 $w(0, r) = w(r, 0)$. 于是唯一性定理蕴含着这些解必然恒等:

$$v(r, s) = w(r, s) = w(x, y; r, s).$$

由于平均值等式 (5) 对于每一个半径为 $r$ 的球面都成立, 所以对 $r$ 积分便立即得到一个相应的在球体上的平均值定理:

$$\int_{\rho\leqslant r}\cdots\int u(x+\xi;y)\mathrm{d}\xi=\int_{p\leqslant r}\cdots\int u(x;y+\xi)\mathrm{d}\xi; \tag{5a}$$

其中两端的积分都是展布在整个球体 $\rho^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2\leqslant r^2$ 的内部.

这个结果导致当 $n>m$ 时即对于微分方程

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\cdots+u_{y_my_m}$$

的相应的定理.

假设在 (5a) 中解 $u$ 与变量 $y_{m+1},\cdots,y_n$ 无关, $m<n$. 那么可以更一般地表述:

$$\begin{aligned}&\int_{\rho\leqslant r}\cdots\int u(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n;y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n\\=&\frac{\omega_{n-m}}{n-m}\int_{\rho_1\leqslant r}\cdots\int(r^2-\rho_1^2)^{(n-m)/2}u(x;y+\xi)\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{5b}$$

其中 $\rho_1^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2$ 且 $\rho^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$.

### 6.16.2 平均值定理的别证

在较强的可微性假设下可以给出一般平均值定理的另一个证明. 对于某个函数 $v(a,b)$ 令

$$w(r,s)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}v(\alpha r,\beta s)(1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta, \tag{9}$$

并假定 $w$ 是可微分充分多次的, 所以可根据 6.13 唯一地确定出属于 $w$ 的偶函数 $v$. 由 6.13.2 得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[v_{aa}(\alpha r,\beta s)-v_{bb}(\alpha r,\beta s)](1-\alpha^2)^{(m-3)/2}(1-\beta^2)^{(m-3)/2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\=&\frac{m-1}{r}w_r+w_{rr}-\frac{m-1}{s}w_s-w_{ss};\end{aligned}$$

并利用 (8) 得到

$$v_{aa}=v_{bb},$$

因而

$$v(a,b)=g(a+b)+h(a-b).$$

如果把 $v(a,b)$ 的这个形式代入 (9), 便得到一个关于 $r$ 和 $s$ 对称的表达式, 并从而

得到所求的等式

$$w(r,s)=w(s,r).$$

### 6.16.3　在波动方程上的应用

再次来解波动方程 $u_{tt}-\Delta u=0$ 在初始条件 $u(x,0)=\psi(x), u_t(x,0)=0$ 下的初值问题. 自然, 要把波动方程看成超双曲型方程 (1) 在附加条件 —— 解 $u$ 与 $y_2,\cdots,y_n$ 无关下的特例, 其中 $y_1=t$. 对 $x$ 空间的任一点 $x$ 和 $y$ 空间的原点 $y=0$ 引用平均值定理则得

$$\frac{1}{\omega_m}\underset{\beta^2=1}{\int\cdots\int} u(x+\beta t;0)\mathrm{d}\beta=\frac{1}{\omega_m}\underset{\alpha^2=1}{\int\cdots\int} u(x;\alpha_1 t)\mathrm{d}\alpha, \tag{10}$$

其中右端的 $u$ 仅依赖于单位矢量 $\alpha$ 的支量 $\alpha_1$. 左端的式子就是初始函数 $\psi$ 的平均值 $Q(x,t)$, 它是由初始条件已经知道了的. 由于右端平均值里的被积函数除了参数 $x$ 之外仅依赖于单个量 $\alpha_1 t$, 按照 6.11, 这个平均值可以写成

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}}\int_0^t u(x_1,\cdots,x_m,\rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2}\mathrm{d}\rho,$$

于是平均值定理给出积分关系

$$Q(x,t)=\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}}\int_0^t u(x,\rho)(t^2-\rho^2)^{(m-3)/2}\mathrm{d}\rho, \tag{11}$$

它和 6.13 中考察过的是一样的, 而在那里是用分数阶的或通常的微分法求得的.

这里的办法实质上是借助于引入额外虚拟的“时间参数”而以对称的方式处理空间坐标与时间坐标, 这些参数和物理现象是无关的.

### 6.16.4　波动方程的特征初值问题的解

下面解决 6.6.1 中提出的三维空间波动方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0 \tag{12}$$

的特征初值问题的方法是 Asgeirsson 的定理的进一步的应用. 假定在锥面

$$K=x^2+y^2+z^2-t^2=0$$

上给定了 $u$ 的值, 使得

$$u(x,y,z,\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\psi(x,y,z)$$

是已知的. 要找方程 (12) 的一个当 $K\leqslant 0$ 时是正则的解, 它在 $K=0$ 上取给定的值.

首先作出这个问题在此锥的轴线 $x=y=z=0$ 上的解. 为此, 应用平均值定理求得

$$2\pi t\int_0^{2t}u(0,0,0,r)\mathrm{d}r=t^2\iint_\Omega\psi(\alpha t,\beta t,\gamma t)\mathrm{d}\omega,$$

即

$$4\pi\int_0^{t}u(0,0,0,r)\mathrm{d}r=t\iint_\Omega\psi\left(\frac{\alpha}{2}t,\frac{\beta}{2}t,\frac{\gamma}{2}t\right)\mathrm{d}\omega.$$

其中右端的积分是取在 $\alpha,\beta,\gamma$ 空间里的单位球面上的. 对 $t$ 求导即得

$$u(0,0,0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega\psi\left(\frac{\alpha}{2}t,\frac{\beta}{2}t,\frac{\gamma}{2}t\right)\mathrm{d}\omega+\frac{t}{8\pi}\iint_\Omega(\alpha\psi_x+\beta\psi_y+\gamma\psi_z)\mathrm{d}\omega,\tag{13}$$

其中宗量$\dfrac{\alpha}{2}t$ 等同样也应代入第二个积分中的 $\psi_x,\psi_y,\psi_z$ 里. 如果对于不在 $t$ 轴上的一个点 $P,K$ 的值仍是负的, 也能立即求出解 $u(P)$. 为此只需用一个 Lorentz 变换, 即保持特征锥不变的线性变换把点 $P$ 变换为时间坐标轴上的一个点就行了. 例如, 若点 $P$ 的坐标是 $x=x_0,y=0,z=0,t=t_0$ 且 $x_0<t_0$, 则代换

$$\begin{cases}x=\dfrac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x^2}}x'+\dfrac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t',\\ y=y',\\ z=z',\\ t=\dfrac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}x'+\dfrac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t'\end{cases}\tag{14}$$

就构成这个变换, 并且 $P$ 的映象 $P'$ 的坐标是

$$x'=y'=z'=0,$$

$$t'=\sqrt{t_0^2-x_0^2}.$$

由于在 Lorentz 变换 (14) 下微分方程 (12) 是不变的, 所以公式 (13) 仍适用于函数

$$v(x',y',z',t')=u(x,y,z,t)$$

和边界条件

$$\chi(x',y',z')=\psi(x,y,z),$$

且从而有下列结果

$$\begin{aligned}u(x_0,0,0,t_0)=&v(0,0,0\sqrt{t_0^2-x_0^2})=\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega\chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right)\mathrm{d}\omega\\&+\frac{t'}{8\pi}\iint_\Omega(\alpha\chi_{x'}+\beta\chi_{y'}+\gamma\chi_{z'})\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

如果再用 $\psi$ 表示出 $\chi$, 不难得到

$$u(x_0,0,0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\psi\left(\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0),\frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right)\mathrm{d}\omega$$
$$+\frac{1}{8\pi}\iint_{\Omega}(x_0+\alpha t_0)\psi_x d\omega+\frac{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}{8\pi}\iint_{\Omega}(\beta\psi_y+\lambda\psi_z)\mathrm{d}\omega,$$

其中 $\psi_x,\psi_y,\psi_s$ 的宗量和 $\psi$ 的宗量是一样的, 即

$$\frac{1}{2}(x_0+\alpha t_0),\quad \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2},\quad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}.$$

所以, 在每一个符合 $t>0$ 且 $Q<0$ 的点 $P$ 处, $u$ 的值都被 $\psi$ 唯一地确定; 只需设想点 $P$ 经过坐标系的一个旋转而被变换到平面 $y=z=0$ 里就行了. 于是, $u$ 在点 $P$ 处的值仅依赖于特征锥与一个平面交出的椭圆上的初始值 $v$. 这个椭圆也就是初始锥面与以 $P$ 为顶点的特征锥面的交线.

读者可以试证这样构造出来的函数在无穷远处的适当假定下确实是所论问题的解. 也指出, 可以相仿地去讨论超双曲型方程的特征初值问题. 注意, 这个方法仅仅给出了初始值所在的特征锥内部的 $u$ 值. 如果外部也存在着一个解的话, 它在任一点处的值都将依赖于整个特征锥上的数据①.

### 6.16.5　其他应用. 关于共焦椭球族的平均值定理

其他熟知的平均值定理都是 Asgeirsson 的定理的特殊情况. 例如, 把一个位函数 $u(x_1,\cdots,x_m)$ 解释为不依赖于任何 $y$ 变量的微分方程 (1) 的一个特解, 就得到位势理论的平均值定理. 把平均值关系 (5) 应用到任一点 $x$ 且 $y=0$ 就立即得出位势理论的平均值定理. 也可以从更一般的关系 (5b) 中令 $m=0$ 而得到这个定理.

下面推出的是一个比较有意思的平均值定理. 设 $u(x_1,\cdots,x_m)$ 是位势方程 $\Delta u=0$ 的一个解. 代替 $m$ 个坐标 $x_i$, 通过一组方程

$$x_i=\xi_i\cosh\alpha_{\mathrm{i}}+\eta_i\sinh\alpha_i\quad(i=1,\cdots,m)$$

虚拟地引入 $2m$ 个新的坐标 $\xi_i$ 和 $\eta_i$, 其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可以是任意的量. 于是 $u(x)$ 被变换为变量

$$\xi_1,\cdots,\xi_m;\quad \eta_1,\cdots,\eta_m$$

的一个函数 $\hat{u}(\xi,\eta)$, 并且微分方程 $\Delta u=0$ 化为超双曲的微分方程

$$\Delta_\xi\hat{u}=\Delta_\eta\hat{u}.$$

现在关于点 $\xi_i=\eta_i=0$ 和 $\xi$ 空间里的球 $K_1:\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2\leqslant r^2$ 与相应的 $\eta$ 空间里的球 $K_2:\eta_1^2+\cdots+\eta_m^2\leqslant r^2$ 应用形式为 (5a) 的 Asgeirsson 的平均值定理. 和这

① 参考 F. John[4], 第 114–120 页.

些球相对应的在 $x$ 空间里是两个共焦椭球族：

$$S_1: \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\cosh^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

和

$$S_2: \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\sinh^2 \alpha_i} \leqslant r^2.$$

在球体上的平均值转化为函数 $u(x)$ 在相应的两个椭球体内的平均值. 按照上面的公式, 任一对共焦椭球可以由适当地选取量 $\alpha_i$ 与 $r$ 而获得, 因此立即得到下面的定理：

一个正则的位函数在一个椭球体内的平均值对于整个一族共焦椭球体中每一个椭球都是一样的.

还要指出, 上面这个应用还可以从一个一般的观点探讨之, 存在着一个把超双曲型微分方程 (1) 变换到自身的线性变换群. 这些变换就是把二次型

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

变换到自身 (除了一个因子不计外) 的线性变换 (“超 Lorentz” 变换), 所以它们也是保持微分方程的特征锥不变的变换. 自然地, 这个群 (它是值得进一步研究的①) 在相应的较低维的空间里的子群不仅有线性变换群而且有 Lorentz 变换群.

实行“超 Lorentz”群的代换然后应用 Asgeirsson 的平均值定理乃是特殊的超双曲型方程的解的进一步的平均值定理的源泉②.

## 6.17 对于非类空间初始流形的初值问题

6.16 的平均值定理阐明了关于具有非类空间的初始流形的超双曲型方程和双曲型方程初值问题的情况. 特殊地, 将看到为什么这一类初值问题按第 3 章 3.6 的意义说是无意义的或者是不“适定”的.

---

① 当 $m = 3$ 时, 这个群和把三维空间里的全体直线变换到它们自身的变换群是等价的, 参考 F. Klein[1].

从 F. John 给出的 Asgeirsson 平均值定理在 $m = 2$ 时的超双曲型方程

$$u_{x_1 y_2} = u_{x_2 y_1}$$

上的应用 (见 F. John[5]) 可以更具体地看出这两个群的等价性. 把 $x_1, x_2, y_1, y_2$ 解释成直线几何学中三维的 $\xi, \zeta$ 空间的直线的直线坐标. 于是, $\xi, \zeta$ 的一个任意函数在这空间的直线上的积分给出了定义在整个空间上且在无穷远处适合某些正则性条件的一般解. 关于 $\xi, \zeta$ 空间里任一单叶双曲面上两族直线, Asgeirsson 的平均值定理可以陈述如下：任何一个解 $u$ 在这些直线族中的一族上的积分等于它在另一族上的积分.

② 参考 L. Asgeirsson[2].

### 6.17.1　由中心在一个平面上的球上的平均值确定的函数

函数 $f(x,t)=f(x_1,\cdots,x_n,t)$ 在 $x,t$ 空间里的以 $r$ 为半径且以 $(x,0)$ 为中心的球面上的积分是

$$g(x,r)=\int_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi,\tau)\mathrm{d}S=Q[f]. \tag{1}$$

显然, $Q[f]$ 仅依赖于 $f$ 的偶部 $f(x,t)+f(x,-t)$. 希望由给定的 $g(x,r)$ 去确定 $f(x,t)+f(x,-t)$. 为了这个目的, 构成 $f$ 在以 $r$ 为半径且以 $(x,0)$ 为中心的球体上的积分:

$$G(x,r)=\int_0^r g(x,\rho)\mathrm{d}\rho=\int_{\xi^2+\tau^2<r^2} f(x+\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

对 $x$ 变量之一 ——$x_i$, 微分 $G$, 即得

$$G_x=\int_{\xi^2+\tau^2<r^2} f_\xi(x+\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{r}\int_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi,\tau)\xi_i\mathrm{d}S. \tag{3}$$

因此

$$\begin{aligned}Q[f(x,t)x_i]&=\int_{\xi^2+\tau^2=r^2} f(x+\xi,\tau)(x_i+\xi_i)\mathrm{d}S=x_ig(x,r)+rG_x(x,r)\\&=x_ig(x,r)+r\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^r g(x,\rho)\mathrm{d}\rho=D_ig,\end{aligned}$$

其中 $D_i$ 是作用在函数 $g(x,r)$ 上的一个线性算子. 同样的论述应用到 $x_if$(代替 $f$) 上并继续重复这个步骤, 就看到对于任何多项式 $P(x_1,\cdots,x_n)$, 函数 $Pf$ 在以 $r$ 为半径且以 $(x,0)$ 为中心的球上的积分是

$$Q[Pf]=P(D_1,\cdots,D_n)g,$$

因而当给定 $g$ 时这个积分是已知的. 还有

$$Q[Pf]=\int_{(\eta-x)^2<r^2} P(\eta)(f(\eta,\tau)+f(\eta,-\tau))\frac{r\mathrm{d}\eta}{\tau}, \tag{4}$$

其中

$$\tau=\sqrt{r^2-(\eta-x)^2}.$$

由于多项式 $P$ 在球内的完备性, 可用已知的表达式 $P(D_1,\cdots,D_n)g$ 唯一地确定函数

$$\frac{f(\eta,\tau)+f(\eta,-\tau)}{\tau}\quad(\tau=\sqrt{r^2-(\eta-x)^2}), \tag{5}$$

并因而也唯一地确定了 $f$ 自身①.

现在注意下面的重要事实: 为了对于任何值组 $x_1^0, \cdots, x_n^0, r_0$ 计算算子 $D_i g$, 只需知道当

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2 \end{array}\right\} \tag{6}$$

时 $f(x,t)$ 的平均值 $g(x,r)$, 其中 $\varepsilon$ 可以任意地小. 对于一切多项式 $P(D_1, \cdots, D_n)g$ 的计算, 也是这样作.

由此可知, $g$ 在由 (6) 所规定的区域上的值唯一地确定了函数 $f$ 的偶部在整个球体

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant r_0^2$$

内的值.

这个结果随之又唯一地确定了任一个中心在 $t=0$ 处的球上的积分 $g(x,t,r)$, 这个球是在另一个球内, 而在另一球内 $f$ 是已知的, 且假定

$$r + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} \leqslant r_0, \tag{7}$$

这样就证明了 $g$ 在厚度为任意小正数 $\varepsilon$ 的柱形域 (6) 内的值唯一地确定了它在整个双锥面(7)内的值(见图 6-15).

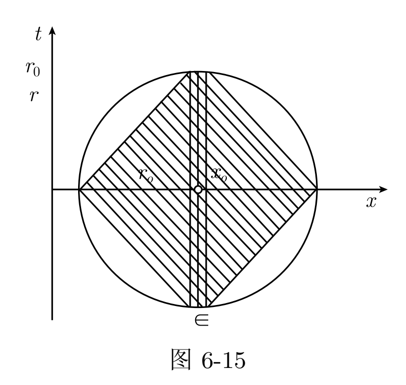



图 6-15

### 6.17.2　在初值问题上的应用

考虑超双曲型方程

① 函数 (5) 当 $\tau = 0$ 时是奇异的, 这个事实并不影响这个结论. 只需在球 $|\eta - x| = r$ 的某个邻域上 "修光" 函数 (5) 并选取一个一致地逼近这个被修光了的函数的多项式 $P$ 的序列.

$$\sum_{i=1}^{l} u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x} + u_{tt}, \tag{8}$$

其中挑出了 $x_{n+1} = t$ 并设 $n \geqslant 2$, 但不需要假定 $l = n+1$. 试图由给定在平面 $t = 0$ 上的值去确定一个解. 今设 $t = 0$ 时已知

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad 且 \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

考虑在 $x, y$ 空间的一个区域里的初始值, 其中假定 $y$ 在 $y$ 空间的某个区域 $G$ 内变动而 $x$ 在 $x$ 空间内的小球

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2 \tag{9}$$

内变动. 因而给出初始值的区域就是 $x$ 空间里的一个小球和 $y$ 空间里任意的一个区域的"乘积域". 把解 $u$ 看成是 $x, t$ 的函数而 $y$ 是参数. 那么已给值 $\psi$ 决定了 $u$ 在 $x, t$ 空间里那些球面上的积分, 它们的中心 $x_i, t$ 落在

$$t = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

并且它们的半径不大于 $y$ 空间里中心在点 $y$ 而不超出 $G$ 的最大的球的半径 $r_0$.

当 $n > l$ 时可由 6.16 的平均值定理直接得出. 如果 $n < l$, 这个平均值定理首先只给出在 $x, t$ 空间里半径 $r \leqslant r_0$ 且中心在 $x_1, \cdots, x_n, t = 0$ 的每一个球 $V_r$ 内的积分

$$\iint\limits_{V} u(x, t)\left(r^2 - t^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{l-n}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$. 如果用 $I(r)$ 记在半径为 $r$ 的一个这样的球的表面上的积分, 那么上面的积分就可以写成

$$\int_0^r I(\rho)(r^2 - \rho^2)^{\frac{l-n}{2}} \mathrm{d}\rho.$$

但若已知这个表达式当 $r < r_0$ 时的值, 那么 $I(r)$ 当 $r < r_0$ 时也就被唯一地确定了. 这是由前面 (参考 6.16) 根据解 Abel 积分方程的讨论而得知的. 于是当 $l > n$ 时断言也得到了证明.

由 6.17.1 可知, 已给的 $u$ 值唯一地确定了偶函数 $u(x, y, t) + u(x, y, -t)$ 在整个球

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqslant (r_0)^2$$

内的值. 相仿地, $\phi$ 确定了偶函数

$$u_t(x,y,t)+u_t(x,y,-t).$$

于是立即可知 $u(x,y,t)$ 被唯一地确定. 特别地, 在 $n$ 维初始空间 $R_n$ 的球

$$\sum_{i=1}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant (r_0)^2 \tag{10}$$

当 $t=0$ 时的初始值 $u(x,y,0)$ 被确定, 因而得到下面的值得注意的结果.

如果对于 $G$ 中的 $y$ 和任一个小球

$$\sum(x_i-x_i^0)<\varepsilon^2$$

中的 $x$, 已知超双曲型方程 (8) 的一个解 $u$ 的初始值(参考 6.17.1). 那么, 在较大的球

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant (r_0)^2$$

内的任何地方的初始值都被唯一地确定了, 这里 $r_0$ 的定义如上.

这个结果的一个推论是人们不能任意给定初始值 $u(x,y,0)$.

例如, 若 $a$ 已定, 人们给出初始值 $u(y_1,y_2,x,0)$ 而要求方程

$$u_{y_1y_1}+u_{y_2y_2}-u_{xx}-u_{tt}=0 \tag{11}$$

在一个薄的圆盘

$$t=0,\quad (y_1-y_1^0)^2+(y_2-y_2^0)^2 \leqslant a^2,\quad |x-x_0| \leqslant \varepsilon$$

内的解, 那么 $u(y_1,y_2,x,0)$ 在双锥面 (见图 6-16)

$$t=0,\quad \sqrt{(y_1-y_1^0)^2+(y_2-y_2^0)^2}+|x-x_0| \leqslant a$$

内就已事先被唯一地确定了.

相仿地, 考虑波动方程

$$u_{yy}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{tt}=0, \tag{12}$$

不过其中空间变量 $y$ 与时间变量 $t$ 的角色交换了. 如果在平行于 $y$ 轴的细圆柱

$$t=0,\quad (x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0) \leqslant \varepsilon^2,\quad |y-y^0| \leqslant a$$

内给定了函数 $u(y,x_1,x_2,t)$ 的值, 那么初始值 $u(y,x_1,x_2,0)$ 在双锥面 (见图 6-17)

$$\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_1-x_2^0)^2}+|y-y^0| \leqslant a$$

内就立即被唯一地确定了.

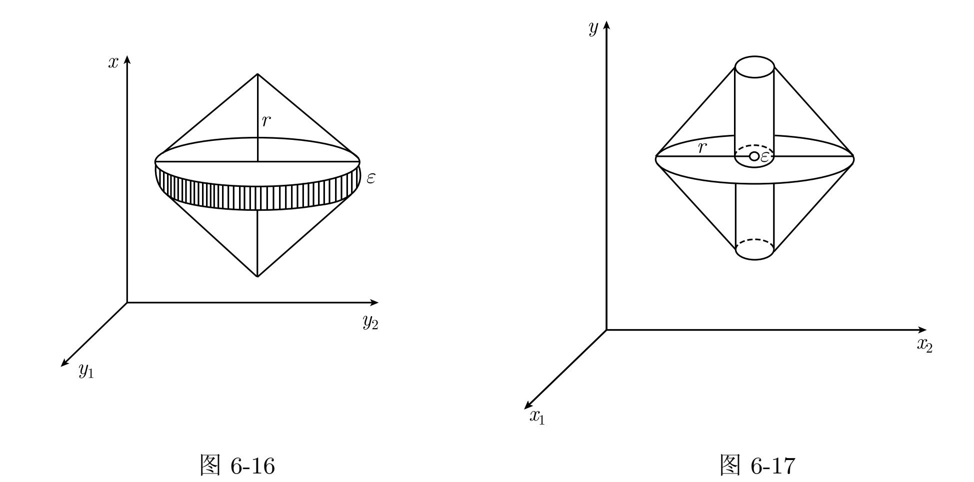



图 6-16　　图 6-17

于是看到在一个非类空间的平面上, 不能任意给定波动方程的解的初始值.

在一般方程 (8) 的情况下, 假定对于

$$\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2 \leqslant a^2, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

给定了初始值 $u(y_1,y_2,\cdots,y_l;x_1,\cdots,x_n,0)$, 那么它在区域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2} \leqslant a$$

上就是事先已知的, 并且解 $u(y,x,t)$ 在区域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2+t^2} \leqslant a$$

上是被唯一地确定的. 对于位势方程 $(l=0)$

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}+u_{tt}=0, \tag{13}$$

即如果解 $u$ 是 $t$ 的一个偶函数, 那么 $u(x,0)$ 在一个任意小的球

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \leqslant \varepsilon^2$$

内的值唯一地确定了解 $u$ 在 $a$ 为任意实数的区域

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+t^2 \leqslant a^2$$

的值. 特别地, 当 $t=0$, 值 $u(x,0)$ 唯一地确定了 $u$ 的初始值. 不必限制解是偶函数, 关于初始值的陈述也是对的.

这个关于位势方程的结果是可以由它的解的解析性质估计到的, 后者已经已知了. 然而, 在双曲型和超双曲型微分方程的情况, 上面所得在初始平面上解的值之间的关系并不是那么的明显. 事实上, 这些初始函数大可不必是解析的. 因此, 在研究双曲型和超双曲型方程的解沿着非类空间平面上的值的时候, 要和一些函数的不寻常现象打交道, 它们未必是解析的, 然而它们在一个任意小的区域里的值确定了在一个大得多的区域上的函数值[①].

## 6.18 关于前进波的注记. 信号的传播和 Huygens 原理

### 6.18.1 无畸变前进波

虽然“波”这个字在本书里常一般地用于指称一个双曲型问题的任何解[②], 有某些特殊类型的波具有特殊的兴趣, 例如, 由时间变量的一个函数和空间变量的一个函数的乘积表示的“驻波”. 在本节中要进一步说明另一类有特殊兴趣的波的重要性, 说的就是第 3 章中对于常系数的微分方程以及更一般地在本章 6.4 中讨论过的前进波. 这个概念是信号传播理论的一个关键, 事实上也是双曲型微分方程理论的一个主题. 为简明计, 将考虑单个的微分方程 $L[u]=0$.

与第 3 章 3.3 保持一致, 把无畸变的前进波系定义为 $L[u]=0$ 的依赖于一个任意函数 $S(\phi)$ 而形式为

$$u=S(\phi(x,t)) \tag{1}$$

的一族解, 其中 $S$ 叫做波形而 $\phi(x,t)$ 是一个固定的相函数, 它是空间变量 $x$ 和时间 $t=x_0$ 的函数. 例如

$$\phi(x,t)=\chi(x)-t$$

就可以作为这样的一个相函数. 解 $u$ 则表示波形 $S$ 在空间里的无畸变运动.

利用 $S(\phi)$ 的任意性, 断定 $\phi$ 必适合

$$L[\phi]=0$$

和特征方程

$$Q(D\phi)=0.$$

① 参考 F. John[3], 那里用一个不同的方法对于具有解析系数的一般线性方程得到了更为深远的结果.

② 为了避免混淆, 一直把“波前”这个名字保留给间断面, 这种间断面适合附属的一阶特征方程而不适合原来的微分方程.

前一个方程得自特殊的代换 $S(\phi)=\phi$, 后一个方程可得自选取 $S=\delta(\phi-c)$, $c$ 为一个任意常数 (见 6.4). 于是可以宣述：相函数 $\phi$ 是一个特征函数, 即相曲面 $\phi=$常数都是特征波前.

尽管 $\phi$ 的这个超定性质, 仍然存在着一些微分方程 $L[u]=0$, 其允许有无畸变前进波系. 例如, 仅具有最高阶项的常系数线性方程 $L[u]=0$, 特别是波动方程 (见第 3 章 3.3) 就是这种情况. 然而一般说来关于 $\phi$ 的上述两个条件是不相容的. 因此, 引入限制较少的概念 ——“相对无畸变”前进波系是适当的, 它的形式是

$$u=g(x,t)S(\phi), \tag{2}$$

其中 $S(\phi)$ 仍是任意的, 但不仅相函数 $\phi(x,t)$ 而且畸变因子 $g$ 也是指定的. 这样的波仍然可以作为信号的适宜媒介, 因为因子 $g$ 不过表示一种衰减罢了. 三维空间里的球面波, 例如 $\dfrac{S(t-r)}{r}$ 或 $\dfrac{S(t+r)}{r}$, 就是此类相对无畸变波系的例子. 三维空间里的同心球表明运动着的特征相曲面.

条件仍然把 $\phi$ 限制为一个特征函数, 其包含着关于畸变因子的一个超定的微分方程组. 例如, 把 (2) 代入微分方程并注意到 $S$ 的任意性隐含着一切 $S, S', S'', \cdots$ 的系数恒等于零, 就认识到这一点.

所以, 仅在例外的情况下, 方程 $L[u]=0$ 才具备拥有相对无畸变前进波系解这个性质. 当然, 如果一个微分方程 $L[u]=0$ 确有这个性质, 那么整个一类等价的微分方程都具备这同一个性质. 这里等价这个词应如下去理解：如果关于函数 $u(x)$ 和 $u^*(x)$ 的两个微分方程 $L[u]=0$ 和 $L^*[u^*]=0$ 可以通过一个形式为

$$x_i^*=\alpha_i(x_0,x_1,\cdots,x_n),\quad u^*=f(x)u$$

的变换关系而互相转换, 则称这两个微分方程是等价的.

如何确定拥有此种解族的一切算子 $L$. 这个问题还几乎没有被触动过[①].

有一个有关的问题, 它的一个解已经知道了, 考虑具有四个自变量的波动方程. 它的相对无畸变前进波的可能的波前是什么, 答案是一切此种波前都是 Dupin 的

① 一个容易证明的特殊结果是 在两个自变量 $x_1=x, t=x_0=y$ 的情况下, 拥有沿空间的两个方向的相对无畸变前进波系的唯一的二阶 微分方程是 $u_{xy}=0$ 及与其等价的方程.

诚然, 这个微分方程等价于形式为 $2u_{xy}+Bu_x+Cu=0$ 的一个方程, 其中 $B$ 和 $C$ 都是 $x$ 和 $y$ 的函数, $x+y$ 和 $x-y$ 分别表示时间坐标和空间坐标, 而且 $x=$常数和 $y=$常数是特征线. 波系 $u=g(x,y)S(y)$ 的存在性要求 $g_x=0$ 和 $2g_{xy}+Bg_x+Cg=0$ 同时成立, 因而 $C=0$. 此外, 如果沿另一个方向前进的波系 $u=h(x,y)S(x)$ 也存在, 那么 $h$ 必须同时适合 $2h_y+Bh=0$ 和 $2h_{xy}+Bh_x=0$, 所以 $B_x=0$. 但是方程

$$2u_{xy}+B(y)u_x=0$$

是和方程 $u_{xy}=0$ 等价的.

四次圆纹曲面[①], 其中包括着特例 —— 平面和球面.

一般地, 为了减轻或者消除畸变因子 $g$ 的超定性, 必须引入更多的这类因子, 如同在 6.4 中确实作过的那样 —— 定义高次的前进波, 甚至完全的前进波. 按 6.4 与 6.5, 这类波为解的构造准备了重要的一步, 虽然它们确实表示信号的初始形状的畸变.

### 6.18.2 球面波

作为三维波动方程的球面解的推广, "球面波" 这个概念进一步澄清了信号传播问题. 限于讨论二阶线性方程的情况, 并且考虑一条类时间曲线[②] $\Lambda: x_i = \xi(\lambda)$, 其中 $\lambda$ 是一个参数 (这里并不强调时间变量). 考察以点 $\xi(\lambda)$ 为顶点的特征劈锥面, 即球面波前 $\Gamma(x;\xi) = 0$.

对于给定的 $x$, 方程 $\Gamma(x, \xi(\lambda)) = 0$ 把 $\lambda$ 确定为 $x$ 的函数; $\lambda = \phi(x)$, 方程 $\phi(x) =$常数 给出了以 $\xi(\phi(x))$ 为顶点的特征劈锥面. 于是, 从 $\Lambda$ 发出的相对无畸变球面波系可以定义为二阶微分方程的一个解 $u$, 其形式如下:

$$u(x) = g(x)S(\phi(x)),$$

式中 $g$ 是指定的而 $S$ 是任意的.

关于这个概念所涉及的范围中的知识, 知道的还要少. 这个概念显然把球面波与沿一切方向传播完全不失真信号的问题联系起来了. 在此所能作到的只是提出一个猜想, 6.18.3 中将给它一些依据: 仅仅在两个自变量和四个自变量情况, 并且这时也仅当微分方程等价于波动方程的时候, 才对于任意的类时间曲线都存在着球面波系.

这个猜想如果能被证明, 将表明经典物理学的四维物理时空世界具有一种重要的特性.

在此仅仅着重指出, 对于波动方程, 利用 $t$ 轴作为类时间曲线 $\Lambda$ 并且 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 有相对无畸变球面波, 其中 $\phi = t - r$ 且 $g = 1/r$. 对于其他的类时间直线, 可以用 Lorentz 变换得出相应的球面波.

在偶数个自变量的情况, $n + 1 = 2\nu + 4$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$, 存在着形式为高次前进波系[③]的解. 6.12.4 或 6.15.4 中给出的明显解不再具备无畸变性, 但仍然表示一种前进着的现象.

至于高阶方程, 作为一个例子, 值得注意的是, 当 $n+1$ 为任何偶数时, $n+1$ 阶

① 参考 F. G. Friedlander[1] 和 M. Riesz[1]

② 参考 6.3.7.

③ 记号和前面稍有不同.

的 $(n+1)/2$ 重的迭波动方程

$$L^{(n+1)/2}[u] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)^{(n+1)/2} u = 0$$

具有无畸变的球面波系解

$$u = S(t-r), \quad u = S(t+r),$$

虽然波动方程

$$L[u] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0$$

并不具有这种解. 这个事实不过是 6.13.4 中证明过了的定理的另一个解释. 它表明高阶方程允许有二阶方程所没有的各种可能的性质.

最后应当重提一下, 即具有指定波形 $S$ 的高次的个别的前进球面波是有的而且是重要的 (6.4), 但不一定有具有任意波形 $S$ 的波系. 特别地, 6.15 的基本解, 例如, 关于单个二阶方程的基本解的 Hadamard 的表达式 (6.15.6) 就是由这样的波表示的.

$$R = S(\varGamma)g(x,t) + S_1(\varGamma)g^1(x,t) + \cdots,$$

其中 $S'(\varGamma)$ 是一个特定的分布.

### 6.18.3 辐射与 Huygens 原理

本卷里在各个场合讨论过的 Huygens 原理断定解在一点 $(\xi,\tau)$ 的值并不依赖于在依赖劈锥 (6.7) 内的全部初始数据而仅仅依赖于通过 $(\xi,\tau)$ 的特征射线上的初始数据 (再次着重指出 $x_0 = t, \xi_0 = \tau$). 这个原理等于说 6.15 的辐射矩阵除了在通过 $(\xi,\tau)$ 的射线上以外是恒等于零的. 与此等价, 还可以得出在时刻 $t$ 和地点 $\xi$ 发出的清晰的信号沿着射线传播并保持为清晰的信号, 而在射线劈锥之外一直是无法被察觉的. 然而, 这个原理并没有说信号传播时不发生畸变.

对于单个常系数二阶微分方程曾经看到仅仅对于 3, 5, 7, $\cdots$ 维空间里的波动方程以及和它们等价的方程, Huygens 的原理才成立. 对于变系数的二阶方程, Hadamard的猜想① 说, 即使系数不是常数, 这个定理也成立. 反面的例子表明, 这个猜想不可能在这个形式下完全是正确的②, 虽然在某些方面它基本正确这一点是非常可信的③.

① 这个著名的猜想事实上并非由 Hadamard 明确地提出来的.

② 最近 K. L. Stellmacher[1] 给出了一个七维空间里的反例

③ Hadamard 已经把保证 Huygens 的原理成立的条件和当空间的维数为奇数时他的基本解展开式中对数项的消失等同起来. 用我们的话来说, Huygens 的原理意味着 6.15 中级数 (44) 不包含带有 Heaviside 函数和它的积分的那些项.

总之, 二阶方程的 Huygens 原理问题, 从任一双曲型问题的精确依赖区域和影响区域这个内容丰富得多的问题 (见 6.7) 来看, 它仍然是一个完全没有解决的课题.

关于不仅保持清晰而且无畸变的信号传播问题, 6.18.2 中的猜想声称这个现象仅只在三维空间里是可能的. 对于各向同性的均匀介质, 即对于常系数 (且是二阶的) 方程, 这个猜想的证明已经被包含在前面的讨论里了. 因此, 现实物理世界 (其中声的和电磁的信号是通讯的基础) 就其内在的简单性与谐和性来说, 在数学上可以设想的各种空间之中是独一无二的.

然而, 至少在近似的意义上说, 任何一个双曲型方程组, 按广义的 Huygens 原理的含义而言, 蕴含着信号的清晰性不变. 因此这个一般原理对于从数学角度去理解信号的传播具有重要的意义. 这个看法是对的, 尤其是因为 Huygens 原理的真实性至多不过是一个微分算子的一种高度不稳定性质, 这个性质当算子的系数发生无穷小的变动时就分遭到破坏. 所以, 一般的 Huygens 原理看来应当被认为是物理现实的正确的表达.

# 第 6 章附录　广义函数——分布

## 6′.1　基本定义和概念

### 6′.1.1　引言

在这个附录中将讨论分布即“广义函数”的概念①. 这些广义函数在前几章里的具体应用将在一个更一般的体系里予以论证.

兹约定, “函数”指的可以是具有 $\kappa$ 个支量的矢量函数, 这些支量函数可以是复值的, 但是自变量 $x$ 永远是一个具有 $n$ 个支量的实的矢量.

这个理论的许多内容长时间以来已经在物理文献和其他地方②起着作用. 但是只有在 Laurent Schwartz 的关于分布的综合性著述③出版以后, 这个论题才在许多专著里予以系统地处理④, 其中有些在精练方面提高了许多⑤. 这个附录着重于讲述这一理论的初等核心, 包括凡是和线性微分方程的研究有关的材料. 略过关于 Fourier 变换理论的应用的详细讨论, 这方面的讨论是很多的了 (不过, 可参考 6.4.4).

### 6′.1.2　理想元

引入“分布”, 最适当的做法是把它作为函数空间里的理想元. 在用增添新的“理想元”去扩张数学对象的一个已给的集合或“空间”$S$ 的时候, 不去把这种新的元定义为原集合 $S$ 里存在着的什么东西, 也不以描写的方式去定义它, 而仅仅用那样一些关系去定义它, 使得原先的基本运算法则在扩张后的集合 $S$ 中仍旧成立, 这是非常基本的数学方法之一. 扩张的目的总是为了去掉出现于原集合 $S$ 中的某些限制.

---

① “分布”这个名字表明, 像 Dirac 的 $\delta$ 函数及其那些导函数之类的广义函数, 可以解释为集中在一些点上的、或者沿着曲线的、或者在曲面上的等的质量的分布, 偶极子的分布等. 然而, 就其一般地应用于微分方程或数学分析上来说“广义函数”这个字眼似乎更直截了当地表明这个概念的真正角色. 本质上, 它和函数之间的关系几乎和实数与通常的数 (指有理数 —— 译者) 之间的关系是一样的.

② 例如, 可以指出 S. L. Sobolev 的一篇论文 [1], 它远远出现在当前的文献热潮之前.

③ 参考 I. Schwartz[1].

④ 例如, 可参看 I. M. Gelfand and G. E. Shilov[1].

还有, 特别应当提到 Lighthill 最近写的着重于 Fourier 分析的一本小书. Lighthill 的书部分地取材于 G. Temple 的一个著作. 见 M. J. Lighthill[2] 和 G. Temple[1], 以及这两本书里所引的其他文献.

⑤ 例如, 可参考 L. Ehrenpreis[1] 的一系例的论文.

正是这样, 在射影几何里, 理想的"无穷远点"是用平行直线的集合去定义的. 在另一些情况中, 理想元是通过依适当的范数用"强"极限步骤把原集合 $S$ 完备化而引入的. 例如, 实数是用有理数 $r_n$ 的收敛序列定义的①, 它的范数 $|r_n - r_m|$ 当 $n$ 和 $m$ 趋于无穷时收敛于零. 相仿地, 可以用连续函数 $f_n(x)$ 的序列去定义 Lebesgue 可积函数和平方可积函数, 这时积分 $\int |f_n - f_m|\mathrm{d}x$ 和 $\int |f_n - f_m|^2\mathrm{d}x$ 在各自的 $x$ 区域上收敛于零. Hilbert 空间里的函数都是由适当光滑的函数 $f_n$ 的序列表示的理想元, 作为其基础的正二次型 $Q(f_n - f_m)$ 收敛于零.

在这些例子中, 扩张了的空间 $\overline{S}$ 都是完备的, 即它们不能用在同样的范数下的收敛再行扩大. 可是, 下面的广义函数定义不强调用适当范数下的收敛去进行完备化②.

引入广义函数, 目的是为了去掉可微性条件这个枷锁, 从而放宽初等线性微积分的有效范围. 把分布当做不同的对象进行运算 (Laurent Schwartz 首先明确地这样作了③) 而不依靠为了这个目的而特别筹划的策略, 是思想方法上一个最值得庆贺的转变; 而且, 把这些对象看成"函数", 就能使某些转累赘的方法得到切实的化简④.

为了本书的目的, 只要用作用在连续函数上的线性微分算子和一个简单的运算法则来引入广义函数 (同第 6 章 6.4 所述) 就够了. 不过, 提出两个它种定义并证明三者的等价性是有益的. 在 6.2, 6.3 中这样做之前, 先回忆第六章的一些记号并予以补充.

### 6′.1.3 记号和定义

对于两个矢量 $y, z$, 如果 $y$ 的支量之一小于 $z$ 的相应的支量, 且 $y$ 的任一支量都不大于 $z$ 的相应的支量, 那么作为定义, 就说 $y < z$.

同第 6 章 6.3 所述, 用 $r$ 记以 $n$ 个非负整数 $r_1, \cdots, r_n$ 为支量的矢量, 用 $|r|$ 记和式 $r_1 + \cdots + r_n$; 有时候把 $(-1)^{|r|}$ 改写为 $(-1)^r$, 有时候还把以 $r_i + 1$ 等为支量的矢量写作 $r + 1$.

此外, $r \to \infty$ 的意思是 $r$ 的一切支量都趋于无穷. 还有, 同 6.3 所述, 定义

① 对于理想元的描写式定义的愿望常常导致逻辑上的兜圈子. 例如命题: 实数是有理数集的 Dedekind 分割. 这种避免用关系来定义理想对象而企图代之以具体的描写似乎没有多大好处.

② 它们是"弱定义". 然而, 应当指出, 对于广义函数来说, 借助于适当范数下的收敛的"强"扩张原理也是适用的. K. O. Friedrichs[4] 曾经强调过弱扩张与强扩张之间的联系与等价性 (参考 6.4.4).

③ 参考 L. Schwartz[1].

④ 例如, I. M. Gelfand and G. E. Shiloff[1].
不要由于这样得到的形式上的化简而产生一种幻想 —— 以为这就能够克服内在困难的核心, 其实不过是把它集中和阐明而已. 常常是真正的困难被推移到最后的一步工作上 —— 阐明用广义函数的语言得到的结论在什么意义上确实可以用普通的函数表达出来.

$r! = r_1!r_2!\cdots r_n!$. 对于 $n$ 维空间里的任一矢量 $\xi$, 定义 $\xi_1^{r_1} = \xi_1^{r_1}\cdots\xi_n^{r_n}$.

用 $\mathscr{I}, \mathscr{I}', \mathscr{I}^*$ 等记 $x$ 空间里的矩形域[①], 例如 $-\alpha < x_i < A$, 或者也可以是整个 $x$ 空间. 通常用 $\overline{\mathscr{I}}, \mathscr{I}'$ 等表示相应的闭域.

当然, 两个函数 $g$ 和 $h$ 的内积 $(g, h)$ 的定义是 $gh$ 在基本区域 $\mathscr{I}$ 上的积分, $\mathscr{I}$ 可以是整个空间.

用 $D^r = D_r^{r_1}\cdots D^{rn}$ 记求导运算, 其中 $D_i$ 的意思是 $\partial/\partial x_i$; 如果要强调 $z$ 是自变矢量, 那么就用 $D_z$ 记相应的求导运算.

有时候, 用符号 $D_i^{-1}, D^{-s}$ 等定义积分算子是有益的, 而且无例外地不指定相应的积分的下限.

用 $C^r$(或 $C^\infty$) 记函数 $\psi$ 的一个这样的空间, 其中 $D^r\psi$(或 $D^\rho\psi, \rho$ 为一切实数) 是连续的或者至少是分片连续的.

最后提醒一下在 $\mathscr{I}$ 上的函数 $\phi$ 的最大范数 $||\phi||$ 或最大 $r$ 范数 $||\phi||_r$ 的定义, 即 $|\phi|$ 或 $\phi$ 的任一导函数的绝对值 $|D^{r'}\phi|$ 在 $\mathscr{I}$ 内的最小上界, 这里 $r' \leqslant r$.

### 6′.1.4　叠积分

设 $\sum$: $x_i < z$ 是 $x$ 空间的一部分, $z$ 是矩形 $\mathscr{I} : 0 < x_i < 1$ 中的一个参变点, 令

$$\left.\begin{aligned} &q_r(x;z) = q(x;z) = \frac{1}{r!}(z-x)^r, \quad \text{当 } x \text{ 在} \textstyle\sum \text{内},\\ &q_r(x;z) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{当 } x \text{ 在} \textstyle\sum \text{外}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其次, 对于一个连续函数 $h(x)$—— 当 $|x|$ 的值很大时在 $\sum$ 内是等于零的, 令

$$G(z) = \int\cdots\int q_r(x;z)h(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

据初等微积分可知

$$D^{r+1}G(z) = h(z). \tag{3}$$

### 6′.1.5　线性泛函与算子 —— 双一次型

提醒线性泛函 $\Lambda[\phi]$ 的一般概念, 它依赖于定义在一个基本区域 $\mathscr{I}$ 上的一个函数 $\phi(x)$, 此外限定它应属于试探函数的一个线性“空间”$\mathfrak{D}$. 例如 $\mathfrak{D}$ 可以是在 $\mathscr{I}$ 的一个子域 $\mathscr{I}'$ 上连续且在 $\mathscr{I}'$ 外为零的函数的集合. 恒等式 $\Lambda[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = c_1\Lambda[\phi_1] + c_2\Lambda[\phi_2]$ 表达了线性泛函的基本性质, 基本 $\phi_1$ 与 $\phi_2$ 是两个试探函数, $c_1$ 与 $c_2$ 是两个任意常数. 在连续性 (见 6′.1.6) 的假定下的一个推论, 若

$$\psi(x) = \int \phi(x;\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4a}$$

① $\mathscr{I}$ 是矩形的, 这只是为了方便而并非必要的.

且若试探函数 $\phi(x;\xi)$ 连续地依赖于积分的 $\xi$ 区域里的参数 $\xi$, 则

$$\Lambda[\psi(x)] = \int \Lambda[\phi(x;\xi)]\mathrm{d}\xi. \tag{4}$$

如果泛函 $\Lambda[\phi(x);y]$ 既依赖于参数 $y$ 又依赖于试探函数 $\phi(x)$, 那么 $\Lambda$ 表示一个由 $\psi(x)$ 到 $\omega(y)$ 的一个线性算子或线性变换:

$$\Lambda[\phi(x);y] = \omega(y)$$

(有时简记为 $\Lambda[\phi] = \omega$). 常常考虑那些情况, 其中变量 $y$ 和变量 $x$ 一样取遍同一个区域 $\mathscr{I}$ 中的值.

凡是可以构成函数 $\omega(y) = \Lambda[\phi]$ 和一个试探函数 $\psi(y)$ 在 $\mathscr{I}$ 上的内积的时候, 称

$$(\omega,\psi) = B[\phi;\psi] = (\Lambda[\phi],\psi) = \int_{\mathscr{I}} \Lambda[\phi(x);y]\psi(y)\mathrm{d}y$$

为附属于算子 $\Lambda$ 的双一次型或双线性泛函. 显然, 当 $\phi$ 固定时它是 $\psi$ 的一个线性泛函, 且当 $\psi$ 固定时它是 $\phi$ 的一个线性泛函. 如果有一个线性算子 $\Lambda^*[\psi]$, 使 $B$ 能够被表达为下列形式

$$B[\phi;\psi] = (\Lambda[\phi],\psi) = (\phi,\Lambda^*[\psi]), \tag{5}$$

那么, 称 $\Lambda^*$ 为 $\Lambda$ 的伴随算子[①].

导函数以及更一般的微分算子, 就其高度局部化性质 (其值不依赖于宗量函数 $\phi(x)$ 在整个 $x$ 区域上的值而仅依赖于它在一个点 $x = y$ 的无穷小邻域上的值) 来说, 都是一些特殊的算子 (在行文中, 也许应当把这样的算子更切实地写成 $\Lambda[\phi(y);x]$, 其中 $x$ 和 $y$ 的角色被交换了. 然而, 将任意使用通常的记号并把微分算子写成 $L[\phi(x)]$, 因为在本书中一向是这样做的).

应当注意, 与此相反, 分数阶的微分算子不是局部化的. 分数阶的微分公式直接表明了这一点.

### 6′.1.6 泛函的连续性. 试探函数的支集

假定今后所说的试探函数 $\phi(x)$ 都是连续的并且每个试探函数在一个有限的支集区域 $\mathscr{I}^*$ 外都恒等于零, 或者说它们有有界的支集, 有时候也说 $\phi$ 是在 $\mathscr{I}^*$ 上的.

此外, 如果对于 $r' \leqslant r$ 的一切导函数 $D^{r'}\phi$ 都是连续的 (即如果 $\phi$ 是“属于 $C^r$ 类”的), 那么就说函数 $\phi$ 构成 $\mathfrak{D}_r$ 类; 如果 $\phi$ 的一切导数都是连续的 (如果 $\phi$ 是在 $C^\infty$ 里), 那么它们构成较狭小的类 $\mathfrak{D}_\infty$, 或简记为 $\mathfrak{D}$. 显然, 若 $r' < r$, 则 $\mathfrak{D}_{r'}$ 包含 $\mathfrak{D}_r$. 如无特别声明, 通常将认为 $\phi$ 是在 $C^\infty$ 里, 即在 $\mathfrak{D}$ 里.

① 关于伴随算子的概念可参看第 3 章附录 I 3′.2.

考虑 $x$ 的一个基本区域 $\mathscr{I}$ 泛函 $\Lambda[\phi]$ (或相仿地一个线性算子) 称为连续的, 如果对于支集在 $\mathscr{I}$ 的任一闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上且具有公共的界: $||\phi|| < m$ 的试探函数 $\varphi$ 而言,

$$\Lambda[\phi_\varepsilon] \to \Lambda[\phi]$$

一致地成立, 其中 $\phi_\varepsilon$ 表示此种试探函数的序列, 当 $\varepsilon \to 0$ 时关于 $x$ 一致地趋于试探函数 $\phi(x)$. 由线性性质, 下述的条件是等价的: 对于支集在 $\mathscr{I}$ 的一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的一切连续的试探函数, 存在着一个固定的正数 $\lambda$, 它适合 $|\Lambda[\phi]| \leqslant \lambda||\phi||$.

一个较弱的连续性概念是如下定义的, 泛函 $\Lambda[\phi]$ 称为在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上是 $r$ 连续的, 如果对于 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的一切属于 $\mathfrak{D}_r$ 的试探函数 $\phi$, 它们的 最大 $r$ 范数 $||\phi||_r$ 以 $m$ 为界, 下列不等式成立:

$$|\Lambda[\phi]| < \lambda m,$$

其中 $\lambda$ 为一固定的正数.

显然, 如果 $r' > r$, 那么 $\Lambda[\phi]$ 的 $r'$ 连续性是一个比 $r$ 连续性较弱的条件. 上述定义中仅仅要求 $||\phi||$ 的有界性的那种连续性比之 $r$ 为任何正数的 $r$ 连续性是一个关于 $\Lambda[\phi]$ 的较强的条件. 可以把这个"通常的"连续性叫做零连续性.

有时需要考虑一个开的基本域 $\mathscr{I}$ 上的泛函 $\Lambda[\phi]$, 它在任一闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上是 $r$ 连续的, $r$ 是某个指标 (可能依赖于 $\mathscr{I}^*$). 将称这样的一个泛函在 $\mathscr{I}$ 上是软连续的. 这个概念足以概括一切有关的情况.

为了形式上的一般性, 有时提出表观上似为较弱的条件是要得的, 它是就整个区域 $\mathscr{I}$ 上最狭小的试探函数类 $\mathfrak{D}$, 即 $\mathfrak{D}_\infty$ 而言的. 设 $m_\nu$ 是任意的正数序列, $\bar{\mathscr{I}}^*$ 是 $\mathscr{I}$ 的任一闭子域. 于是约定对于属于类 $\mathfrak{D}_\infty$ 而支集在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上且适合 $||D^\nu\phi|| \leqslant m_\nu$ 的任一试探函数 $\phi$, 存在着一个界 $\lambda$($\lambda$ 依赖于 $\mathscr{I}^*$ 和序列 $m_\nu$) 它适合 $|\Lambda[\phi]| \leqslant \lambda$.

应当指出, 在这个定义里不要求无穷多个界 $m_\nu$ 的关于 $\nu$ 的有界性. 所以这个定义不能像在 $r$ 连续性的情况下那样用一个最大范数陈述出来①.

有时把这个条件最弱的连续性称为 $\Lambda[\phi]$ 的 $\infty$ 连续性或 $\omega$ 连续性.

在 6′.1.7 中即将看到这个概念并不比软连续性的概念更一般些.

### 6′.1.7　关于 $r$ 连续性的引理

为了把 $r$ 连续性与软连续性和 $\omega$ 连续性进行精细的比较, 在这里应当插入下面的几乎是不足道的一个引理②: 假定 $\Lambda[\phi]$ 在开区域 $\mathscr{I}$ 上是 $\omega$ 连续的, 那么对于每一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 都存在着一个有限的指标 $r$, 对于一切支集在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上具有支集的试探函数来说, $\Lambda$ 在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上甚至还是 $r$ 连续的. 当然, 指标 $r$ 可能依赖于 $\mathscr{I}^*$ 并且

① 空间 $\mathfrak{D}_\infty$ 是不能用一个最大范数来把它度量化的.

② 严格地说它只是一个存在性的命题而在数学物理的应用中是毫不重要的.

当扩大 $\mathscr{I}^*$ 的时候可能需要增大 (有例为证). 换句话说, $\Lambda[\phi]$ 在 $\mathscr{I}$ 上的 $\omega$ 连续性和软连续性是一样的.

引理的证明是间接的, 并且实际就是根据定义的含义的一个简单估算: 假定不管把 $r$ 取得多么大 $\Lambda[\phi]$ 在闭区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 内都不是 $r$ 连续的. 那么对于每一个 $r$ 将会存在一个容许的试探函数 $\phi_r$, 当 $||\phi_r||_r$ 变得任意地小, 例如, $||\phi_r||_r \leqslant 1/(|r|+1)$ 时 $|\Lambda[\phi_r]| > |r|$ (同前所述, $\|\phi\|_r$ 表示闭区域 $\mathscr{I}^*$ 上 $r$ 阶的最大范数). 显然, 当 $r \to \infty$ 时, 序列 $\phi_r$ 在 $\mathscr{I}^*$ 上一致收敛于零, 并且对于固定的 $r'$ 每一个导函数 $D^{r'}\phi_r$ 也是这样. 根据以 $m_r = \max\limits_{一切\gamma'} ||\phi_{r'}||_r$ 在 $\mathfrak{D}$ 里的 $\omega$ 连续性, 可知 $\Lambda[\phi_r]$ 必是有界的, 这和 $|\Lambda[\phi_r]| > |\gamma|$ 是矛盾的. 这就完成了间接的证明.

### 6′.1.8 几个辅助函数

为了供 6′.2 中查阅, 构造出具有有界支集而属于 $C^\infty$ 类的几个特定的函数. 首先考虑一个自变量 $x$ 并对于正的 $\alpha$ 令

$$p(x;\alpha) = \begin{cases} \mathrm{e}^{z(x,\alpha)}, & 当 -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 0, & 当 x < -\alpha, \\ 1, & 当 x > \alpha, \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$z(x;\alpha) = -\mathrm{e}^{x/(x^2-\alpha^2)}. \tag{6a}$$

这个函数 $p$ 当 $x < -\alpha$ 时恒等于零, 当 $x > \alpha$ 时恒等于 1, 并且属于 $C^\infty$. 乘积

$$P(x;\alpha) = p(x_1;\alpha)p(x_2;\alpha)\cdots p(x_n;\alpha) \tag{6b}$$

是 $C^\infty$ 里的 $n$ 个变量 $x$ 的函数, 它当 $x \leqslant -\alpha$ 时 ($x_i \leqslant \alpha$ 时) 恒等于零, 并且在区域 $x \geqslant \alpha$ 上恒等于 1.

相仿地, 一个自变量 $x$ 的函数

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x;\varepsilon) \tag{7}$$

是属于 $C^\infty$ 的, 并且在区间 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 之外恒等于零. 对于每个 $\varepsilon$ 值皆有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{8}$$

令 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, 可以把 $\delta_\varepsilon$ 改写为 $\delta_n$, 并且对于 $\mathscr{I}$ 上的任何连续函数 $\phi(x)$ 皆有

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim \int_{\mathscr{I}} \delta_n(x-\xi)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \lim(\phi, \delta_n(x-\xi)). \end{aligned} \tag{9}$$

这是众所周知的. 这个极限过程的意思永远是取 $n \to \infty$ 即 $\varepsilon \to 0$ 时的极限.

### 6′.1.9　例

下面几个例子说明几个连续性概念. 令 $x$ 为单个变量, $\mathscr{I}$ 是开区间 $0 < x < 1$; 于是, 对于 $\mathfrak{D}_0$ 中的 $\phi(x)$ 来说, $\phi(0)$ 是 $\phi(x)$ 的一个连续泛函. 量 $D^r(\phi(0)) = \phi^r(0)$ 是 $\mathscr{I}$ 上的一个 $r$ 连续泛函.

然而, 读者可以证实, 从 6′.1.6 的定义看, 符号

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\phi^\nu(0)}{\nu!} \tag{10}$$

并不表示 $\phi$ 的一个连续泛函.

相反地, 如果 $\phi$ 的支集是在一个闭子区间 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上, 例如, 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1-1/r$ 上, 那么级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \phi^\nu \left(1-\frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\nu} D^\nu \phi \left(1-\frac{1}{\nu}\right) \tag{11}$$

是收敛的, 且是 $r$ 连续的. 当 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 向 $\mathscr{I}$ 扩展时指标 $r$ 跟着也增大, 而对于整个开的 $x$ 区域 $\mathscr{I}$ 来说, 表达式 (11) 显然不是 $r$ 连续的. 不过, 就全部空间 $\mathfrak{D}_\infty$ 而论它是 $\omega$ 连续的.

不同于上述的例子的是, 就支集在 $\mathscr{I}: 0 < x < 1$ 上的函数空间 $\mathfrak{D}_1$ 而论, 表达式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \phi' \left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$

表示域 $\mathscr{I}$ 上的一个 1 连续的泛函. 相仿地, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu)$ 以整个 $x$ 轴作为基本域而言是连续的.

## 6′.2　广 义 函 数

### 6′.2.1　引言

在转向理论要点的时候, 给出广义函数的三个不同的定义[①], 然后再证明它们的等价性. 通常的函数概念的这些推广都是以弱定义的和弱收敛的原理为基础. 要刻画 $\mathscr{I}$ 上的一个连续函数 $f$, 完全可以不用它在 $\mathscr{I}$ 上所取的值而代之以它和属于类 $\mathfrak{D}$(其支集在 $\mathscr{I}$ 上) 的一切试探函数的内积 $(f, \phi)$ 的全体[②]. 对于连续函数 $f$

---

① 如前所说, 这些定义都不是描写式的.

② 回忆:“一个试探函数是在 $\mathscr{I}$ 上”的含意是它的支集是在 $\mathscr{I}$ 上; “一个在 $\mathscr{I}$ 上的泛函 $\Lambda[\phi]$”的含意是试探函数 $\phi$ 的支集应在 $\mathscr{I}$ 上. 内积 $(f, g)$ 永远是针对某个基本域 $\mathscr{I}$ 而言. 还有, 可以定义: 如果一个泛函对于一切在 $\mathscr{I}$ 上为零的试探函数皆为零, 那么这个泛函的支集就是在 $\mathscr{I}$ 上的.

来说, 当 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_0$ 由连续函数组成时, 这个“弱”定义和通常的定义是等价的. 然而, 正是这个弱定义开辟了推广的道路: 抛开原先的“函数”定义 —— 由它在 $x$ 处的取值去说明它, 而考虑把它与普通试探函数 $\phi$ 的内积 $(f,\phi)$ 的值作为函数符号 $f$ 的详尽的刻画: 为了把“函数”符号作为内积 $(f,\phi)$ 的一个符号因子而引入, 关键的一步是赋予内积 $(f,\phi)$ 一个恰当的定义, 即这样的一个定义, 其并不预先假定此外还知道 $f$ 是别的什么东西. 三个定义在如何定义内积上略有不同. 如前所说, 主要的目标是要在扩张了的广义函数集合 $S$ 赋予任意可微分性, 并且附带地把线性泛函一般地表示成内积的形式.

三个定义的基础分别是: a) 线性微分算子, b) 连续函数的弱极限, c) 线性泛函的一般概念. 在每一种情况里, 只需对于 $\mathscr{I}$ 的一个有限闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 给出定义, 然后就可以轻而易举地把它们扩展到包含 $\mathscr{I}^*$ 的区域 $\mathscr{I}$ 上. 为简明起见, 假定区域 $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}^*$ 等都是矩形的[①].

在 6′.2.6 中即将看到, 广义函数形成一个线性空间, 即广义函数的和与适当的线性组合仍是广义函数.

### 6′.2.2 用线性微分算子去定义

对于在 $\mathscr{I}$ 的一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上且具有连续可微系数的 $r$ 阶的任一对伴随线性微分算子 $L$ 与 $L^*$ 和 $\mathscr{I}^*$ 上任一连续的或仅仅是分片连续的函数 $W$, 用符号

$$f=L[W]$$

表示 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的一个广义函数, 并用下列内积的定义给这个符号一个意义:

$$(f,\phi)=(L[W],\phi)=(W,L^*[\phi]),\tag{1}$$

其中试探函数 $\phi$ 是属于 $C_r$ 的且其支集在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上.

分别为 $r$ 阶和 $s$ 阶的两个这样的线性算子 $L$ 与 $M$, 连同普通的函数 $W$ 与 $V$, 如果对于 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的一切 $\phi$ 皆适合关系 $(W,L^*[\phi])=(V,M^*[\phi])$, 那么它们定义 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的同一个广义函数 $f$.

再者, 如果算子 $M$, $M^*$ 和函数 $V$ 在包含 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 的一个区域 $\hat{\mathscr{I}}$ 上被确定了, 那么借助符号 $M[V]$ 可以把广义函数 $f$ 扩展到 $\hat{\mathscr{I}}$ 上[②]. 如果对于某个开的基本域 $\mathscr{I}$ 的任一闭子域, 泛函 $f$ 都被确定了, 那么这个泛函也就对于该基本域被确定了.

这个定义a) 转述了第 6 章 6.4 的讨论, 是受 Green 恒等式

$$(W,L^*[\phi])=(\phi,L[W])$$

① 由于其他闭域永远可以被正方形覆盖, 容许更一般的区域是没有困难的. 但是为了达到目的, 完全可以避免这一点的复杂性.

② 对于较大的区域, 可能需要大于 $r$ 的指示 $s$.

的启发而来的, 这个恒等式对于 $C^r$ 里的普通函数 $W$ 是成立的, 因为 $\phi$ 的支集是在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上. 再次强调仅仅在这样独立地定义了内积的行文里广义函数 $f$ 才出现而有其意义.

特别重要的是伴随算子

$$L[M] = D^r W, \quad L^*[\phi] = (-1)^{|r|} D^r \phi.$$

当然, 在单变量 $x$ 的情况下, 一个连续函数 $W$ 的各阶导数 $D^r W = f$ 根据定义 a) 由内积 (1) 刻画了一些广义函数, $D^r$ 表示对 $x$ 求导.

在任意 $n$ 个自变量的情况下, 对于任何指标 $s$, 线性微分算子 $N = D^s L$ 定义了导函数 $D^s f = D^s L[W]$. 仍然假定 $N$ 和 $N^*$ 的系数都是连续的, 可以把广义函数微分任意多次. 关于系数的假设事实上是无关紧要的, 因为将会在 $6'.2.5$ 中看到, $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的每一个广义函数都可以表示为特殊的形式 $f = D^r W$, 其中 $r$ 是一个适当大的指标, $W$ 是一个连续的“母函数”.

增述一个要点：内积 $(f, \phi)$ 显然是 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的试探函数 $\phi$ 的 $r$ 连续线性泛函.

可以用 $6'.1$ 中的例子来说明现在的定义.

在单变量 $x$ 的情况下, 用 $g(x)$ 表示一个这样的函数, 当 $x > 0$ 时它等于 $g(x)$, 并且当 $x < 0$ 时它等于零; 于是对于算子 $L = D^2$ 和函数 $W = x^2/2$ 得到

$$D^3 W = \delta(x).$$

其中 $\delta$ 表示 $\delta$ 函数. 或者, 用明显的记号, 取 $W(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}(x - x_\nu)^2$, 则

$$D^3 W = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta(x - x_\nu),$$

其中当 $\nu \to \infty$, 时 $x_\nu \to \infty$. 这里区域 $\mathscr{I}$ 是整个 $x$ 轴. 如果 $x_\nu^2$ 收敛于一个极限, 例如 1, 那么就选取开区间 $-1 < x < 1$ 作为 $\mathscr{I}$.

对于

$$W(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(x - \nu)^\nu \frac{1}{\nu!},$$

不能用 $r$ 为定数的单个算子 $D^r$ 在整个无穷区域如 $-\infty < x < \infty$ 上构成一个广义函数, 但是对于区间 $\mathscr{I}^* : -\frac{1}{2} - r < x < \frac{1}{2} + r$ 有相应的表达式

$$D^{r+2} W = \delta^r(x-1) + \delta^{(r-1)}(x-2) + \cdots + \delta(x-r).$$

当然, 即使 $r$ 无限地增大, 所有这些广义函数在同一个固定的子区间 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上都是相同的.

读者可以自己作出其他例子去说明上面的概念.

### $6'.2.3$ 用弱极限去定义

考虑一列函数 $f_n$, 其在基本区域 $\mathscr{I}$ 上都是连续的. 对于一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 和 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的试探函数 $\phi$, 假定内积

$$((f_n - f_l), \phi),$$

当 $n \to \infty$ 且 $l \to \infty$ 时对于一切函数 $\phi$ 一致地趋于零, 这些函数对于某个固定的指标 $r$ 以相同的最大 $r$ 范数 $m$ 为界: $\|\phi\|_r \leqslant m$. 这时称序列 $f_n$ 在 $\mathscr{I}^*$ 上是弱$r$收敛的. 现在赋予这样的序列 $f_n$ 当 $n \to \infty$ 时的一个理想极限: $f = \lim f_n$, 并且借助定义内积

$$(f, \phi) = \lim(f_n, \phi) \tag{2}$$

来刻画这个 $\mathscr{I}^*$ 上的广义函数 $f$.

这个定义 b) 对于同一个指标 $r$ 在整个基本区域 $\mathscr{I}$ 上常常是有效的. 不过, 为了一般性, 当扩大区域 $\mathscr{I}^*$ 的时候, 必须许可用一个较大的指标去代替指标 $r$, 从而对 $f_n$ 的收敛性提出了较弱的要求. 于是, 假定对于每一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 都存在一个指标 $r$, 就这个指标来说, 序列 $f_n$ 在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上是弱 $r$ 收敛的, 利用这个假定, 把整个基本区域 $\mathscr{I}$ 上的连续函数列 $f_n$ 的软的弱极限定义作 $\mathscr{I}$ 上的一个广义函数.

应当再次强调, $f$ 在 $\mathscr{I}^*$ 上的弱 $r$ 收敛性包含着指标为 $r' > r$ 时的弱 $r'$ 收敛性, 因为当 $r' > r$ 时 $r$ 收敛性的要求比 $r'$ 收敛性的要求更严些.

所以, 约束性最强的弱收敛定义是零收敛, 即仅仅假定了 $\|\phi\|$ 的一致有界性的弱收敛. 相反, 上述用软条件定义的基本域 $\mathscr{I}$ 上的弱收敛性概括了序列 $f_n$ 的广大得多的集合①.

对于序列 $f_n$ 的限制最少的在 $\mathscr{I}$ 上的弱收敛性的规定可以叫做弱 $\omega$ 收敛性, 它要求 $f_n$ 关于在每个子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上具有有界支集且属于 $C^\infty$ 的一切试探函数 $\phi$ 一致地弱收敛, 只要 $\|\phi\|_\nu \leqslant m_\nu$, 其中 $m_\nu$ 是任意选取的正界. 不过, 同前所述 (见 $6'.1.7$), 软的弱收敛和 $\omega$ 弱收敛是等价的, 所以完全不需要采用后一个概念.

重要的是这样一个事实: $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的弱极限 $(f, \phi)$ 是 $\phi$ 的一个 $r$ 连续的线性泛函. 对于整个基本区域 $\mathscr{I}$ 而言, 极限 $\lim(f, \phi) = \lim(f_n, \phi)$ 在上述的意义下是 $\phi$ 的一个连续的线性泛函.

在 $n = 1$ 的情况下, $\delta$ 函数 $\delta(x)$ 是 $6'.1.8$ 中定义的函数 $\delta_n(x)$ 的弱极限 $(r = 0)$, 当然也是每一个那样的函数的序列 $f_n$ 的弱极限, 它们在 $x^2 < 1/n$ 之外都趋于零, 都是非负的, 并且 $\displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} f_n \mathrm{d}x \to 1$.

① 顺便指出, 可以对于负的指标 $r$ 引入弱 $r$ 收敛性; 但是对于这里特定的目的而论, 那样作不会得到什么好处.

### 6′.2.4　用线性泛函去定义

如果把定义 a) 和 b) 的结论与前提颠倒过来, 那么就产生了定义的第三个不同说法记为定义 c): 对于在基本区域 $\mathscr{I}$ 上为 $r$ 连续的或者仅仅是软连续的每一个线性泛函 $\Lambda[\phi]$, 只要定义

$$(f, \phi) = \Lambda[\phi] \tag{3}$$

作为内积 $(f, \phi)$, 就得到一个广义函数 $f$. 这就是说, 对于 $\mathscr{I}$ 的一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的那些容许的试探函数 $\phi$, 泛函 $\Lambda[\phi]$ 在那里是 $r$ 连续的, 则关系 (3) 构成 $f$ 的弱定义.

顺便指出, 6′.1 中的引理表明了完全可以从假定 $\Lambda[\phi]$ 在 $\mathscr{I}$ 上的 $\omega$ 连续性出发.

无论如何, 避免了给引理外加存在性方面的内函, 而从这样一个假设着手: 对于 $\mathscr{I}$ 的每一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$, 泛函 $\Lambda[\phi]$ 在适当选取的指标 $r$ 下有 $r$ 连续性.

回忆: 如果 $\Lambda[\phi]$ 在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上是 $r$ 连续的, 可以用 $\mathscr{I}^*$ 上的试探函数 $\psi$ 去代替 $\phi$, 而 $\psi$ 只需当 $r' \leqslant r$ 时有连续的导函数 $D^{r'}\psi$. 这样的函数及其直到 $r$ 阶的导函数 $D^r\psi$ 都可以用 $C^\infty$ 里的 $\phi_n$ 一致逼近之, 因此由约定的 $r$ 连续性, $\Lambda[\psi]$ 的值被定义为数列 $\Lambda[\phi_n]$ 当 $n \to \infty$ 时相应的极限值.

在考察下述问题时便可立即发现定义 c) 的一些抽象性.

### 6′.2.5　等价性. 泛函的表示

上述的三个定义都是等价的.

首先, 如所指出, a) 和 b) 定义了泛函 $(f, \phi)$ 享有性质 c). 而且, 由定义 c) 容易推出定义 b) 的特性. 例如, 按 6′.1.8 中的 (9), 写下

$$\Lambda[\phi] = \lim \int \phi(\xi) \Lambda[\delta_n(x - \xi)] \mathrm{d}\xi$$

就看到了这一点, 因为函数 $\delta_n(x - \xi)$ 是属于 $C^\infty$ 的, 所以按照定义 b), 当 $n \to \infty$ 时便得到

$$\Lambda[\phi] = \lim(f_n, \phi), \tag{4}$$

其中

$$f_n(x) = \Lambda[\delta_n(x - \xi)]. \tag{5}$$

因此只需再证实定义 c) 和定义 a) 的等价性.

为了这个目的, 假定所论泛函在 $\bar{\mathscr{I}}$ 的一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^{**}$ 上有 $r-2$ 连续的①. 为简单计②, 假定区域 $\bar{\mathscr{I}}^{**}$ 为正方形 $-\alpha \leqslant x_i \leqslant 1 + \alpha$($\alpha$ 是一个小正数) 且区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$

① 当然, 因为假定了 $\Lambda[\phi]$ 的连续性指标是非负的, 这就隐含着 $r \geqslant 2$(当 $i = 1, \cdots, n$ 时, 皆有 $r_i \geqslant 2$).

② 如前所说, 把区域 $\mathscr{I}, \mathscr{I}^*$ 和 $\mathscr{I}^{**}$ 特别地取为矩形的形式, 这不是本质的而只是为了方便.

为正方形 $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, 而基本区域 $\mathscr{I}$ 应当包括较大的正方形 $-2\alpha < x_i < 1 + 2\alpha$.

于是, 由下面的主要表示定理可推出定义 c) 和定义 a) 的等价性. 定理: 如果泛函 $\varLambda[\phi]$ 在包括 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 的一个区域 $\bar{\mathscr{I}}^{**}$ 上是 $r-2$ 连续的 $(r-2 \geqslant 0)$, 那么能够对于 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 构造出这样一个连续函数 $W$, 使得对于支集在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 中的一切试探函数 $\phi$ 皆有

$$\pm\varLambda[\phi] = (W, D^r\phi), \tag{6}$$

其中 $\pm$ 代表 $(-1)^{|r|}$, 并且

$$W = \varLambda[\psi] \tag{6a}$$

将在下面用函数 $\psi$ 明显地表达出来.

这是当线性微分算子 $L$ 取一个特别简单的正规形式 $D^r$ 时定义 a) 的特性[①].

为了证明 (6) 和构造 $W$, 可以把未必属于 $C^\infty$ 而仅仅是 $\mathscr{I}^{**}$ 上的 $r-2$ 连续函数代入 $\varLambda[\phi]$(参考 6′.2.3). 特别地, 利用 6′.1.4 和 6′.1.8 中定义的函数 $q_r(x;z)$ 和 $p(x;\alpha)$ 来定义这样一个试探函数 $\psi$:

$$\psi(x,z) = p(x;\alpha)q_{r-1}(x;z), \tag{6b}$$

其中 $z$ 是 $\mathscr{I}^*$ 里的参变点. 对于一个给定的近似的标号 $n$ 和 $f_n(x)$ 的定义 (5), 由

$$(f_n, \psi) = W_n(z)$$

给出了 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 里的参数 $z$ 的一个连续函数; 而且, 由 (5) 极限函数

$$\begin{aligned} W(z) &= \lim W_n(z) = \lim(f_n, \psi) \\ &= \lim(pf_n, q) = \varLambda[\psi] \end{aligned} \tag{7}$$

是 $z$ 的连续函数. 此外, 由 6′.1.4 中公式 (3) 所示的函数 $q_r$ 的基本性质, 函数 $W_n$ 都具有阶数直到指标 $r$ 的连续导函数, 它们适合 $D^r(W) = pf_n$; 并且因为在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上 $p=1$ 而有

$$D^r W_n = f_n(z) \quad (\text{在 } \bar{\mathscr{I}}^* \text{ 上}). \tag{8}$$

最后, 转回到支集仅在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上且属于 $C^\infty$ 的任意试探函数 $\phi$ 的泛函 $\varLambda[\phi] = \lim(f_n, \phi)$. 利用分部积分法得到[②]

$$\varLambda[\phi] = \lim(D^r W_n, \phi) = \pm\lim(W_n, D^r\phi).$$

---

① 附带的结论是对于任何一个这样的微分算子 $L$ 在 $\mathscr{I}^*$ 上存在着一个线性算子 $T$(本质上是积分算子 $(D^{-r}L)^{-1}$) 对于某个 $r$ 值适合 $LT = D^r$. 当然, 这个事实可以作为初等微积分的一个习题而容易明显地被证实.

② 这里以及其他地方的符号 $\pm$ 的意思是 $(-1)^{|r|}$.

在最后这个表达式中, 在积分号下取极限而得到

$$\Lambda[\phi] = \pm(W, D^r\phi),$$

其中 $W = \Lambda[\psi]$, 正如定理所述.

应当再次强调, 如果把 $W$ 换成 $W+V$, 其中 $V$ 是 $C_r$ 里的一个函数, 或者甚至是一个适当的广义函数, 只要它的 $D^rV$ 恒等于零, 那么带有上述所构造的"母函数" $W$ 的这个关系仍然成立.

还要着重指出: 如果在前面的广义函数定义中

$$f_n(z) = \Lambda(\delta_n(x-z)) \to f(z),$$

其中 $f$ 是一个连续函数, 那么对于母函数 $W$ 来说, 导函数 $D^rW$ 在通常的意义上存在, 并且 $D^rW = f$.

同样, 如果在定义a)或b)中 $L[W] = f$ 在一个区域 $\mathscr{I}'$ 上作为一个正则的连续微分算子而存在, 或者 $f_n$ 一致收敛于一个连续函数 $f$, 那么在 $\mathscr{I}'$ 上广义函数等同于连续函数 $f$(参考 6′.2.8).

### 6′.2.6　几个结论

由这些等价的定义可知下列几个明显的事实.

广义函数 $f$ 与 $g$ 的和仍是一个广义函数. 如果 $f$ 与 $g$ 都是 $r-2$ 连续的, 那么其和也是 $r-2$ 连续的 $(r-2 \geqslant 0)$.

广义函数 $f$ 与一个通常的属于 $C^\infty$ 的函数 $g$ 的乘积仍是一个广义函数. 如果在区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上仅假定了 $f$ 是 $r-2$ 连续的而 $g$ 只是属于 $C^{r-1}$ 的, 那么它们的乘积仍是一个 $r-2$ 连续的广义函数.

局部化与分解. 一个广义函数 $f(x)$ 虽然形式上在孤立点处是没有定义的, 但是可将它局限到一个任意小的闭区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上, 只要限于取那样的试探函数 $\phi$, 它们的支集是在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的. 此外, 将在 6′.2.8 中讨论, 任何一个广义函数 $f$ 都可以分解为两个或多个广义函数之和, 它们之中的每一个都各自仅在某个闭区域上不等于零, 而这些闭区域在一起覆盖住基本域 $\mathscr{I}$.

### 6′.2.7　例子. $\delta$ 函数

Dirac 的 $\delta$ 函数又一次说明了前面的一般概念. 在单变量 $x$ 的情况, $\delta$ 函数的定义是 $\delta(x) = D^2(.x)$, 其中函数前边的一个点表示当自变量取负值时函数的值定义为零. 连带的线性泛函 $\Lambda[\phi] = (\delta(x), \phi) = \phi(0)$ 显然是零连续的.

顺便指出, 这个例子表明了在 6′.2.5 的表示定理中用一个连续函数 $W$ 的导函数 $D^rW$ 去表现 $r-2$ 连续泛函时由 $r-2$ 跨到 $r$ 是适当的.

$n$ 维的 $\delta$ 函数 $\delta(x)$ 可定义为

$$\delta(x) = D^2 W,$$

其中 $W = (.x_1)(.x_2)\cdots(.x_n)$, 或者也可以简单定义为下列的乘积：

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n).$$

其仍然相应于泛函 $\Lambda[\phi] = \phi(0)$.

$\delta$ 函数及其导函数 (参考下述内容) 是那样一些最简单的广义函数, 它们的仅有的支集凝缩为一个点 $O$ 并且 (参考 6′.2.8) 在这个点 $O$ 以外等同于恒等于零的正则函数.

当然, 导函数 $D^s\delta(x)$ 被定义为母函数 $W$ 的相应的导函数 $D^{s+2}W$, 或者是函数 $f_n$ 的导数的极限, 这些 $f_n$ 的弱极限定义了 $\delta(x)$.

由 $W$ 或 $f_n$ 经过简单的符号的演变, 可知 $\delta$ 函数是一个偶函数

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

并且它的各阶导数交替地是奇函数或偶函数.

增加几个用弱极限表现一维 $\delta$ 函数的公式：

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}, \tag{9}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x}. \tag{10}$$

这些公式分别表达了讨论传热方程和 Fourier 级数时众所周知的事实. 后一个公式还可以写为

$$2\pi\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi,$$

或者简单地写为 (见 6′.4.3)

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}\xi, \tag{11}$$

这正是“恒等于 1 的函数的 Fourier 变式”(顺便指出, 公式 (9) 是一个零收敛的例子, 而公式 (10) 是一个一收敛的例子). 另一个有趣的表示直接得自位势理论中对于上半平面上的 Green 函数的 Poisson 积分公式. 显然, $\delta(x)$ 简单地以符号表示了 Green 函数在 $y = 0$ 上的边界值：

$$\pi\delta(x) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{12}$$

### 6′.2.8　广义函数与通常函数的等同

广义函数理论的最大一般性并不总是解决个别问题的合适的门路. 在大多数情况下, 限于考虑较狭小但是较明确的广义函数类是有利的, 特别是那样一些广义函数, 它们在 $\mathscr{I}$ 的某些子区域上可以分别和一些通常的函数等同起来. 如果在 $\mathscr{I}$ 的一个闭子域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上母函数 $W$ 具有直到 $r$ 阶的连续导函数①, 那么在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上广义函数 $D^rW$ 应当而且也永远是等同于通常的函数 $f(x)$ 的. 同样, 如果母序列在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上不只是弱收敛而且还是一致地收敛于一个连续函数 $f(x)$(或者, 鉴于定义 c), 如果 $f_n = \Lambda[\delta_n(x-\xi)]$ 在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上收敛于一个连续函数 $f$, 那么也可以断定这个等同性. 插进一个附带的注记: 如果 $\mathscr{I}$ 被有限个区域 $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2, \cdots$ 覆盖, 那么恒可把任一个容许的试探函数 $\phi$ 分解为一些容许的试探函数 $\phi_\nu$ 的和, $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots$, 其中 $\phi_\nu$ 的支集仅仅在 $\mathscr{I}_\nu$ 上; 于是 $\mathscr{I}$ 上的任何一个广义函数 $f$ 都是这样一些广义函数 $f_\nu$ 的和: $f = f_1 + f_2 + \cdots$, 其中 $f_\nu$ 在 $\mathscr{I}_\nu$ 之外恒等于零.

特别地, 在大多数具体情况下, 涉及的都是这样一些广义函数 $f = D^rW$, 它们除了在一个较大的区域 $G$ 的某个子域 $G^*$ 中具有集中于局部的奇异性外处处是普通的函数, 而在 $G^*$ 之外母函数 $W$ 具有连续的偏导函数 $D^rW$, 或者等价地说, 母序列 $f_n$ 不仅仅弱收敛而且还一致收敛于一个连续函数 $f$. 点集 $G^*$ 常常是由一些孤立的点、线等组成的. 函数 $D^rW$ 在这些奇异点处可以具有通常意义下的奇异性, 但是如果把 $f$ 看成广义函数时, 这些奇异性仅按照关于广义函数所建立的法则 (按照内积的定义) 而进入到运算里; 在集 $G^*$ 之外, 无需强调 $D^rW$ 为广义函数的特性. 曾经在第 6 章 6.4 中按这个意义去对于奇异函数 $S(\phi)$ 进行运算, 它的奇异性是集中在一个流形 $\phi = 0$ 上的②, 并且它呈现为单变量 $\phi$ 的广义函数.

再列出单变量 $x$ 的几个函数 $W$, 其导函数具有孤立的奇异点 $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&W = x\log|x| - x,\quad DW = \log|x|,\quad D^2W = \frac{1}{x},\quad D^3W = \frac{-1}{x^2},\\
&W = .(x\log|x| - x),\quad DW = .\log|x|,\quad D^2W = .\frac{1}{x},\quad D^3W = .\frac{-1}{x^2},\\
&W = .x^\alpha,\quad DW = .\alpha x^{\alpha-1},\quad D^2W = .\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \cdots (0 < \alpha < 1).
\end{aligned}
$$

在奇异点处, 这些表达式作为广义函数的含意和作为通常函数的含意是大不相同的. 并未在 $x = 0$ 处赋予广义函数以无穷大值, 相反地, 而是弱定义消除了奇异性的作用 (6′.2.9).

由 6′.2.5 的讨论立即知道这些定义的相容性是明显的.

容易证明一个推论: 支集仅在一个点上(不妨说在原点上)的广义函数必是 $n$ 维的 $\delta$ 函数及其直到某阶的导函数的线性组合.

① 注意这件事是有益的: 在定义里恒可将关于 $W$ 或 $f_n$ 的连续性条件换为较弱的分块连续性条件.

② 不要把这个 $\phi$ 与试探函数混为一谈.

实际上, 容易看出, 在 $6'.2.5$ 中给 $f$ 的母函数 $W$ 在"正"的一段空间 $x_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ 内作出了低于 $r$ 次的一个多项式, 而 $W$ 在这段 $x$ 空间之外恒等于零. 事实上, 在小正方形 $Q_\varepsilon : |x_i| < \varepsilon$ 之外, 函数 $f_n$ 在那样的作法中恒等于零. 由于当 $z$ 为区域 $z_i \geqslant -\varepsilon$ 之外的任一点时, 在作为定义的内积 $W_n(z) = (f_n, \psi)$ 中两个因子之一恒等于零, 所以对于这个区域之外的点 $z$ 而言, $W_n(z) = 0$. 此外, 当 $z_i \geqslant 0$ 时, 因子 $\psi(x; z)$ 是 $x$ 的低于 $r$ 次的多项式. 由 $W_n(z) \to W(z)$, 遂得上述关于 $W(z)$ 的论断. 所以 $W$ 是单项式 $(.x_1^{r'_i}) \cdots (.x_n^{r'_n})$ 的和, 其中 $r'_i \leqslant r_i - 1$ 或 $r' \leqslant r - 1$, 有些指数 $r'_i$ 可以是零. 显然, 把算子 $D^r$ 作用于这个单项式, 对于 $D^r W$ 所得到的是导函数 $D_i^{r_i}(.x_i)^{r'} = D_i^{s_i} D_i D_i^{r'_i}(.x_i)^{r'_i} = D_i^{s_i}\delta(x_i)$ 的乘积. 这个乘积, 除了一个常数因子外, 可以写成 $D^s\delta(x)$, 其中 $s = r - r' - 1$ 是一个非负的指标, 即一组非负的整数. 把由不同的单项式得来的所有那些相应的结果都加到一起就得到所说的结论.

给出上述这个定理的另一不同的证明而不以 $6'.2.5$ 中的作法为根据, 前提是对于在原点的邻域上为零且具有低于 $r$ 阶的连续导函数 $D^{r'}\phi$ 的一切试探函数而言泛函 $(f, \phi)$ 皆等于零. 然后证明 $(f, \phi)$ 对于任意的 $\phi$ 仅依赖于 $\phi$ 及其导函数 $D^{r'}\phi$ 在原点的值, 也就是说, 当 $\phi$ 和 $\phi$ 的这些导函数在原点等于零时 $(f, \phi)$ 等于零. 现在, 利用 $6'.1.7$ 中的 $P(x; \alpha)$, 取 $\alpha = 1/n$, 作出 $Q = 1 - P$ 和 $\phi_n = Q\phi$. 当 $n \to \infty$ 时, 函数 $\phi_n$ 和它们的低于 $r$ 阶的导函数各自一致地趋于 $\phi$ 和它的相应的导函数. 因为 $(f, \phi)$ 是 $\phi$ 的一个 $r - 1$ 连续的线性泛函并且 $(f, \phi_n) = 0$, 所以得到 $(f, \phi) = \lim\limits_{\alpha \to 0}(f, \phi_n) = 0$, 正如所说. 由于 $(f, \phi)$ 仅依赖于 $\phi$ 在原点的有限个导数, 必须是这些导数的一个线性组合. 这个事实表达了定理.

### $6'.2.9$ 定积分. 有限部分

现在来讲"广义函数的定积分"问题. 表示式 $f = D^r W$ 直接给出广义函数 $f = D^r W$ 的原函数或不定积分 $D^{-s}f$ 概念的含义. 可以将它们简单地定义为函数 $D^r D^{-s} W$, 其中 $s \leqslant r$. 由 $6'.2.8$ 知原函数在何种意义上是尚未确定的.

为了讨论广义函数 $f = D^r W$ 在一个区域 $G$ 上的定积分, 在这一小节中只考虑这样的广义函数 $f$, 它们除了在 $G$ 的一个闭子域 $\bar{G}^*$ 上是正则的连续函数并且直到 $G$ 的 (光滑的) 边界 $\varGamma$ 上都是连续的.

结论将是对于这样的广义函数来说, 原函数与定积分之间的关系, 即微积分的基本定理仍然成立.

先考虑单独一个自变量 $x$ 的广义函数 $f$, 并且把 $G$ 取为区间 $-1 < x < 1$. 假定 $D^r W = f$ 在端点 $x = 1$ 和 $x = -1$ 的某个邻域上是连续的. 应当赋予符号 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 一个什么数值 $Z$ 呢? 为了找到答案, 考虑一个试探函数 $\phi$, 它在 $G$ 上恒等于 1, 因而其各阶导函数在 $G$ 的边界上都等于零, 并且此外被任意地扩展到与 $G$

成互补的区域 $G^\wedge = \mathscr{I} - G$ 上, 但其支集需是有界的. 现在进行分部积分, 则得

$$\begin{aligned}\pm(f,\phi) &= \pm\int(\phi D^r W)\mathrm{d}x = \int_{G+G^\wedge} W\cdot D^r\phi\mathrm{d}x = \int_{G^\wedge} WD^r\phi\mathrm{d}x \\ &= \pm\int_{G^\wedge}\phi D^r W\mathrm{d}x + D^{r-1}W\Big|_{x=-1}^{x=+1},\end{aligned}$$

其中 $\pm1$ 仍旧代表 $(-1)^r$. 另一方面, 自然必须定义 $Z = (f,\phi) - \int_{G^\wedge} f\phi\mathrm{d}x$. 于是得到结论：在积分区间 $G: x^2 < 1$ 的端点的邻域上为正则的广义函数 $f$ 在此区间上的积分应当定义如下：

$$Z = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = D^{r-1}W\Big|_{-1}^{+1}. \tag{13}$$

这正是对于处处为通常的函数 $f$ 联系定积分与不定积分的公式. 顺便指出, 对于广义函数 $f = W'$, 即 $r = 1$ 时, 即使 $W$ 在边界点上不是可微分的, 这个结论仍然成立.

Hadamard 在他的关于 Cauchy 问题的创造性的研究工作中曾经把 $Z$ 的值 (13) 作为 $f$ 的积分的有限部分而引入并用作一个基本工具.

当然, 如果考虑形式为 $f = gD^r W$ 的被积函数, 其中 $g(x)$ 是一个 $r$ 连续的正则因子, 那么将会有一个类似的但稍繁一些的公式. $f$ 的这个形式可以化为上述的形式, 不过, 同样可以按照上面的方式直接进行 —— 逐次地分部积分. 结果是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} gD^r D\mathrm{d}x = &(gD^{r-1}W - DgD^{r-2}W + \cdots \mp D^{r-2}gDW)\Big|_{-1}^{+1} \\ &\pm\int_{-1}^{1}(W\cdot D^{r-1}g)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是, 广义函数的积分被归结为边界项和连续函数 $W\cdot D^{r-1}g$ 的积分.

作为例子, 来计算积分 $f = \int_{-1}^{1}(1/x^2)\mathrm{d}x$, 其中 $1/x^2$ 不是被解释为一个通常的函数而是作为一个广义函数 $-D^2\log|x|$. 由于 $DW = -1/x$, 立即得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -2.$$

另一个例子是由 $f = -4D^2(.x^{1/2})$ 定义的广义函数的积分. 除了在 $x = 0$ 的奇异性之外, 这个广义函数当 $x > 0$ 时等同于 $x^{-3/2}$ 且当 $x < 0$ 时等同于 0. 所以它的在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的积分可以计算如下：

$$-4\int_{-1}^{1} D^2(.x^{1/2})\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^{-3/2}\mathrm{d}x = -2,$$

上式所得结果的意思是奇异积分的"有限部分".

对于 $n$ 个自变量的情况, 也可以得到相当于微积分基本定理的结论. 例如, 这对 Gauss积分公式就成立, 条件是被积分式中的广义函数仅仅是连续函数的一阶导函数. 特别地, 如果被积函数是一个连续矢量场的散度, 那么 Gauss 积分公式就与在古典的微积分中一样仍旧成立.

然而, 如果被积函数 $f = D^r W$ 是由较高次求导生成的, 那么, 同前所述, 限于考虑如此情况, 其中广义函数 $D^r W$ 或者 $n$ 个函数 $D_i^{-1} D^r W$ 之中至少有一个在积分区域 $G$ 的光滑边界 $\varGamma$ 的邻域上是连续函数, 这里 $G$ 的外法向矢量是 $\xi$ 而面元是 $\mathrm{d}S$.

用和上述相同的记号 $G, G^* G^\wedge$, 并选取一个试探函数 $\phi$, 它在 $G$ 上恒等于 1 且可被任意地延拓到补域 $G^\wedge = \mathscr{I} - G$ 上而受适当的光滑性条件和有界支集条件的约束. 因为 $f = D^r W$ 是用内积和试探函数定义的, 并且因为所特殊选择的试探函数的各阶导函数在 $G$ 和 $\varGamma$ 上都恒等于零, 就可根据下列几个不说自明的关系式, 来定义 $f$ 在 $G$ 上的积分:

$$\begin{aligned}(f, \phi) &= \iiint\limits_{G+G^\wedge} \phi D^r W \mathrm{d}x = \iiint\limits_{G} f \mathrm{d}x + \iiint\limits_{G^\wedge} \phi D^r W \mathrm{d}x \\ &= \pm \iiint\limits_{G^\wedge} W D^r \phi \mathrm{d}x = \mp \iiint\limits_{G^\wedge} \phi D^r W \pm \iint\limits_{\varGamma} (D_i^{-1} D^r W) \xi_i \mathrm{d}S.\end{aligned}$$

所以必须令

$$\iiint\limits_{G} f \mathrm{d}x = \iint\limits_{\varGamma} (D_i^{-1} D^r W) \xi_i \mathrm{d}S,$$

这里突出了下标 $i$. 如果引入一个以 $A_i = D_i^{-1} D^r W$ 为支量的广义矢量函数 $A$, 那么就得到对称的形式. 这时的结果是 Gauss公式

$$\iiint\limits_{G} \mathrm{div} A \mathrm{d}x = \iint\limits_{\varGamma} A \xi \mathrm{d}S.$$

相仿地不难推广微积分中的其他积分定理.

## 6′.3 广义函数的演算

广义函数的引入似乎是普通微积分的一个彻底的推广. 然而, 在广义函数的邻域里并非一切古典的演算都是可行的. 保证了微分运算不受限制, 却丢掉了函数相乘与复合的自由性, 这种损失部分地抵消了收益. 甚至一个多自变量的广义函数当有几个自变量在其定义域内保持不变时它就化为其余的自变量的广义函数, 这一点

也不完全是对的. 将在 6′.3 和 6′.4 中着重考虑几个有关的要点, 而不打算对其在演算范围内的得失作全面的权衡.

### 6′.3.1　线性运算

如果在一个闭域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上令 $f = D^r W$, 其中 $W$ 是一个分块连续的母函数, 容易断定：此类 $r$ 连续广义函数的以通常的适当光滑的函数为系数的线性组合仍是 $r$ 连续的广义函数.

如果母函数对于参数 $\alpha$ 是连续可微的, 那么广义函数可以对这些参数微分. 例如, 对于广义函数 $f = \delta(\alpha x)$, 其中 $\alpha$ 是一个矢量, 得到 $f_{\alpha_i} = x_i \delta'(\alpha x)$.

同样, 在上述关于 $W$ 的条件下, 可以在积分号下对参数微分一个广义函数的积分 (比较在第 6 章 6.15 中的例子).

如果分块连续的母函数 $W_n$ 趋于一个分块连续的函数 $W$, 那么在弱 $r$ 收敛的意义下得到 $D^r W_n = f_n \to f = D^r W$.

相应地, 可以逐项地微分一个无穷级数, 或者交换极限运算 —— 例如对不同的参数微分的次序.

至于积分, 请参考 6′.2.8 中的讨论.

### 6′.3.2　自变量的代换

可以把广义函数局部化到一个矩形或者更一般地一个具有分片光滑的边界的区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上, 为此只需修改原来的分块连续的母函数 $W$, 具体地说, 延拓 $W$ 使它在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 外恒等于零. 因此, 在用 $x = g(y)$ 引入新的变量 $y$ 去代替 $x$ 时, 可以限于考虑适当小的区域 $\bar{\mathscr{I}}^*$. 假定变量 $x$ 作为变量 $y$ 的函数在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上具有直到 $r$ 阶的连续导数，并且 Jacobi 式或 $\partial(y)/\partial(x)$ 异于零且其绝对值大于某个正数, 于是逆变换具有同样的连续性质. 从而 $f = \lim f_n$ 在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上被变换为变量 $y$ 的一个 $r$ 连续的广义函数. 由 $f$ 的第二个定义 —— 连续函数 $f_n$ 的一个 $r$ 收敛序列与支集在 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上的试探函数 $\phi$ 的内积, 几乎直接可以得到这个结论. 事实上, 试探函数 $\phi$ 的对于 $x$ 的直到 $r' \leqslant r$ 阶的导数的界也是 $\phi$ 的对于 $y$ 的 $r' \leqslant r$ 阶的导数的界. 于是, 根据 6′.2, $\lim(f_n, \phi)$ 定义了 $y$ 的一个广义函数 $\lim f_n$.

作为一个附带的推论, 在第 6 章 6.4 中引入的单变量的广义函数 $S$ 同样也是 $n$ 个变量 $x$ 的广义函数.

对于由容许的坐标变换所形成的复合广义函数, 微积分里的微分运算法则仍然成立而无需进一步说明. 不过, 必须认识到变换到新坐标和复合函数的论述依赖于变换函数的充分光滑性.

必须强调指出, 广义函数的广义函数是无意义的. 此外, 虽然可以构成通常光

滑函数的广义函数, 但是广义函数的通常函数的概念也是讲不通的[①]. 即便像一个广义函数的平方或者同一个自变量 $x$ 的两个广义函数的相乘这样一些简单的运算也是不许可的[②]. 这就是“广义函数运算”的主要局限性.

### 6′.3.3 例子. $\delta$ 函数的变换

最重要的具体例子是涉及 $\delta$ 函数的. 容易看出, 当 $a$、$b$ 为常数而 $x$ 为唯一的变量时有

$$\delta(ax-b)=\frac{1}{a}\delta\left(x-\frac{b}{a}\right)\quad(a\neq 0).\tag{1}$$

一般地, 对于 $p'(0)\neq 0$ 而 $p(0)=0$ 的一个函数 $p(x)$, 在包含原点的充分小的区间 $\bar{\mathscr{I}}^*$ 上有

$$\delta(p(x))=p'(0)^{-1}\delta(x).$$

假定一个光滑函数 $p(x)=0$ 的零点是 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 并且其个数 $m$ 是有限的或者 $a_m$ 趋于无穷而对于一切 $m$ 值皆有 $p'(a_m)\neq 0$. 于是, 容易断定

$$\delta(p(x))=\sum_{\nu}p'(a_\nu)^{-1}\delta(x-a_\nu).\tag{2}$$

特别地, 得到 (又见于第 6 章 6.15.5)

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}(\delta(x-a)-\delta(x+a)).\tag{3}$$

作为一个习题, 读者可证明并解释下列公式:

$$\delta(\sin x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu\delta(x-\nu\pi).\tag{4}$$

作为附带的议论, 有下列陈述.

$\delta$ 函数是自变数量 $x$ 的 $-1$ 次齐性的 (相仿地, $n$ 维的 $\delta(x)$ 是 $-n$ 次齐性的). 相应地, 对于单变量的情况有下列关系:

$$x\delta'(x)+\delta(x)=0.\tag{5}$$

至于把 $n$ 维的 $\delta$ 函数化至极坐标形式, 6′.3.2 的一般公式在原点的邻域上是不适用的. 尽管如此, 经常引用的公式 ($\omega_n$ 表示 $n$ 维单位球的表面积)

$$\delta(x)=\frac{1}{w_n}\frac{\delta(|x|)}{|x|^{n-1}},\tag{6}$$

① 6′.3.1 中所说的线性函数除外. —— 译者.

② 注意附录 6′.4.5 的评注. —— 译者.

则是由于它表明了 $\phi(0)$ 就是泛函 $\int \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ 这件事的启发而来的. 不过, 应当注意到, 严格地说, 用 (6) 表示 $n$ 维广义函数 $\delta(x)$ 时需要稍微修改一般定义, 例如需要约定

$$\int_0^\infty \phi(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\phi(0).$$

### 6′.3.4 广义函数的相乘与褶积

虽然两个广义函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积作为一般的概念是无意义的, 但是按照定义, 两组不同的变量 $x$ 和 $y$ 的两个广义函数的乘积 $f(x)g(y)$ 是 $2n$ 个变量 $x$ 和 $y$ 的广义函数. 事实上, 例如, 假定 $f(x) = D_x^r W(x), g(y) = D_y^s V(y)$, 那么

$$f(x)g(y) = D_x^r D_y^s VW, \tag{7}$$

这些符号是明显的.

对于同一个自变数量的广义函数 $f(x) = D^r W$ 和 $g(x) = D^s V$, 这两个函数的褶积[①]运算总是有意义的并且只要这两个因子之一, 如 $g(x)$ 具有有界的支集, 那么其结果便是一个新的广义函数 $F(x)$. 褶积的定义是

$$F(x) = f * g = g * f = \int f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{8}$$

其中假定了积分的基本区域 $\mathscr{I}$ 是整个 $x$ 空间. (褶积出现于用基本解表示微分方程的解的式子中, 以及每一个函数都是它自身和 $\delta$ 函数的褶积, 这些事实说明了褶积这个概念的重要性).

下边的定义表达了所要陈述的结论. 记 $f = D^r W$ 且 $g = D^s V$, 其中 $W$ 和 $V$ 都是连续的并且 $V$ 的支集有界, 那么

$$F(x) = D^r D^s (W * V).$$

褶积算子的一个重要性质是它可以和求导交换次序.

可以说, 褶积的重要应用是以下述的明显事实为基础的. 任一线性算子 $L[u(x)]$ 都可以表示为褶积 $(L[u(\xi)], \delta(x-\xi))$, 于是 $L[u(x)] = 0$ 等价于关于 $u$ 的形式上的积分方程

$$(u(\xi), L_\xi^* \delta(x-\xi)) = 0. \tag{9}$$

如果再用适当光滑的正则函数去逼近 $\delta$ 函数和它的导函数, 那么便得到逼近函数方程 $L[u] = 0$ 的真正的积分方程 (可以参考本书的卷 III).

① 德文作“Faltuug”, 英文为“Convolution”.

# 6′.4 补注. 理论的修饰

## 6′.4.1 引言

如上边曾指出的, 函数概念的推广仍然还有修饰的余地. 此类修饰在数学物理中起着有利的作用, 从纯理论的观点看, 它们也是引人入胜的课题[①]. 在本节中将扼要论述这些修饰中的几个. 除了 6′.4.5 中的例子, 其涉及的都是广义函数在整个基本区域 $\mathscr{I}$ 上的性态, 且要受到试探函数的边界条件或者更确切地说无穷远处条件的影响.

考虑复值函数 $f, g, \phi, \psi$ 将是方便的, 并且用下列不释自明的公式定义它们的内积

$$(f, g) = \int_{\mathscr{I}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \overline{(g, f)}. \tag{1}$$

## 6′.4.2 试探函数的它种空间. 空间 $\mathfrak{S}$. Fourier 变换

虽然对于本书的目的来说, 具有有界支集的试探函数空间似乎是完全够用的, 但是有时采用稍微宽广的空间 (因而稍微缩窄了“对偶”广义函数空间) 是有益的, 而无需对 6′.2, 6′.3 中的定义和方法作重大的修饰. 具体说, 以整个 $x$ 空间为基本区域 $\mathscr{I}$, 考虑属于 $C^\infty$ 的试探函数 $\phi$ 的空间 $\mathfrak{S}$, 并且当 $x$ 趋于无穷时这些函数及其各阶导函数比 $|x|^{-1}$ 的任何次幂都更快地趋于零, 即对于任意的标码 $r$ 和不论多么大的正数 $N$ 皆有[②]

$$|x|^N|\phi| \to 0, \quad |x|^N|D^r\phi| \to 0.$$

就试探函数 $\phi$ 的空间 $\mathfrak{S}$ 而言, 内积 $(W, \phi)$ 被定义为乘积 $W\bar{\phi}$ 在整个 $x$ 空间 $\mathscr{I}$ 上的通常的积分, 其中 $W$ 可以是 $\mathscr{I}$ 上的任一连续函数, 并且对于它来说存在着那样一个正数 $M$, 当 $|x| \to \infty$ 且 $N > M$ 时, $|W||x|^{-N} \to 0$. 换句话说, 函数 $W$ 在无穷远处的增长不比一个多项式更快. 于是按照 6′.2 中的定义, 可以就任一整数指标 $r$ 引入广义函数

$$f = D^r W, \tag{2}$$

并定义 $f$ 与 $\phi$ 的内积为

$$(f, \phi) = (-1)^{|r|}\int W D^r \bar{\phi}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

① 例如, 参考 J. Berkowitz and P. D. Lax[1].

② 例如, $C^\infty$ 里的一切那样的函数其级别不超过 $\mathrm{e}^{-x^2}$ 者皆含于这个空间 $\mathfrak{S}$ 里.

显然, 这样定义在试探函数空间 $\mathfrak{S}$ 上的每个广义函数也是 6′.2 中定义在具有有界支集的试探函数空间 $\mathfrak{S}$ 上的一个广义函数. 然而, 倒过来说就不一定成立了①.

在把函数 $g(x)$ 变换为

$$\hat{g}(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathscr{I}}\bar{g}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi=f(x) \tag{4}$$

的 Fourier变换理论里, 试探函数空间 $\mathfrak{S}$ 是有用的.

如果 $g$ 是 $\mathfrak{S}$ 里的一个函数, 那么容易看出, 变换后的象函数 $\hat{g}$ 仍然在 $\mathfrak{S}$ 里, 而 Fourier 互逆关系

$$g(x)=\hat{f}(x),\quad f(x)=\hat{g}(x) \tag{5}$$

是完全的 —— 空间 $\mathfrak{S}$ 被 Fourier 变换一对一地映射到它自身.

注意重要的 Parseval公式

$$(f,g)=(\hat{f},\hat{g}) \tag{6}$$

或

$$\int_{\mathscr{I}}f\bar{g}\mathrm{d}x=\int_{\mathscr{I}}\hat{f}\bar{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

对于类 $\mathfrak{S}$ 中的函数 $f$ 和 $g$ 来说这是不难证明的, 因为对于 $x$ 的积分收敛得很快.

现在有条件给函数 $f$ 的 Fourier 变式 $\hat{f}$ 下一个令人满意的定义了, 这里所说的 $f$ 不一定在 $\mathfrak{S}$ 里而是由 $f=D^rW$(等式 (2)) 定义的. 即是说, 要给 "超过 $\mathfrak{S}$" 的那些广义函数 $f$ 的 Fourier 变式下定义, 它们是由微分连续函数 $W$ 而产生的, 后者在无穷远处的增长至多不过像一个多项式那样快②.

首先, 再次注意, 如果 $\phi$ 属于 $\mathfrak{S}$, 那么 $\hat{\psi}=\phi$ 也属于 $\mathfrak{S}$, 并且反之也是对的. 其次, 不把 Parseval 公式 (6) 当做一个定理而当做 $f$ 的一个弱定义. 令

$$(\hat{f},\psi)=(\hat{f},\hat{\phi})=(f,\phi), \tag{8}$$

其中右端的式子被认为是预先知道了的 —— 根据 (3) 它就是 $\pm(W,D^r\phi)$. 所以, 变式 $\hat{f}$ 由内积 (8) 自然地得到了定义, 其中 $\psi$ 和 $\phi$ 取遍空间 $\mathfrak{S}$.

$\hat{f}$ 的这个定义可以作为深入探究 Fourier 变换理论的出发点.

几乎立即认识到这个重要的事实：对于任何指标 $s, D^sf$ 的 Fourier 变式是 $(-\mathrm{i}x)^s\hat{f}$; 更一般地, 对于任一具有常系数 $a_\rho$ 的线性微分算子 $L[f]=\sum_\rho a_\rho D^\rho f$

① 例如, 考虑通常的函数 $f=\mathrm{e}^{x^4}$. 可以把它解释为空间 $\mathfrak{S}$ 上的一个广义函数, 因为它和具有有界支集的任一试探函数 $\phi$ 的内积显然是一个通常的积分. 然而, 就空间 $\mathfrak{S}$ 而言, 这个定义无效, 因为函数 $\phi=\mathrm{e}^{-x^2}$ 就是 $\mathfrak{S}$ 中的一个试探函数, 而 $W$ 和 $\phi$ 的内积不存在.

② 关于 Fourier 变换范围的这一大步推广可参考 S. Bochuer[1] 和 L. Schwartz[1].

来说, 其 Fourier 变式是

$$\hat{L}[f]=P(\mathrm{i}x)^s\hat{f},$$

其中 $P$ 是与微分算子 $L$ 相伴的多项式 $\sum_\rho a_\rho(-\mathrm{i}x)^\rho$(参考第 5 章附录 II 5″.2).

不再作进一步的讨论而仅述及 6′.2 中指出过的一点：$\delta(x)$ 和恒等于 1 的函数彼此互为 Fourier 变式是不难被纳入目前的体系里的.

### 6′.4.3　周期函数

限于考虑关于一切自变量 $x_i$ 皆有周期 (不妨说周期为 2π, 基本区域是 $\mathscr{I}:0\leqslant x_i\leqslant 2\pi$) 的母函数 $W$ 和具有相同周期的试探函数 $\phi$ 常常是有用的. 这时, 利用复数记号, 取三角函数系 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}=\phi_\nu$ 所张成的空间为试探函数空间 $\mathfrak{B}$, 其中 $\nu$ 为矢量, 其支量为整数. 也可以称 $f=D^rW$ 所定义的广义函数为周期广义函数 (比较 6′.2 中的定义). 此外, 稍微推广 6′.2 中的定义, 采纳平方可积函数为母函数 $W$.

通过这些修饰, 对于无穷域的边界条件里固有的复杂性取得了自由. 在研究有限域上的微分方程时, 恒可将系数和解都周期地延拓到所考虑的区域之外而不失一般性①. 于是在方法的明显性上获得相当大的好处.

照常, 用

$$a_\nu=(W,\phi_\nu)=\int W\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\mathrm{d}x \tag{9}$$

定义 $W$ 的 Fourier 系数 $a_\nu$. 这里和以后都将假定 (实质上并无损于一般性)Fourier 展开式中的常数项 $a_0$ 为零. 于是得到形式如下的 Parseral 定理.

$$\|W\|^2=(W,W)=\int|W|^2\mathrm{d}x=\pi^{2n}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}|a_\nu|^2. \tag{9a}$$

对于广义函数 $f=D^rW$, 按 6′.2 用 $(f,\phi)=\pm(W,D^r\phi)$ 定义内积. 由此可定义广义函数 $f=D^rW$ 的 Fourier 系数 $C_\nu$ 是

$$C_\nu=(f,\phi_\nu)=(D^rW,\phi_\nu)=\pm(\mathrm{i}\pi)^r(W,\phi_\nu)=\pm(\mathrm{i}\pi)^r a_\nu. \tag{9b}$$

相仿地, 可以考虑积分 $D^{-r}W$ 和它们的 Fourier 系数

$$d_\nu=(\pm\mathrm{i}\pi\nu)^{-r}a_\nu=(D^{-r}W,\phi_\nu), \tag{10}$$

这里仍恒假定常数项系数为零.

受 Parseval 公式 (9a) 的启发, 用 $W$ 的通常的范数不仅给 $W$ 而且也给 $D^rW$ 和 $D^{-r}W$ 分别定义一个 $r$ 范数和一个 $-r$ 范数如下：

$$\|D^rW\|_{-r}^2=\|D^{-r}W\|_r^2=\|W\|^2=\pi^{2n}\sum|a_\nu|^2. \tag{11}$$

① P. D. Lax 在 [6] 中成功地引入了这样一种技巧, 并且被后人所采用.

无论如何, 广义函数 $f$ 的 Fourier 系数正如通常的函数的 Fourier 系数一样为 $f$ 提供了一个实在的"具体表示"或"明显表示": 如果对于一个数列 $C_\nu$(其中 $\nu$ 取遍一切整数, 且假定 $c_0=0$) 有一个确定的指标 $r$, 其使

$$\sum_\nu |c_\nu|^2|x^{-2r}| = \sum |a_\nu|^2 \tag{12}$$

是收敛的, 那么这个数列就表示一个周期的广义函数. 这时, 数值 $(\mathrm{i}\pi\nu)^{-r}c_\nu = a_\nu$ 表示一个平方可积函数 $W$ 的 Fourier 系数.

当然, 关于周期的广义函数的一切运算都不难在这个表示的基础上明显地做出来.

### 6′.4.4　广义函数与 Hilbert 空间. 负范数. 强定义

在 6′.2 和 6′.4.3 中曾经用"弱定义"引入广义函数 $f$, 即借助定义其与空间 $\mathfrak{S}$ 的函数 $\phi$ 的内积并把广义函数 $f$ 看成"对偶"空间里的元素 —— 恰如在射影几何里平面和点按其坐标的内积对偶地相互对应那样. 颇为有趣的是[①] 也可以用强定义去定义广义函数, 即通过按一个二次 Hilbert 范数的收敛性将光滑函数的稠密集完备化而定义广义函数. 这个办法是古典的直接变分法的运算基础, 它曾经被 P. D. Lax[②] 等人成功地应用过. 这里仅予以扼要的说明.

对 6′.4.3 中讨论过的周期函数来说, 情况是明显的而且非常简单. 首先考虑周期函数 $W$ 的 Hilbert 空间, $W$ 的范数是具有直到 $r$ 阶导函数的函数 $W$ 的稠密子空间里的范数 $\|W\|$; 然后作连续函数 $D^rW=f$ 并依 Hilbert 范数 $\|W\|$ 封闭这个集合. 对于这个闭 Hilbert 空间用闭包附以极限 $f$ 作为理想元素并称 $\|W\|=\|f\|_{-r}$ 为 $f$ 的负范数 $-r$. 当然, 对于周期函数 $W$ 而言, 这些范数及其之间的关系已经在 6′.4.3 中明显地给出过了.

不管怎样, 负范数容许一个强定义, 即理想元素的依一个二次范数的闭包的定义. 不难看出这些强定义下的广义函数本质上和前面用"弱定义"得到的理想元素是等价的.

对这些研究来说, 周期性的假设绝不是必要的. 对于整个 $x$ 空间里的函数 $W$ 和 $f$, 可以考虑 $\mathfrak{D}$ 里的试探函数并让 $W$ 取遍这样的 Hilbert 空间, 此空间是由 $C^\infty$ 中具有有界支集的函数 $W$ 的空间依范数 $\|W\|$ 完备化所得到的. 于是对于每一个指标 $r, W$ 的完备化导致广义函数 $D^rW=f$ 的具有负范数 $\|f\|_{-r}=\|W\|$ 的一个 Hilbert 空间. 令 $r$ 取遍指标 $r$ 的一切值, 并把所有这样定义的理想元素并联到一起, 便得到基本上 (虽然不是完全地) 和 6′.2 所给的广义函数定义同构的一个定义.

① 可以参考在用变分法构造边值问题的解时的应用 (见第 III 卷).

② 例如, 参考 P. D. Lax[6]

关于Fourier 积分的 Parseval 定理 (6) 自然给广义函数定义提供了一个在有周期性的情况下与 Fourier 系数的更明显的类比.

### 6′.4.5 关于其他种类的广义函数的注记

为说明引入理想元素可具有多大的任意性, 现增添下边的简要注记. 可以把一类有用的广义函数定义为在 (例如说) 单位圆内为正则的调和函数 (或者更一般地一个椭圆型微分方程的正则解) 在圆周上的边界值. 这些边界值可以在通常的意义下不存在, 但是借助于内部的正则解析调和函数而被表示为理想元素. 在 6′.2 中曾经看到可以用 Green 函数的边界值去这样定义 $\delta$ 函数. 然而, 读者不难由例子看出正则调和函数 $u$ 的边界值大可不必是 6′.2 或者 6′.4.3 的意义下的广义函数[①]. 另一方面, 这种新型广义函数具有可能使它们成为分析中有用的工具的性质. 如果代替单位圆上的调和函数而考虑复变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的正则解析函数, 那么将得到更进一步的好处, 例如, 有可能去自然地定义广义函数的乘积和广义函数的函数.

尽管这个附录里陈述的理论有它的优点, 但上述注记当能引起注意, 还需要进一步研究如何借助于引入适当的理想元素而推广函数概念的其他可能性. 但对于所有此类概念的评价不应当仅仅从其形式上的一般性去衡量, 而应当看其在数学分析和理论物理学的广阔天地中的用处如何.

① 例如, 用极坐标 $\rho$ 和 $\theta$ 写出的在单位圆 $\rho < 1$ 内以

$$a_\nu = \mathrm{e}^{\sqrt{\nu}}$$

为系数的级数

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu \cos \nu\theta$$

当 $\rho < 1$ 时是调和的; 范数 $\pi^2 \sum |a_\nu|^2 \nu^{-2r}$ 对于 $r$ 的任何整数值都不收敛 (参考 6′.4.3), 然而当 $\varepsilon$ 为任何小于 1 的正数时, $u$ 的级数, 当 $0 \leqslant \rho < 1 - \varepsilon$ 时一致收敛并且是调和的.

# 参 考 文 献

Agmon, S., A. Douglis, and L. Nirenberg

[1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 12 (1959), pp. 623–727. (pages 331, 345, 350, 369, 401)

Ahlfors, L., and L. Bers

[1] Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann of Math., Vol. 72 (1960), pp. 385–404. (page 350)

Aleksandrov, A. D.

[1] Dirichlet's problem for the equation

$$\mathrm{Det}||z_{ij}|| = \phi(z_1, \cdots, z_n, z, x_1, \cdots, x_n),$$

I. Vestnik Leningrad. Univ., Ser. Mat. Mekh. i Astron., Vol. 13, No. 1 (1958), pp. 5–24. (In Russian; English summary.) (page 367)

Aronszajn, N.

[1] A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. J. de Math., T. 36 (1957), pp. 235–249. (page 383)

Asgeirsson, L.

[1] Some hints on Huygens' principle and Hadamard's conjecture. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 9, No. 3 (1956), pp. 307–326. (page 576)

[2] Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann., Vol. 113 (1936), pp. 321 ff. (pages 744, 753)

[3] Über Mittelwertgleichungen, die mehreren partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung zugeordnet sind. Studies and Essays, Interscience, New York, 1948, pp. 7–20. (page 744)

Bader, R., see Germain, P., and R. Bader

Banach, S.

[1] Théorie des Opérations Linéaires. Warsaw, 1932. Reprinted by Chelsea Publishing Go., New York, 1933. (page 333)

Bazer, J., and O. Fleischman

[1] Propagation of weak hydromagnetic discontinuities. Rep. No. $\mathrm{MH}_{10}$, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959. (page 612)

Beckenbach, E. F., and L. K. Jackson

[1] Subfunctions of several variables. Pacific J. Math., Vol. 3 (1953), pp. 291–313. (page 342)

Bergman, S.

[1] Linear operators in the theory of partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 53 (1943), pp. 130–155. (page 401)

Berkowitz, J., and P. D. Lax

[1] Functions of a real variable. To be published by Wiley, New York. (page 792)

Bernstein, S.

[1] Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Math. Ann., Vol. 59 (1904), pp. 20–76. (page 347)

Bers, L., see also Ahlfors, L., and L. Bers

[1] An outline of the theory of pseudoanalytic functions. Bull. Am. Math. Soc., Vol. 62 (1956), pp. 291–331. (page 375)

[2] Lectures on elliptic equations. Summer Seminar in Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1957. Lectures in Applied Mathematics, Vol. IV, to be published by Interscience, New York. (page 240)

[3] Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics Wiley, New York, 1958. (pages 367, 390)

[4] Non-linear elliptic equations without non-linear entire solutions. J. Ratl. Mech. Anal., Vol. 3 (1954), pp. 767–787. (page 400)

[5] Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 7 (1954), pp. 79. (page 162)

Bers, L., and A. Gelbart

[1] On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 56 (1944), pp. 67–93. (page 389)

Bers, L., and L. Nirenberg

[1] On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. Convegno Internazionale sulle Equazioni lineari alle derivate parziali. Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 111–140. (pages 367, 394)

[2] On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane. Convegno Internazionale sulle Equazioni derivate parziali. Edizioni Cremonese, Rome, 1955, pp. 141–167. (pages 269, 367, 395)

Birkhoff, G. D., and O. D. Kellogg

[1] Invariant points in function space. Trans Am. Math. Soc., Vol. 23 (1922), pp. 96–115. (page 357)

Bochner, S.

[1] Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Akademische Verlagsges., Leipsig, 1932. (page 794)

Boyarskii, B. V.

[1] Generalized solutions of systems of differential equations of first order and elliptic type with discontinuous coefficients. Mat. Sbornik, Vol. 43 (85)(1957), pp. 451–503. (In Russian.)(pages 394, 399)

Brelot, M.

[1] Lectures on potential theory. Tata Institure of Fundamental Research, Bombay, 1960. (page 305)

Buchwald, V. T.

[1] Elastic waves in anisotropic media. Proc. Roy, Soc. London, Ser. A, Vol. 253 (1959), pp. 563–580. (page 599)

Burgatti, P.

[1] Sull' estensione del metodo d'integrazione di Riemann all' equazioni lineari d'ordine $n$ con due variabili independenti. Rend. reale accad. lincei, Ser. $5^{a}$, Vol. 15, $2^{\circ}$ (1906), pp. 602–609. (page 454)

Calderón, A. P.

[1] Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Am. J. Math., Vol. 80 (1958), pp. 16–36. (pages 238, 383)

Calderón, A. P., and A. Zygmund

[1] Singular integral operators and differential equations. Am. J. Math., Vol. 79 (1957), pp. 901–921. (page 666)

[2] Singular integral operators and differential equations. Am. J. Math., Vol. 80 (1958), pp. 16–36. (page 666)

Carathéodory, C.

[1] Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. B. G. Teubner, Leipzig and Berliz, 1935. (page 62)

Carleman, T.

[1] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables. Compt. rend., Vol. 197 (1933), pp. 471–474. (page 383)

[2] Sur un problème d'unictié pour les systêmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables independentes. Ark. Mat., Astr. Fys., Vol. 26B, No. 17 (1939), pp. 1–9. (page 238)

Cauchy. A. L.

[1] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants. Oevres Complètes, Ser. 2, T. 1, 1823. (page 217)

Cinquini-Cibrario, M.

[1] Un teorema di esistenza e di unicita per un sistema di equazioni alle derivate parziali. Ann. di mat. (4), Vol. 24 (1945), pp. 157–175. (page 464)

Cohen, P.

[1] The non-uniqueness of the Cauchy problem. Technical Rep. No. 93, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, 1960. (page 383)

Copson, E. T.

[1] On the Riemann-Green function. J. Ratl. Mech. Anal., Vol. 1 (1958), pp. 324–348. (page 461)

Cordes, H. O.

[1] Über die eindeutige Bestimmheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., Jahre 1956, pp. 239–258. (page 383)

[2] Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen. Math. Ann., Vol. 131 (1956), pp. 273–312. (page 367)

Courant, R.

[1] Differential and integral calculus, Vol. II. Interscience, New York, 1936. (page 111)

[2] Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. Interscience, New York, 1950. (pages 167, 160, 225)

[3] Cauchy's problem for hyperbolic quasi-linear systems of first order partial differentia. equations in two independent variables. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 14, Nol 3 (1961), pp. 257–265. (page 477)

Courant, R., and K. O. Friedrichs

[1] Supersonic flow and shock waves. Interscience, New York, 1948. (pages 38, 429, 432, 490, 636)

Courant, R., K. O. Friedrichs, and H. Lewy

[1] Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik. Math. Ann., Vol. 100 (1928–1929), pp. 32–74. (page 231)

Courant, R., and A. Lax

[1] Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 8 (1955), pp. 497–502. (page 711)

Courant, R., and P. D. Lax

[1] On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 2 (1949), pp. 255–273. (page 464)

[2] The propagation of discontinuities in wave motion. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., Vol. 42, No. 11 (1956), pp. 872–876. (pages 727, 735)

Doetsch, G.

[1] Handbuch det Laplace Transformation 3 Vols. Birkhäuser, Basel, 1950. (page 535)
[2] Theorie und Anwendung der Laplace Transformation. Springer, Berlin, 1937. (page 535)

Douglis, A., see also Agmon, S., A. Douglis, and L. Nirenberg
[1] Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variabies. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 5, No. 2 (1952), pp. 119–154. (pages 464, 478, 494)
[2] A criterion for the validity of Huygens Principle. Communs Pure and Appl. Math., Vol. 9, No. 3 (1956), pp. 391–402. (page 576)

Duff, G. F. D
[1] Mixed problems for linear systems of first order equations. Can. J. Math., Vol. 10 (1958), pp. 127–160. (page 56)
[2] The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 252 (1960), pp. 249–273. (page 599)
[3] Mixed problems for linear systems of first order equations. Can. J. Math., Vol. 10 (1958), pp. 127–160. (page 656)

Dunford, N., and J. T. Schwartz
[1] Linear operators, Part I: General theory. Interscience, New York, 1958. (pages 333, 406)

Ehrenpreis, L.
[1] Solutions of some problems of division. I: Am. J. Math., Vol. 76 (1954), pp. 883–903; II: Vol. 77 (1955), pp. 286–292; III: Vol. 78 (1956), pp. 685–715. (pages 154, 767)

Finn, R.
[1] Isolated singularities of nonlinear partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 75 (1953), pp. 385–404. (page 400)

Finn, R., and D. Gilbarg
[1] Three dimensional subsonic flows and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations. Acta Math., Vol. 98 (1957), pp. 265–296. (p. 367)

Fleischman, O., see Bazer. J., and O. Fleischman

Frankl, F.
[1] On the initial value problem for linear and nonlinear hyperbolic partial differential equations of the second order. Mat. Sbornik (N. S.), Vol. 2 (44)(1937), pp. 793–814. (In Russian. )(page 675)

Friedlander, F. G.
[1] Simple progressive solutions of the wave equation. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 43 (1946), pp. 360–373. (page 763)
[2] Sound pulses in a conducting medium. Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 55, Pt. IV (1959), pp. 341–367. (page 612)

Friedman, A.

[1] On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. J. Math and Mech., Vol. 7 (1958), pp. 43–60. (page 347)

Friedrichs, K. O., see also Courant. R., and K. O. Friedrichs; Courant, R., K. O. Friedrichs, and H. Lewy

[1] Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables. Am. J. Math., Vol. 70 (1948), pp. 555–588. (page 464)

[2] Symmetric byperbolic linear differential equations Communs. Pure and Appl Math., Vol. 7 (1954), pp. 345–392. (pages 642, 669)

[3] Symmetric positive linear differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 11 (1958), pp 333–418. (pages 656, 669)

[4] The identity of weak and strong extensions of differential operators. Trans Am. Math Soc., Vol. 55, No. 1 (1944), pp. 132–151. (page 768)

Friedrichs, K. O., and H. Kranzer

[1] Notes on magneto-hydronamics VIII. Nonlinear wave motion. Rep. No. NYO-6486, AEC Computing & Applied Mathematics Center, Institure of Mathematical Sciences. New York University, 1958. (page 612)

Friedrichs, K. O., and H. Lewy

[1] Über die Eindeutigkeit und des Abhängigkeitsgebeit der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Math. Ann. Vol. 98 (1928), pp. 192–204. (pages 642, 673)

Garabedian, P.

[1] Partial differential equations. To be published by Wiley, New York. (page 506)

[2] Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain. J. Math. and Mech., Vol. 9 (1960), pp. 241–272. (page 506)

Garabedian, P., H. Lewy, and M. Schiffer

[1] Axially symmetric cavitational flow. Ann. of Math., Ser. 2, Vol. 56 (1952), pp. 560–602. (page 348)

Garabedian, P., and H. M. Lieberstein

[1] On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., Vol. 25 (1958), pp. 109–118. (page 499)

Gårding, L.

[1] Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations Math. Scand., Vol. 1 (1953), pp. 55–72. (page 240)

[2] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. Acta Math., Vol. 85 (1951), pp. 1–62. (pages 187, 216, 479, 483, 592, 599)

[3] Solution directe du Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. Comptes rendus du colloque pour les équations aux dérivées partielles, Colloque International,

CNRS. Nancy (1956), pp. 71–90. (pages 661, 665, 666)

[4] The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Rieaz integrals. Ann. of Math., Vol. 48 (1947), pp. 785–826. (page 599)

Gelbart, A., see Bers, L., and A. Gelbart

Gelfand, I. M.

[1] Some questions in the theory of quasilinear equations. Uspehi Mat. Nauk., Vol. 14, No. 2 (86)(1959), pp. 87–158. (In Russian. )(page 490)

Gelfand, I. M., and G. E. Shilov

[1] Obobshchennye funkstii i deistviia nad nimi. Gos. Izd. Fiz-mat. Lit., Moskva (1958)(in Russian). Verallagemeinerte Funktionen. Deutscher Verlag. Berlin, 1960. (pages 680, 740, 767, 768)

Germain, p.

[1] Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 7 (1954), pp. 117–144. (page 162)

Gilbarg, D., see Finn, R., and D. Gilbarg

Germain, P., and R. Bader

[1] Unicité des écoulemeuts avec chocs dans la mécanique de Burgers Office Nationale des Études et des Recherches Aeronantiquse, Paris, 1953, pp. 1–13. (page 151)

Giorgi, E. de

[1] Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari Mem. accad. sci. Torino. Cl. sci. fis. mat. nat., Ser. 3, Vol, 3, Pt. 1 (1957), pp. 25–43. (page 347)

Grad, H.

[1] Propagation of magnetohydrodynamic waves without radial attenuation. Rep. No. NYO-2537, Magneto-Fluid Dynamics Division, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1959 (page 612)

Haar,A.

[1] Über Eindeutigkeit und Analytizität der Lösungen partieller Differenzialgleichungen. Atti del congr. intern. dei mat., Bologna, Vol. 3 (1928), pp. 5–10. (page 146)

Hadamard, J.

[1] Equations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique. Enseignement math., Vol. 35 (1936), pp. 5–42. (page 221)

[2] Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Hermann et Cie, Paris, 1932. (pages 39, 56, 221, 491, 495, 505, 686, 740)

[3] Psychology of invention in the mathematical field. Dover, New York, 1954. (page 743)

Hamel, G.

[1] Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lósungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann., Vol. 60 (1905), pp. 459–462. (page 28)

Hartman, P., and A. Wintner

[1] On hyperbolic differential equations. Am. J. Math., Vol. 74 (1952), pp. 834–864. (pages 464, 494)

Heinz, E.

[1] On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Math., Vol. 5 (1956–1957), pp. 197–272. (page 367)

[2] Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Ann., Vol. 131 (1956), pp. 411–428. (pages 348, 367)

Hellwig, G.

[1] Partielle Differenzialgleichungen. Teubner, Stuttgart, 1960. (page 154)

Hilbert, D.

[1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Göttingen Nachrichten, 1910; Leipzig, 1924. (page 362)

de Hoffmann, F., and E. Teller

[1] Magneto-hydrodynamic shocks. Phys. Rev., Vol. 80 (1950), p. 692. (page 612)

Holmgren, E.

[1] Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. Ofversigt af kongl. Vetenskapsakad. Förh., Vol. 58 (1901), pp. 91–103. (pages 54, 237)

[2] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à charactéristiques réelles et distinctes. Ark. Mat., Astr. Fys., Vol. 6, No. 2 (1909), pp. 1–10. (page 454)

Hopf, E.

[1] A remark on linear elliptic differential equations of second order. Proc. Am. Math. Soc., Vol. 3 (1952), pp. 791–793. (page 328)

[2] Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Sitber. preuss. Akad. Wiss. Berlin, Vol. 19 (1927), pp.147–152. (page 326)

[3] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 3 (1950), pp. 201–230. (page 152)

[4] Über den funktionalen. insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z., Vol. 34, 2 (1931), pp. 194–233. (pages 345, 347)

Hörmander, L.

[1] Differential operators of principal type. Math. Ann., Vol. 140 (1960), pp. 124–164. (page 54)

[2] On the interior regularity of the solutions of partial differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 11 (1958), pp. 197–218. (page 348)

[3] On the regularity of the solutions of boundary problems. Acta Math., Vol. 99 (1958), pp. 225–264. (page 348)

[4] On the theory of general partial differential operators. Acta Math., Vol. 94 (1955), pp. 161–248. (pages 154, 348)

[5] On the uniqueness of the Cauchy problem. (I) Math. Scand., Vol. 6 (1958), pp. 213–225; (II)Math. Scand., Vol. 7 (1958), pp. 177–190. (page 238)

Jackson, L. K., see Beckenbach, E. F., and L. K. Jackson

John, F.

[1] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations. Proceedings of Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma (1951), pp. 113–175. (pages 362, 367)

[2] Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times. Ann. di mat. Ser. 4, T. 40 (1955), pp. 129–142. (page 231)

[3] On linear partial differential equations with analytic coefficients-Unique continuation of data. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 2 (1949), pp. 209–253. (pages 239, 760)

[4] Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. Tract 2. Interscience. New York, 1955. (pages 216, 240, 591, 676, 680, 699, 713, 718, 719, 726, 752)

[5] The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. Duke Math. J., Vol. 4 (1938), pp. 300–322. (page 753)

Kalashnikov, A. S.

[1] Construction of generalized solutions of quasi-linear equations of first order without convexity conditions as limits of solutions of parabolic equations with a small parameter Doklady Akad. Nauk, S. S. S. R., Tom 127, No. 1 (1959), pp. 27–30. (page 153)

Kasahara, K., see Yamaguti, M., and K. Kasahara

Keller, J. B.

[1] "A geometrical theory of diffraction." Calculus of variations and its applications, ed., L M. Graves. Proceedings of Symposia on Applied Mathematics, Vol. 8, pp. 27–52. American Mathematical Society, Providence, 1958. (page 640)

Keller, J. B., R. M. Lewis, and B. D. Seckler

[1] Asymptotic solution of some diffraction problems. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 9 (1956), pp. 207–265. (page 640)

Kellogg, O. D., see also Birkhoff, G. D., and O. D. Kellogg

[1] Foundation of potential theory. Springer, Berlin, 1929. (page 240)

[2] On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 33 (1931), pp. 486–510. (page 336)

Kiselev, A. A., and O. A. Ladyžhenskaya

[1] On the existence and uniqueness of the weak solutions of the Navier-Stokes equations. Akad. Nauk, S. S. S. R., Izvest. Ser. Mat. 21 (1957), pp. 655–680. (page 367)

Klein, F.

[1] Vorlesungen über Höhere Geometrie. 3rd ed. Springer, Berlin, 1926. (page 753)

Kline, M.

[1] An asymptotic solution of Maxwe ll's equation. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 4 (1951), pp. 225–263. (page 640)

[2] Asymptotic solution of linear hyperbolic partial differential equations. J. Ratl. Mech. Anal., Vol. 3 (1954), pp. 315–342. (page 640)

Koppenfels, W. von

[1] Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten koeffizienten. Math. Ann., Vol. 105 (1931), pp. 694–706. (page 530)

Korn, A.

[1] Über Minimalflachen, deren Radkurven wenig von evenen Kurven abweichen, Anhang II. Abhandl. Königl. preuss. Akad. Wiss., Berlin, Jahre 1909, 37 pp. (page 401)

Kranzer, H., see Friedrichs, K. O., and H. Kranzer

Krzywoblocki, M. Z.

[1] Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. Österrlich. Ing.-Arch., Vol. 6 (1952), pp. 330–360. (page 401)

Krzyżański, M., and J. Schauder

[1] Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben. Studia Math., T. 6 (1936), pp. 162–189. (page 669)

Kunzi, H. P.

[1] Quasikonform Abbildungen. Springer, Berlin, 1960. (page 392)

Ladyžhenskaya, O. A., see also Kiselev, A. A., and O. A. Ladyžhenskaya; Visik, M. I., and O. A. Ladyžhenskaya

[1] The mixed problem for a hyperbolic equation. Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., Moscow, 1953. (page 669)

Lax, A., see also Courant, R., and A. Lax

[1] On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 9, No. 2 (1956), pp. 135-169. (pages 483, 592, 599)

Lax, P. D., see also Berkowitz, J., and P. D. Lax; Courant, R., and P. D. Lax

[1] A stability theorem for solutions of abstract differential equations, and its application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 9, No. 4 (1956), pp. 747–766. (page 383)

[2] Hyperbolic systems of conservation laws II. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 10 (1957), pp. 537–566. (pages 153, 490)

[3] Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 7 (1954), pp. 159–193. (page 152)

[4] Asymptotic Solutions of oscillatory initial value problems. Duke Math. J., Vol. 24 (1957), pp. 627–646. (pages 636, 640, 735)

[5] Nonlinear hyperbolic equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 6, No. 2 (1953), pp. 231–258. (page 464)

[6] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 8 (1955), pp. 615–633. (pages 669, 795, 796)

Lax, P. D., and R. S. Phillips

[1] Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 13, No. 3 (1960), pp. 427–456. (pages 656, 669)

Leray, J.

[1] Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. Bull. Soc. Math. Frauce, Vol. 85 (1957), pp. 389–429. (pages 56, 65)

[2] Hyperbolic differential equations. Lecture Notes, Institure for Advanced Study, Princeton 1951–1952. (pages 661, 675)

[3] Lectures on hyperbolic equations. Institute for Advanced Study, Princeton, 1952. (page 733)

Leray, J., and J. Schauder

[1] Topologie et équations fonctionelles. Ann. école norm. supérieur 51 (1934), pp. 45–78. (page 357)

Levi, E. E.

[1] Caratteristiche multiple e problema di Cauchy. Ann. di mat., Ser. 3ª, Vol. 16 (1909), pp. 161–201. (page 464)

[2] Sulla problema di Cauchy per le equizioni a caratteristiche reali e distinte. Rend. reale accad. lincei, Ser. 5ª, Vol. 18, 1° (1908), pp. 331–339. (page 464)

[3] Sulla problema di Cauchy per le equazioni Lineari in due variabili a caratteristiche reali. I. and II. Rend. Ist. Lombardo, Ser. 2, Vol. 41 (1908), pp. 408–428 and 691–712. (page 483)

[4] I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivati parziali. Mem. soc. It. delle sc., Ser. 3, Vol. 16(1909), pp. 3–113. (page 362)

Lewis, R., see also Keller, J. B., R. M. Lewis, and B. D. Seckler

[1] Discontinuous initial value problems for symmetric hyperbolic linear differential equations. J. Math. and Mech., Vol. 7 (1958), pp. 571–592. (page 618)

Lewy, H., see, also Friedrichs, K. O., and H. Lewy; Garabedian, P., H. Lewy, and M. Schiffer

[1] An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann. of Math., (2) 66 (1957), pp. 155–158. (page 54)

[2] On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables. Bull. Am. Math. Soc., Vol. 65, No. 2 (1959), pp. 37–58. (pages 348, 502, 505, 507)

[3] A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations I. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 37 (1935), pp. 417–435. (page 502)

[4] A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations II. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 41(1937), pp. 365–374. (page 502)

[5] Eindeutigkiet der Lösung des Anfangsproblem Seiner elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei veränderlichen. Math. Ann., Vol. 104 (1931), pp. 325–339. (page 502)

[6] Neuer Beweis des Analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Ann., Vol. 101 (1929), pp. 609–619. (pages 499, 501, 505)

[7] Über das Anfangswert Problem einer hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Math. Ann., Vol. 97 (1927), pp. 179–191. (pages 491, 495)

Lichtenstein, L.

[1] Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II-3, Haft 8, Leipzig, 1924, pp. 1277–1334. (page 240)

Lieberstein, H. M., see Garabedian, P., and H. M. Lieberstein

Lighthill, M. J.

[1] Studies on magnetohydrodynamic waves and other anisotropic wave motions. Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Ser. A (Math.-Phys. Sci.), Vol. 252 (1960), pp. 397–430. (page 612)

[2] An introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge University Press, New York, 1958. (page 767)

Lippman, B. A., and J. Schwinger

[1] Variational principles for scattering processes I. Phys. Rev., Vol. 79 (1950), p. 409. (page 319)

Ludwig, D.

[1] Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 13, No. 3 (1960), pp. 473–508. (pages 56, 632, 633, 674, 736)

[2] Conical refraction in crystal optics and hydromagnetics. NYO Rep. No. 9084, AEC Computing and Applied Mathematics Center, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1960. (page 629)

[3] The singularities of the Riemann function. NYO Rep. No. 9351, AEC Computing and Applied Mathematics Center, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1960. (pages 618, 676, 733, 744)

Luneburg, R. K.

[1] Mathematical theory of optics. Brown University Press, Providence, 1944. (page 640)

[2] Propagation of electromagnetic waves. New York University, New York, 1948 (mimeographed). (page 640)

Magenes, E., and G. Stampacchia

[1] I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. Ann. scuola norm. sup. Pisa, 1958–1959. (page 240)

Magnus, W., and F. Oberhettinger

[1] Formulas and theorems for the special functions of mathematica physics. Chelsea Publishing Go., New York, 1949. (page 461)

Malgrange, B.

[1] Existence et approximation des solutions der équations aux dérivées partielles et des équations de convolution Ann. inst. Fourier, T. 6 (1955–1956), pp. 271–355. (pages 154, 383)

[2] Sur une classe d'opérateurs différentials hypoelliptiques. Bull. Soc. Math. France, Vol. 85, No. 3 (1957), pp. 283–306. (page 348)

Mikusiński, J.

[1] Operational calculus. Pergamon Press, New York, 1959. (page 508)

Miranda, C.

[1] Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Springer, Berlin, 1955. (pages 240, 331)

Mizohata, S.

[1] Le problème de Cauchy pour les systêmes hyperboliques et paraboliques. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, Vol. 32 (1959), pp. 181–212. (page 666)

[2] Systêmes hyperboliques. J. Math. Soc. Japan, Vol. 11 (1959), pp. 205–233. (page 666)

Morrey, C. B.

[1] Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. University of California Publications in Mathematics (N. S.), Vol. 1 (1943), pp. 1–130. (page 347)

[2] On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations, I and II. Am. J. Math., Vol. 80, No. 1 (1958), pp. 198–237. (page 347)

[3] On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 43 (1938), pp. 126–166. (pages 347, 367, 394)

[4] Second order elliptic systems of differential equations. Annals of Mathematics Studies, Princeton, No. 33 (1954), pp. 101–159. (pages 346, 367)

Moser, J.

[1] A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Communs. Pure and Appl Math., Vol. 13(1960), pp. 457–468. (page 347)

[2] On Harnack's theorem of elliptic differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 14, No. 3 (1961), pp. 577–591. (page 269)

Müller, C.

[1] On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighborhood of a point Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 7(1954), pp. 505-515. (page 238)

Nash, J.

[1] Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Am. J. Math., Vol. 80 (1958), pp. 931–954. (page 347)

Newman, M. H. A.

[1] Topology of plane sets of points. Cambridge University Press, New York, 1951. (page 312)

Nirenberg, L., see also Bers, L., and L. Nirenberg

[1] On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations. Annals of Mathematics Studies. Princeton. No. 33 (1954), pp. 95–100. (pages 346, 367)

[2] On elliptic partial differential equations. Ann. scuola norm. sup. Pisa, Ser. 3, Vol. 13, fasc. 2(1959), pp. 115-162. (pages 234, 240, 347)

[3] On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 6, No. 1 (1953), pp. 103-156. (pages 346, 367)

[4] Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 8 (1955), pp. 649-675. (page 348)

Nitsche, J.

[1] Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces. Ann. of Math., Vol. 66 (1957), pp. 543-544. (page 400)

[2] Zu einem Satze von L. Bers über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Arch. Math., Vol. 9 (1958), pp. 427–429. (page 400)

[3] Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssyteme. J. Ratl. Mech., Vol. II (1953), pp. 291–297. (page 427)

Oberhettinger, F., see Magnus, W., and F. Oberhettinger

Oleinik, O. A.

[1] On Cauchy's problem for nonlinear equations in the class of discontinuous functions. Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R., Vol. 95 (1954), p. 451. (page 152)

[2] On the discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., Vol. 109(1956), p. 1098. (page 151)

[3] On the uniqueness of a generalized solution of the Cauchy problem for a non-linear system of equations encountered in mechanics. Uspehi Mat. Nauk, Vol. 12, No. 6 (78) (1957), pp. 167–176. (In Russian.) (page 151)

[4] Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Uspehi Mat. Nauk., Vol. 12 (75) (1957), pp. 3–73. (In Russian.)(page 490)

Osserman, R.

[1] Proof of a conjecture of Nirenberg. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 12 (1959), pp. 229-232. (page 400)

Perron, O.

[1] Eine neue Behandlung der Ranwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Z., Vol. 18 (1923), pp. 42–54. (page 306)

Petrovskii, I. G.

[1] Lectures on partial differential equations. 2nd ed Gos. Izd Tekh-Teor Lit., Moscow, 1953. English translation. Interscience. New York. 1954. (page 240)

[2] On some problems of the theory of partial differential equations. Uspehi Mat Nauk, (N. S.), Vol. 1, No 3–4 (1946), pp. 44–70; Am. Math. Soc. translation 12. (page 154)

[3] On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. Rec. Math., Mat Sbornik, Vol. 17 (59) (1945), pp. 289–370. (pages 649, 723)

[4] Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen. Bull Univ Moscou. Sér, Int., Sect. A. Vol. 1, No. 7 (1938), pp. 1–74. (page 661)

[5] Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, 2 (44) (1937), pp 815-866. (page 661)

Phillips, R. S., see Lax, P. D., and R. S. Phillips

Peyser, G

[1] Energy integrals for the mixed problem in hyperbolic partial differential equations of higher order. J. Math and Mech., No. 6 (1957), pp. 641–653. (page 666)

Pizetti, P.

[1] Sulla media die valori che una funzioni dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera Rend reale accad. lincei. Ser. 5ª, Vol. 18 (1909), pp. 309–316. (page 287)

Pliś, A.

[1] A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere. Communs Pure and Appl. Math., Vol. 14, No. 3 (1961), pp. 599–617. (page 383)

[2] Characteristics of nonlinear partial differential equations. Bull Acad. Polon. Sci. Ci III 2 (1954), pp. 419–422. (page 147)

[3] Non-uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type. J. Math. and Mech., Vol. 9 (1960), pp. 557-562. (page 383)

Privaloff, J.

[1] Sur les fonctions con ugées. Bull. Soc. Math. France, Vol. 44 (1916), pp. 100–103. (page 401)

Protter, N. H.

[1] The periodicity problem for pseudoanalytic functions. Ann. of Math. (2), Vol. 64 (1956), pp. 154–174. (page 388)

Pucci, C.

[1] Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Rend. accad. naz. lincei (Classe di scienze fisiche, mat. e naturali), Ser. 8, Vol. 23, fasc. 6, December 1957; Vol. 24, Fasc. 1, January, 1958. (page 328)

[2] Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico Ann scuola norm sup. Pisa, Ser 3, Vol. 7(1953), pp. 205–215. (page 231)

Rellich, F.

[1] Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampêreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann., Vol. 107 (1933), pp. 505-513. (page 324)

[2] Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung in zwei Veränderlichen. Math. Ann., Vol. 103(1930), pp. 249–278. (page 454)

Riemann, G. F. B.

[1] Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abhandl. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Vol. 8 (1860). (page 449)

Riesz, M.

[1] A special characteristic surface. Rep. No. 25, Dept. of Mathematics, University of Maryland, 1957. (page 763)

[2] A geometric solution of the wave equation in space-time of even dimension. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 13 (1960), pp. 329–351. (page 576)

Rubinowicz, A.

[1] Eindeutigkeit der Lösungen der Maxwellschen Gleichungen. Physik. Z. Vol. 27 (1926), pp. 707–710. (page 642)

[2] Herstellung von Lösungen gemischter Randwertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Zusammenstückelung aux Lösungen einfacherer

gemischter Randwertaufgaben. Monatsch. Math. Phys., Vol. 30 (1920), pp. 65–79. (page 642)

Sauer, R.

[1] Anfangsvertprobleme bei partiellen Differenzialgleichungen. 2nd ed. Springer, Berlin, 1958. (page 407)

Schapiro, Z.

[1] Sur l'existence des représentations quasi-conformes. Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., Vol. 30, No. 8 (1941), pp. 690–692. (page 399)

Schauder. J., see also Krzyżański, M., and J. Schauder; Leray, J., and J. Schauder

[1] Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen. Studia Math., Vol. 5(1937), pp. 34–42. (page 331)

[2] Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z., Vol. 38, No. 2 (1934), pp. 257–282. (page 331)

[3] Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Auwendung eiuiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungeu beziehendeu Abschätzungen. Comment Math. Helv., Vol. 9 (1936–1937), pp. 263–283. (page 464)

[4] Das Anfangswertproblem einer quasiliuearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Fund Math., Vol. 24 (1935), pp. 213–246. (pages 642, 669, 675)

Schiffer, M., see Garabedian, P., H. Lewy, and M. Schiffer

Schmidt, E.

[1] Bemerkung zur Potentialtheorie, Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubijäum am 6. August 1914, gewidmet von Freunden und Schülern. Julius Springer, Berlin. 1914, pp. 365–383. (page 258)

Schwartz, L.

[1] Théorie des distributions, Vols. 1 and 2. Hermann et Gie, Paris, 1950–1951. (pages 767, 768, 794)

Schwinger, J., see also Lippman, B. A., and J. Schwinger

[1] On the charge independence of nuclear forces. Phys. Rev., Vol. 78 (1950), p. 135. (page 319)

[2] The theory of quantized fields V. Phys. Rev., Vol. 93 (1954), p. 615. (page 319)

Seckler, B. D., see Keller, J. B., R. M. Lewis, and B. D. Seckler

Serrin, J.

[1] On the Harnack inequality for linear elliptic equations. J. d'Analyse Math., Vol. 4 (1956), pp. 292–308. (page 269)

Shilov, G. E., see Gelfand, I. M., and G. E. Shilov

Simonoff, N.

[1] Über die erste Randwertaufgabe der nichtlinearen elliptischen Gleichung. Bull. Math. Univ. Moscou, Sér Int., Vol. 2, No. 1 (1939), pp. 3–18. (page 342)

Sobolev, S. L.

[1] Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéarires hyperboliques normales. Mat. Sbornik (N. S.), Vol. 1 (1936), pp. 39–71. (page 766)

Stampacchia, G., see Magenes, E., and G. Stampacchia

Stellmacher, K. L.

[1] Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. No. 10 (1953), pp. 133–138. (pages 576, 765)

Tautz, G.

[1] Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen II. Math. Ann., Vol. 118 (1943), pp. 733–770. (page 342)

Tedone, O.

[1] Sull'integrazione dell'equazione $\partial^2\phi/\partial t^2 - \sum_i^m \partial^2\phi/\partial x_i^2 = 0$. Ann. di mat., Ser. 3, Vol. 1 (1889), pp. 1 (page 690)

Teller, E., see de Hoffmann F., and E. Teller

Temple, G.

[1] Generalized functions. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., Vol. 228(1955), pp. 175–190. (page 767)

Tricomi, F.

[1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di seconde ordine, di tipo misto. Rend. reale accad. lincei, Ser. 5. Vol. 14 (1923), pp. 134–247. (pages 162, 390)

Unger, P.

[1] Single higher order equations and first order systems. Thesis, New York University, 1958. (page 484)

Vekua, I.

[1] Generalized analytic functions. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva (1959). (In Russian; an English translation is in preparation by the American Mathematical Society.) (page 375)

[2] New methods for solving elliptic equations OGIZ, Moscow, 1948. (In Russian.) (page 401)

[3] Systems of partial differential equations of first order of elliptic type, and boundary value problems with applications to the theory of shells Mat. Sbornik, Vol. 31, No. 73 (1952), pp. 217–314. (page 375)

Visik, M. I., and O. A. Ladyženskaya

[1] Boundary value problems for partial differential equations and certain classes for operator equations. Uspehi. Mat. Nauk (N. S.), Vol. 11, No. 6 (72) (1956), pp. 41–97; American Mathematics Society Translation Ser. 2, Vol. 10 (1958), pp. 223-281. (page 240)

Volterra, Vito
[1] Sur les vibrations des corps elastiques isotropes. Acta Math., Vol. 18 (1894), pp. 161–232. (page 690)
Weinstein, A.
[1] Conformal representation and hydrodynamics. Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress. 1945, University of Toronto Press, Toronto (1946), pp. 355–364. (page 226)
[2] The generalized radiation problem and Euler-Poisson-Darboux equation. Instituto Brasileiro de Educação, Cienciae Cultura, 1955, pp. 126–146. (pages 695, 699)
[3] The method of axial symmetry in partial differential equations. Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Trieste (1954) pp. 86–96. Edizioui Cremonese, Roma, 1955. (page 705)
Weitzner, H.
[1] On the Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves. Bull. Am. Phys. Soc., Ser. 2, Vol. 5 (1960), pp. 321. (page 612)
Weyl, H.
[1] Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. Ann. Physik Ser. 4, Vol. 60 (1919), pp. 481–500. (page 196)
[2] Die Idee der Riemannschen Fläche .3rd ed. B. G. Teubner, Stuttgart, 1954. (page 160)
Wiener, N.
[1] Certain notions in potential theory. J. Math. and Phys., Vol. 3(1924), pp. 24–51. (page 306)
[2] The Dirichlet problem. J. Math. and Phys., Vol. 3 (1924), pp. 127–146. (page 305)
Wintner, A., see Hartman, P., and A. Wintner
Yamaguti, M., and K. Kasahara
[1] Sur le système hyperbolique à coefficients constants. Proc. Japan Acad., Vol. 35 (1959), pp. 547–550. (page 596)
Zaremba, S.
[1] Sopra un teorema d' unicita relativo alla equazione delle onde sferiche. Rend. reale accad. lincei, Ser. 5ª, Vol. 24 (1915), pp. 904–908. (page 642)
Zygmund, A., see Calderón, A. P., and A. Zygmund

# Symposia and Colloquia

[1] Colloqua International No. 71. La Théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy April 9–15. 1956. (page 240)
[2] Convegno Internazionale sulle Equazioni derivate parziali. Trieste, 1954. Edizioni Cremonese, 1955. (page 240)

[3] Transactions of the Symposium on partial differential equations. Berkeley, California, June 1955. Reprinted in Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 9, No. 3, 1956. (page 240)

## Supplementary Titles

Beltrami, E.–Sul principio di Huygens. Rend. Ist. Lombardo Ser. 2, Vol. 22 (1889), pp. 428–438.

Bieberbach, L.–Theorie der Differentialgleichungen. Springer, Berlin, 1930 (Grundledren der Math. Wiss., Bd. 6).

Bureau, F.–Quelques questions de Géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques. Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1949.

Carson, J. R.–Electrical circuit theory and the operational calculus. 1st ed. McGraw-Hill, New York, 1926.

Forsythe, G. E., and P. C. Rosenbloom–Numerical analysis and partial differential equations Wiley, New York, 1958.

Friedrichs, K. O.–Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Am. Math. Soc., Vol. 61 (1955), pp. 485–504.

–On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., Vol. 6, No. 3 (1953), pp. 299–325.

–On differential operators in Hilbert spaces. Am. J. Math., Vol. 61, No. 2 (1939), pp. 523–544.

Gårding, L.–Hyperbolic equations. Lecture Notes, University of Chicago. 1957.

Goursat, É.–Cours d'analyse mathématique, Vols. 1–3 (especially Vols. 2 and 3). 5th ed. Gauthier-Villars, Paris, 1956.

–Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre. 2nd ed. Hermann, Paris, 1921.

Hadamard, J.–Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Hermann, Paris, 1903.

–Problèmes à apparence difficile. Mat. Sbornik (N. S.), Vol. 17 (1945), pp. 3–7.

Halpren, S.–Lacunae of non-hyperbolic equations. Soviet Math., Vol. 1 (1960), pp. 680–683.

–Sur les conditions pour que le problème de Cauchy pour un système compatible d'équations linéaires aux dérivées partielles soit correctement posé. Mat. Sbornik (N. S.), Vol. 7 (1940), pp. 111-141. (In Russian; French summary.)

Holmgren, E.–Sur les systémes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinctes. Ark. Math., Astr. Fys., Vol. 5, No. 1, 13 pp.

–Sur l'extension de la méthode d'integration de Riemann. Ark. Math., Astr. Fys., Vol. 1 (1903), pp. 317–326; Vol. 5, No. 16, 12 pp.

–Über die Existenz der Grundlösung bei einer linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Ark. Math., Astr. Fys., Vol. 1 (1903), pp. 209–224.

–Über Randwertaufgaben bei einer linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Ark. Math., Astr. Fys., Vol. 1 (1903), pp. 401–417.

Jaffe, G.–Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen. Z. angew. Math. Mech., Vol. 1 (1921), pp. 398–410.

Jeffreys, H. –Operational methods in mathematical physics. Cambridge Tracts No. 23, Cambridge University Press, New York, 1927.

Kamke, E.–Differentialgleichungen reeller Funktionen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

Kasahara, K., and M. Yamaguti–Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients. Mem. Coll. Sci., Kyoto, Ser. A (33), Mathematics No. 1 (1960).

Leray, J.–La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéare. Bull. Soc. Math. France, Vol. 86 (1958), pp. 75–96.

–Le calcul differentiel et intégral sur une variété analytique complexe. Bull. Soc. Math. France, Vol. 87 (1959), pp. 81–180.

Levi-Civita, T.–Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Zanichelli. Bologua, 1931.

Mizohata, S.–Analyticité des solutions élémentaires du système hyperbolique à coefficients constants, Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A (32) (1959), pp. 213–234.

Petrovskii, I. G.–Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig, 1954.

Picard, E.–Traité d'analyse, Vols. 1–3, 3rd ed. Gauthier-Villars, Paris, 1922–1928.

Poincaré, H.–Théorèmes généraux sur le potential Newtonien, Leçon 1 in: Figures d'équilibre d'une masse fluide Leçons professsées à la Sorbonne en 1900, Naud, Paris, 1902.

Rellich, F. Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Math Ann., Vol. 109 (1934), pp. 714–745.

Riesz, M.–L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy Acta Math. Vol. 81 (1949), pp. 1–223.

Stellmacher, K.–Zum Aufangswertproblem der Gravitationsgleichungen Math. Ann., Vol. 115 (1938), pp. 136–152.

Thomas, T. Y., and E. W Titt–Systems of Partia Differentia Equations and Their Characteristic Surfaces Ann. of Math., Vol. 34 (1933), pp. 1–80.

Weinstein, A.–Les conditions aux limites introduites par l'hydrodynamique. L'enseignement mathématique (1936), pp. 107–125.

–On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. The Fifth Symposium in Applicd Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1954, pp. 137–147.

Yamaguti, M.–Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégra singulière. Mem. Coll. Sci., Kyoto, Ser. A (32) (1959), pp. 121–151.

# 英汉名词对照表

| | |
|---|---|
| $[a, b]$-pseudo-analytic function | $[a, b]$- 准解析函数 |
| Adjoint operator | 伴随算子 |
| Alternating process | 交替法 |
| Alternatives | 两岐命题 |
| Analytic function of two complex variables | 复二元解析函数 |
| Analyticity | 解析性 |
| Approximate progressing wave | 近似的前进波 |
| A priori estimate | 先验估计 |
| Argument | 宗量，变元 |
| Argument function | 主目函数 |
| Associated Legendre function | 连带 Legendre 函数 |
| Asymptotic solution | 渐近解 |
| Backward ray cone | 后向射线锥 |
| Balayage method of Poincaré | Poincaré 扫除法 |
| Barrier function | 闸函数 |
| Base curve | 基线 |
| Basic manifold | 基本流形 |
| Bicharacteristic curve | 双特征 (双特征曲线) |
| Bicharacteristic ray | 双特征射线 |
| Bicharacteristic strip | 双特征带 |
| Bicharacteristics | 双特征 (双特征线) |
| Bilinear form | 双一次型 |
| Bilinear function | 双一次函数 |
| Bound | 界，界限，界值 |
| Boundary | 边界 |
| Boundary condition | 边界条件 |
| Boundary curve | 边界曲线 |
| Boundary space | 边界空间 |
| Boundary value | 边界值 |
| Boundary value problem | 边值问题 |
| Branch curve | 分支曲线 |
| Branch line | 分支线 |

| | |
|---|---|
| Branch strip | 分支带 |
| Calculus of variations | 变分学 |
| Canonical form | 典范型 |
| Canonical perturbation theory | 典范扰动理论 |
| Canonical perturbation equations | 典范扰动方程 |
| Canonical system of differential equations | 典范微分方程组 |
| Canonical transformation | 典范变换 |
| Canonically conjugate variable | 典范共轭变量 |
| Capacity | 容量 |
| Caustic | 焦散的 |
| Caustic curve | 焦散曲线 |
| Caustic surface | 焦散曲面 |
| Characteristic base curve | 特征基线 |
| Characteristic base manifold | 特征基流形 |
| Characteristic condition | 特征条件 |
| Characteristic cone | 特征锥 |
| Characteristic coordinates | 特征坐标 |
| Characteristic curve | 特征曲线 |
| Characteristic derivative | 特征导数 |
| Characteristic determinant | 特征行列式 |
| Characteristic differential equation | 特征微分方程 |
| Characteristic differentiation | 特征微分 (法) |
| Characteristic direction | 特征方向 |
| Characteristic element | 特征元素 |
| Characteristic form | 特征形 |
| Characteristic initial value problem | 特征初值问题 |
| Characteristic line element | 特征线元 |
| Characteristic matrix | 特征方阵 |
| Characteristic manifold | 特征流形 |
| Characteristic normal cone | 特征法锥面 |
| Characteristic normal form | 特征标准形式 |
| Characteristic parameter | 特征参数 |
| Characteristic ray | 特征射线 |
| Characteristic ray cone | 特征射线锥面 |
| Characteristic sheet | 特征曲面叶 |
| Characteristic speed | 特征速率 |
| Characteristic strip | 特征带 |
| Characteristic surface | 特征曲面 |

| | |
|---|---|
| Characteristics | 特征 |
| Collineation | 直射变换 |
| Compact set | 列紧集，紧致集 |
| Compact support | 紧致支集 |
| Compactness | 紧致性 |
| Compatibility condition | 相容条件 |
| Complete integral | 完全积分 |
| Complete progressing wave | 完全的前进波 |
| Complete space | 完备空间 |
| Completeness | 完备性 |
| Complex gradient | 复梯度 |
| Composite wave | 复合波 |
| Compressible fluid | 可压缩流体 |
| Compression wave | 压缩波 |
| Cone | 锥, 锥面 |
| Conformal mapping | 共形映射 |
| Conical refraction | 锥形折射 |
| Conoid of dependence | 依赖劈锥 |
| Conservation of energy | 能量守恒 |
| Conservation law | 守恒定律 |
| Conservative operator | 守恒算子 |
| Consistency condition | 相容条件 |
| Continuable initial condition | 可延拓的初始条件 |
| Continuation | 延拓 |
| Continuity method | 连续法 |
| Continuous linear functional | 连续线性泛函 |
| Convex hull | 凸壳 |
| Convex set | 凸集 |
| Convolution | 褶积 |
| Core of the normal cone | 法锥面的内核 |
| Curve of contact | 接触曲线 |
| Cyclide | 四次圆纹曲面 |
| Cylindrical waves | 柱面波 |
| Damped wave | 阻尼波 |
| Decomposition of ideal function | 理想函数的分解 |
| Delta function | $\delta$ 函数，$\delta$ 函数 |
| Developable surface | 可展曲面 |
| Differentiability property | 可微性质 |

| | |
|---|---|
| Differentiation of fractional order | 分数阶的求导 |
| Dipole | 偶极子 |
| Directional derivative | 方向导数 |
| Discontinuity | 间断性 |
| Dispersion | 弥散 |
| Distribution | 分布 |
| Domain of dependence | 依赖区域 |
| Domain of determinacy | 决定区域 |
| Domain of influence | 影响区域 |
| Double layer potential | 双层位势 |
| Dual cone | 对偶锥面 |
| Dual generating pair | 对偶生成耦 |
| Dual spaces | 对偶空间 |
| Duality transformation | 对偶变换 |
| Edge of regression | 脊线 |
| Eigenvalue | 本征值 |
| Eigenvetor | 本征矢 |
| Eikonal | 短时距 |
| Eikonal equation | 短时矩方程 |
| Elastic wave | 弹性波 |
| Elliptic | 椭圆 (型) |
| Elliptic theta-function | 椭圆 $\vartheta$ 函数 |
| Embedding | 嵌入 |
| End condition | 终端条件 |
| Energy flux | 能通量 |
| Energy inequality | 能量不等式 |
| Energy integral | 能量积分 |
| Envelope | 包络 |
| Equation of mixed type | 混合型方程 |
| Equicontinuous functions | 同等连续函数 |
| Existence theorem | 存在定理 |
| Exponential operator | 指数型算符 |
| Extremal | 极值曲线 |
| $(F, G)$-pseudoanalytic function | $(F, G)$ 准解析函数 |
| Factorial of a vector | 矢量阶乘 |
| Field | 场 |
| Field of extremals | 极值曲线场 |
| Field functions | 场函数 |

| | |
|---|---|
| Finite part of a divergent integral | 发散积分的有限部分 |
| Fixed point method | 不动点定理 |
| Fixed point theorem | 不动点法 |
| Flux | 通量 |
| Focal curve | 焦线 |
| Focal strip | 焦带 |
| Focussing | 聚焦 |
| Form | 形式，形 |
| Formal power | 形式幂 |
| Forward ray cone | 前面射线锥 |
| Free boundary problem | 自由边界问题 |
| Free curve | 自由曲线 |
| Free strip | 自由带 |
| Free surface | 自由曲面 |
| Functional | 泛函 |
| Fundamental solution | 基本解 |
| Gap | 隙窝 |
| Generalized solution | 广义解 |
| Generalized progressing spherical wave | 广义前进球面波 |
| Generator | 生成元，母元 |
| Geodesic | 短程线 |
| Geodetic distance | 短程距离 |
| Geodetic sphere | 短程球面 |
| Harmonic function | 调和函数 |
| Heat equation | 传热方程 |
| Heaviside unit function | Heaviside 单位函数 |
| Hodograph method | 速矢端图法 |
| Hodograph transformation | 速矢端图变换 |
| Homeomorphism | 同胚 |
| Homogeneity relation | 齐性关系 |
| Homogeneous function | 齐次函数 |
| Hull | 壳 |
| Huygens minor principle | Huygens 小原理 |
| Huygens principle | Huygens 原理 |
| Hyperbolic function | 双曲函数 |
| Hyperbolic differential equation | 双曲型微分方程 |
| Ideal element | 理想元 |
| Ideal function | 理想函数，广义函数 |

| | |
|---|---|
| Improper wave | 广义波 |
| Improperly posed problem | 不适定的问题 |
| Impulse | 冲量 |
| Index of inertia | 惯性指数 |
| Initial condition | 初始条件 |
| Initial curve | 初始曲线 |
| Initial manifold | 初始流形 |
| Initial strip | 初始带 |
| Initial surface | 初始曲面 |
| Initial value | 初始值 |
| Initial value problem | 初值问题 |
| Integral conoid | 积分劈锥面 |
| Integral manifold | 积分流形 |
| Integral rational operator | 整有理算子 |
| Integral strip | 积分带 |
| Integral surface | 积分曲面 |
| Interior differential operator | 内微分算子 |
| Interior differentiation | 内微分 (法) |
| Invariance | 不变性 |
| Invariant | 不变量 |
| Invariant integration | 不变积分 |
| Inversion | 反演 |
| Inward radiation | 内向辐射 |
| Isentropic flow | 等熵流 |
| Iteration | 迭代 |
| Jacobian | Jacobi 式 |
| Jet problem | 射流问题 |
| Jump discontinuity | 跳跃间断 |
| Jump relation | 跳跃关系 |
| Kernel | 核 |
| Laplacian | Laplace 式 |
| Light cone | 光锥 |
| Light ray | 光线 |
| Linear functional | 线性泛函 |
| Linear operator | 线性算子 |
| Linear space | 线性空间 |
| Linear transformation | 线性变换 |
| Linearized equation | 线性化方程 |

| | |
|---|---|
| Local barrier function | 局部闸函数 |
| Local ray cone | 局部射线锥面 |
| Localization of ideal function | 理想函数的局部化 |
| Magnetic potential | 磁势 |
| Magnetohydrodynamics | 磁流体动力学 |
| Majorant | 强函数 |
| Mantle | 外罩 |
| Manifold | 流形 |
| Mapping | 映射 |
| Maximal non-negative boundary space | 最大非负边界空间 |
| Maximum norm | 最大范数 |
| Maximum principle | 极大值原理 |
| Mean value theorem | 平均值定理 |
| Method of descent | 降维法 |
| Method of energy integral | 能量积分法 |
| Method of plane mean values | 平面平均值法 |
| Method of spherical means | 球面平均值法 |
| Method of variation of parameters | 参数变分法 |
| Minimal surface | 极小曲面 |
| Mixed initial-boundary value problem | 混合初值—边值问题 |
| Mixed problem | 混合问题 |
| Multiple characteristic sheets | 多重特征曲面叶 |
| Multiple characteristics | 多重特征 |
| Negative norm | 负模 |
| Non-analytic differential equation | 非解析微分方程 |
| Noncharacteristic curve | 非特征曲线 |
| Non-isentropic flow | 非等熵流 |
| Nonlinear boundary value problem | 非线性边值问题 |
| Nonlinear elliptic equation | 非线性椭圆型方程 |
| Nonsingular matrix | 非奇异阵 |
| Non-symmetric system | 非对称方程组 |
| Norm | 范数 |
| Normal cone | 法锥面 |
| Normal derivative | 法向导数 |
| Normal differentiation | 法向微分 (求导) |
| Normal form | 范式, 正规形式 |
| Normal surface | 法曲面 |
| Normal velocity | 法向速度 |

| | |
|---|---|
| Normal velocity surface | 法速曲面 |
| Normal velocity vector | 法速矢量 |
| Normalizing parameter system | 标准化参数组 |
| Normed space | 赋范空间 |
| Null ray | 零射线 |
| Null vector | 零化矢量 |
| Operational calculus | 运算微积 |
| Operator | 算子，算符 |
| Oscillatory initial value | 振荡的初始值 |
| Outward derivative | 外向导数 |
| Overdetermined problem | 超定问题 |
| Overdetermined system | 超定方程组 |
| Parabolic differential equation | 抛物型微分方程 |
| Parametrix | 拟基本解 |
| Persistance property | 持久性质 |
| Perturbation theory | 扰动理论 |
| Phase | 相 |
| Phase function | 相函数 |
| Phase of the wave | 波的相 |
| Phase plane | 相平面 |
| Phase surface | 相曲面 |
| Piecewise continuous function | 分片 (段、块) 连续函数 |
| Piecewise smooth surface | 分片光滑曲面 |
| Plane wave | 平面波 |
| Plane-like wave front | 类平面波前 |
| Planetary motion | 行星运动 |
| Polar reciprocal | 配极对射 |
| Polytropic gas | 多方气体 |
| Potential | 位，势，位势 |
| Potential function | 位函数，势函数 |
| Principal part | 主部 |
| Progressing wave | 前进波 |
| Propagation of discontinuity | 间断性的传播 |
| Properly posed problem | 适定的问题 |
| Pseudo-analytic function | 准解析函数 |
| Pseudo area | 准面积 |
| Quadratic form | 二次型 |
| Quasi-conformal mapping | 拟共形映射 |

| | |
|---|---|
| Quasilinear differential equation | 拟线性微分方程 |
| Quasilinear system of equations | 拟线性方程组 |
| Radiation condition | 辐射条件 |
| Radiation function | 辐射函数 |
| Radiation kernel | 辐射核 |
| Radiation matrix | 辐射阵 |
| Radiation problem | 辐射问题 |
| Radiation process | 辐射过程 |
| Ray(s) | 射线 |
| Ray cone | 射线锥面 |
| Ray conoid | 射线劈锥面 |
| Ray surface | 射线曲面 |
| Reciprocal cone | 对射锥面 |
| Reciprocal normal surface | 逆法曲面 |
| Reciprocal surface | 对射曲面 |
| Reciprocal transformation | 对射变换 |
| Reduced wave equation | 约化的波动方程 |
| Reducibility | 可约化性 |
| Reduction | 约化 |
| Reflection | 反映 |
| Reflection principle | 反映原理 |
| Regular boundary point | 正则的边界点 |
| Regular curve | 正则曲线 |
| Representation | 表示 (式) |
| Representation formula | 表示公式 |
| Resolution of initial discontinuity | 初始间断的分解 |
| Rest mass | 静止质量 |
| Retarded potential | 推迟势 |
| $r$-norm | $r$-范数 |
| Scalar operator | 标量算子 |
| Scattering | 散射 |
| Semigroup | 半群 |
| Semi-linear system | 半线性方程组 |
| Shear wave | 剪切波 |
| Shock | 激波 |
| Shock condition | 激波条件 |
| Shock discontinuity | 激波间断性 |
| Similarity principle | 相似性原理 |

| | |
|---|---|
| Single layer potential | 单层势 |
| Singular operator | 奇异算符 |
| Singular solution | 奇异解 |
| Singularity | 奇异性 |
| Sound wave | 声波 |
| Source | 源 |
| Space | 空间 |
| Space of test function | 试探函数空间 |
| Space-like direction | 类空方向 |
| Space-like lens | 类空透镜 |
| Space-like manifold | 类空流形 |
| Space-like normal vector | 类空法矢量 |
| Space-like surface | 类空曲面 |
| Space-like surface element | 类空面元 |
| Speed of propagation | 传播速率 |
| Spherical wave | 球面波 |
| Spherically symmetric flow | 球面对称流 |
| Stability | 稳定性 |
| Standing wave | 驻波 |
| Steady irrotational flow | 定常无旋流 |
| Stream line | 流线 |
| Stress tensor | 应力张量 |
| Strip | 带 |
| Strip condition | 成带条件 |
| Strong barrier function | 强闸函数 |
| Subfunction | 下函数 |
| Subharmonic function | 下调和函数 |
| Successor of generating pair | 母元偶的后继 |
| Superfunction | 上函数 |
| Superharmonic function | 上调和函数 |
| Superposition | 叠加 |
| Support | 支集 |
| Support function of a minimal surface | 极小曲面的支持函数 |
| Supporting plane | 支持平面，支撑平面 |
| Surface element | 曲面元 |
| Surface of revolution | 旋转曲面 |
| Symbolic method | 符号法 |
| Symmetric hyperbolic operator | 对称双曲型算子 |

| | |
|---|---|
| Symmetric hyperbolic system | 对称双曲型方程组 |
| Tangential differentiation | 切向微分 (求导) |
| Telegraph equations | 电报方程 |
| Test function | 试探函数 |
| Theta-function | $\vartheta$ 函数 |
| Time-like curve | 类时曲线 |
| Time-like direction | 类时方向 |
| Time reversibility of hyperbolic problem | 双曲型问题的时间可逆性 |
| Totally hyperbolic differential equation | 完全双曲型微分方程 |
| Transform | 变式 |
| Transformation | 变换 |
| Transient problem | 瞬态问题 |
| Transient response | 瞬态响应 |
| Translation principle | 平移原理 |
| Transmission of discontinuity | 间断性的传送 |
| Transmission of sharp signals | 清晰信号的传送 |
| Transport equation | 输运方程 |
| Transversality condition | 横截条件 |
| Transverse differentiation | 横截微分 (求导) |
| Trivial solution | 零解 |
| Tubular surface | 管状曲面 |
| Twobody problem | 二体问题 |
| Type | 型 |
| Ultra-hyperbolic differential equation | 超双曲型方程 |
| Underdetermined system | 欠定方程组 |
| Undistorted progressing wave | 无畸变前进波 |
| Uniform convergence | 一致收敛 |
| Uniformization | 单值化 |
| Uniformly elliptic equation | 一致椭圆型方程 |
| Unique continuation | 唯一延拓 |
| Unit function | 单位函数 |
| Variational problem | 变分问题 |
| Vector | 矢量 |
| Vectorial multiplication | 有向积 |
| Vibration problem | 振动问题 |
| Vortex | 涡旋 |
| Wave | 波 |
| Wave equation | 波动方程 |

| | |
|---|---|
| Wave form | 波形 |
| Wave front | 波前 |
| Wave operator | 波算子 |
| Weak convergence | 弱收敛 |
| Weak solution | 弱解 |
| Weakly space-like surface | 弱类空曲面 |